104 周期的加熱を受ける不均質長方形板の熱誘起振動 (下面完全冷却条件下での解析)

Thermally Induced Vibration of an Inhomogeneous Rectangular Plate Due to Cyclic Heating (Analysis under Condition of Zero Temperature Change on Lower Boundary Surface)

○学 浜村 英樹 (阪府大院) 正 谷川 義信 (阪府大院)

正 河村 隆介 (阪府大院)

Hideki Hamamura, Yoshinobu Tanigawa and Ryusuke Kawamura

Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University

Gakuen-cho 1-1, Sakai, Osaka 599-8531

Theoretical analysis for thermally induced vibration of an inhomogeneous rectangular plate is treated in this study. It is assumed that material properties of the plate are given by the power product form with coordinate z' . Firstly, the one-dimensional transient heat conduction problem of the plate is developed when it is subjected to cyclic heating. Then, the thermally induced vibration for the plate is analyzed under the condition that all edges are to be simply supported in such a manner that the in-plane displacements are fully restrained. Next, numerical calculations are carried out, and we discussed about an effect of aspect ratio on thermal displacements, thermal stresses and resonance characteristic in the plate.

Key Words: Thermally Induced Vibration, Inhomogeneous Materials, Rectangular Plate, Cyclic Heating

1 緒 言

近年、傾斜機能材料等の新素材の開発により、構造部材が軽量化・高強度化し、その結果、部材肉厚が減少し、剛性の低下により生じる動的応答を理論解析することが重要視されつつある。しかし、現在、薄肉構造物に対する熱誘起振動問題を解析的に取り扱った報告例はあまり見受けられない。

そこで、本研究では、不均質な材料物性をもつ弾性体の長方形板を取り上げ、上面に周期的加熱を与え、下面で完全冷却(温度変化が零に拘束)される場合の熱誘起振動問題を全周単純支持条件下で理論解析した。また、従前の研究では、数値計算プログラムの制約により、初等関数を用いた温度解を得たが、今回、熱的物性値の不均質性に関する制約がない場合の温度解を導出する。そして、数値計算により、熱的物性値である比熱容量および熱伝導率の不均質性が長方形板の熱変形と熱応力の動的応答に及ぼす影響について検討した。

2 理論解析

2.1 一次元非定常熱伝導解析

長さ a 、幅 b 、厚さ h の不均質長方形板での温度変化を、図1のように上面を基準とする z' 軸方向(長方形板の厚

Fig. 1: Conditions and coordinate system

さ方向)についての一次元問題として取り扱う。初期温度は基準温度($T = 0$)で、時刻 $t = 0$ の瞬間から上面に周期的加熱を与え、下面は基準温度 $T = 0$ に保持する。

このとき、長方形板の非定常熱伝導の基礎方程式、初期条件および境界条件は以下になる。

$$c(z')\rho(z')\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z'}\left\{\lambda(z')\frac{\partial T}{\partial z'}\right\} \quad (1)$$

$$t = 0 \quad ; \quad T = 0 \quad (2)$$

$$z' = 0 \quad ; \quad T = T_0 \sin \omega t \quad (3)$$

$$z' = h \quad ; \quad T = 0 \quad (4)$$

ここで、比熱 $c(z')$ 、密度 $\rho(z')$ 、熱伝導率 $\lambda(z')$ が z' 方向に関して次式のような不均質特性を持つとする。

$$c(z')\rho(z') = c_0\rho_0\left(1 + \frac{z'}{h}\right)^k, \quad \lambda(z') = \lambda_0\left(1 + \frac{z'}{h}\right)^l \quad (5)$$

ただし、 k 、 l は比熱容量、熱伝導率の不均質特性を示すパラメータであり、 c_0 、 ρ_0 、 λ_0 は各物性値の基準値である。

ここで、式(1)を式(2)~(4)の下で、温度変化 T 、板厚方向の座標 z' 、時刻 t 、加熱の角振動数 ω の無次元表示をそれぞれ $\bar{T}$ 、 ζ 、 τ 、 $\bar{\omega}$ とし解くと、温度解は

$$\begin{aligned} \bar{T} = & - \sum_{j=1}^{\infty} e^{-q_j^2 \tau} \frac{\bar{\omega}}{q_j^4 + \bar{\omega}^2} \frac{2q_j}{D_1'(q_j)} \zeta^{p_1} \\ & \times \{Y_\nu(2^{p_2} p_3 q_j) J_\nu(p_3 q_j \zeta^{p_2}) \\ & - J_\nu(2^{p_2} p_3 q_j) Y_\nu(p_3 q_j \zeta^{p_2})\} \\ & + \frac{\zeta^{p_1}}{e_1^2 + e_2^2} [-\{e_2 f_1(\zeta) - e_1 f_2(\zeta)\} \cos \bar{\omega} \tau \\ & + \{e_1 f_1(\zeta) + e_2 f_2(\zeta)\} \sin \bar{\omega} \tau] \quad (6) \end{aligned}$$

となる。ここで、 J_ν 、 Y_ν は ν 次の第一種および第二種ベッセル関数であり

$$\nu = \left| \frac{1-l}{k-l+2} \right| \quad (7)$$

で与えられる。また、式(6)中の e_1 , e_2 , $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$ はケルビン関数により表される係数および関数であるが、紙面の都合上、その詳細は省略する。

2.2 熱弾性解析

図2のような微小要素を考え、基準面 $z=0$ を上面から η の位置(中立面)にとる。微小要素の力のつり合い式、 x 軸、 y 軸まわりのモーメントのつり合い式から、たわみ w に関する運動方程式は次式のようになる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w + \frac{\mu}{c_3} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{c_3} \left[p - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) M_T \right] \quad (8)$$

ただし、 ν はポアソン比、 μ は単位長さ・単位幅あたりの質量、 c_3 は曲げ剛性、 M_T は熱曲げモーメントである。

さらに、縦弾性係数 E 、線膨張係数 α 、密度 ρ が次式のような z' 方向に関する任意のべき乗で表される不均質特性をもつ場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} E(z') &= E_0 \left(1 + \frac{z'}{h}\right)^m, \quad \alpha(z') = \alpha_0 \left(1 + \frac{z'}{h}\right)^n \\ \rho(z') &= \rho_0 \left(1 + \frac{z'}{h}\right)^\gamma \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

外力 p が作用しない場合、運動方程式を面外方向に関して全周単純支持条件：

$$\left. \begin{aligned} x=0, a; \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{M_T}{(1-\nu)c_3} \\ y=0, b; \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M_T}{(1-\nu)c_3} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

の下で解くと、たわみの動的解の無次元表示は

$$\bar{w} = \sum_{k=\text{odd}} \sum_{l=\text{odd}} \Theta_{kl}(\tau) \sin \alpha_k \bar{x} \sin \beta_l \bar{y} \quad (11)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \Theta_{kl}(\tau) &= \frac{4\bar{b}}{(1-\nu)\bar{c}_3\bar{h}^2\pi^2} \frac{\alpha_k^2 + \beta_l^2}{kl} \\ &\times \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_{kl}^2 + q_j^4} \left\{ e^{-q_j^2\tau} - \cos \Omega_{kl}\tau + \frac{q_j^2}{\Omega_{kl}} \sin \Omega_{kl}\tau \right\} \right. \\ &\quad \times \int_1^2 D_{1j}(\zeta) \zeta^{m+n} (\zeta-1-\bar{\eta}) d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{\Omega_{kl}^2 - \bar{\omega}^2} \{ \cos \bar{\omega}\tau - \cos \Omega_{kl}\tau \} \\ &\quad \times \int_1^2 D_2(\zeta) \zeta^{m+n} (\zeta-1-\bar{\eta}) d\zeta \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Omega_{kl}^2 - \bar{\omega}^2} \left\{ \sin \bar{\omega}\tau - \frac{\bar{\omega}}{\Omega_{kl}} \sin \Omega_{kl}\tau \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \int_1^2 D_3(\zeta) \zeta^{m+n} (\zeta-1-\bar{\eta}) d\zeta \right] \quad (12) \end{aligned}$$

である。上式の Ω_{kl} は板の無次元固有角振動数であり、

$$\Omega_{kl} = \left(\frac{\bar{c}_3 \bar{h}^4}{\bar{\mu}} \right)^{\frac{1}{2}} \{ \alpha_k^2 + \beta_l^2 \} \quad (13)$$

$$\alpha_k = k\pi, \quad \beta_l = \frac{l\pi}{\bar{b}}; \quad k, l = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Fig. 2: Equilibrium in a plate element

Fig. 3: Variation of temperature change in thickness direction

Fig. 4: Time-evolution of thermal stress $\bar{\sigma}_{xx}$

で表される。ここで、 $\bar{b} = b/a$ はアスペクト比であり、板の長さ a を一定とする場合、板の幅 b が $\bar{b}$ とともに変化することを意味する。紙面の都合上、 D_{1j} , D_2 , D_3 の詳細は省略する。

3 数値計算結果

得られた解析結果について数値計算を実行した。基準物性値を軟鋼とし、加熱の角振動数を次式で与えた。

$$\bar{\omega} = \varepsilon \Omega_{11}^{(h)} \quad (15)$$

ただし、 $\Omega_{11}^{(h)}$ は均質正方形板の最低次の無次元固有角振動数である。例として、 $\varepsilon = 0.7$ の場合について、比熱容量の不均質パラメータ k を変化した場合の温度変化の板厚方向分布と中央面での動的熱応力の時間変化をそれぞれ図3、図4に示す。

4 結 言

本稿では、不均質長方形板を取り上げ、上面に周期的加熱を与える場合の熱誘起振動問題を理論解析した。さらに、数値計算により、比熱容量の不均質性が長方形板の熱変形および熱応力の動的応答に及ぼす影響を検討した。