実機検査データによる疲労寿命のベイズ推定[†]

酒井 信介* 岡島 智史**
泉 聡志* 岩崎 篤***

Bayesian Inference of Fatigue Life Estimated by Inspection Data

by

Shinsuke SAKAI*, Satoshi OKAJIMA**, Satoshi IZUMI* and Atsushi IWASAKI***

Recently, importance of risk assessment has greatly increased. However, data of failure probability do not exist sufficiently in our country. Therefore, the method to obtain the probability of failure from inspection data is required. This paper investigates the method to estimate the mother distribution of failure life of structures by inspection data using Bayesian inference. Though Bayesian inference is widely said to be effective for the estimation from small samples, the effectiveness greatly depends on the initial setting of a prior distribution. In this paper, the applicability of Bayesian inference is examined first. For this purpose, Bayesian inference is applied for estimating fatigue life by the inspection data of boiler parts. Next, influence of the initial prior distribution on the results is studied systematically by giving variation to mother parameters. Weibull distribution is assumed for the fatigue life distribution and the investigation is made on scale parameter and shape one. In order to assist the inspection planning, the estimations of MTBF and hazard rate are also investigated. As the result, the relation between the initial prior distribution and the effective range by Bayesian inference is clarified.

Key words : Bayesian inference, Weibull distribution, Fatigue life estimation, Mean time between failure, Hazard rate, Inspection planning, Risk assessment

1 緒 言

機器の検査へのリスクベース工学の導入の必要性が高まっている^{1), 2)}。リスクは、破損確率と影響度との積として評価される。破損確率データとしては米国石油協会のAPI581³⁾が広く認知されているが、機械構造物の評価においては、我が国の実情に即したデータを用いることが必要である。ところが、我が国ではこれまでは、リスク評価への適用を意識した多様な機器に対する破損確率および寿命分布データの系統的な整備が行われてこなかったために、破損確率評価に資するような情報が十分に得られないという問題が存在する。このような状況を改善するための一つの方策として、本論文では、小標本のサンプルデータから、効率よく母集団を推定することに応用されているベイズ推定^{4), 5)}を検査データに適用する方法について検討する。我が国では、検査記録は数多く存在するものの、必ずしもそのデータが破損確率推定に利用できる情報を含んでいるとは限らない。このため一般に、既存のデータもしくは今後の検査データから機器の破損確率を推定する際に、十分な量のデータが利用できない。その一方で、類似機器に共通にあてはまる汎用のデータベースは入手が比較的容易であることも多い。このような場合に、類似機器に共通するデータベースの情報を事前の確率分布として推定に利用することの出来るベイズ推定を利用することが、極めて有効である。ただ

し、ベイズ推定の有効性は、事前分布の与え方や、得られるデータ量などにも依存するため、その適用性について検討が必要である。本論文においては、ボイラ部品の検査データに対してベイズ推定を行い、寿命分布の母数推定を行い、有効性を検証するとともに、シミュレーションを通じて、事前分布と推定精度との関係を系統的に調査する。

2 寿命推定手法

2・1 モデルと推定手法

現場での検査データは、検査回数と損傷の有無という形で保存される場合が多い。このような検査データを損傷確率評価に有効利用するために、機器の寿命および検査を、次のようにモデル化した。対象とする機械構造物に対し、装置の起動および停止に伴って疲労損傷が累積し、き裂が発生する。このき裂が検査によって検出される長さに到達するまでの時間を寿命と定義した。例えば、発電プラントの起動停止に伴う熱サイクルによる低サイクル疲労がこのモデルに該当する。検査によって、寿命に至った機器のき裂は見落とされることなく発見され、その時点で新品に交換されるものとした。検査記録から寿命分布を推定し、損傷確率評価に結びつけることを考える。疲労き裂発生寿命の分布として下記の二母数ワイブル分布を仮定した。

[†] 原稿受理 平成 16 年 4 月 12 日 Received Apr. 12, 2004

* 正 会 員 東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻 〒113-8656 東京都文京区本郷, Dept. of Mech. Eng., Tokyo Univ., Bunkyo-ku, Tokyo, 113-8656

** 学生会員 東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻 〒113-8656 東京都文京区本郷, Graduate Student, Tokyo Univ., Bunkyo-ku, Tokyo, 113-8656

*** 東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻 〒113-8656 東京都文京区本郷, Dept. of Mech. Eng., Tokyo Univ., Bunkyo-ku, Tokyo, 113-8656

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right\} \quad (1)$$

t は補修を行ってからの経過時間である。起動停止回数が損傷に影響するため、起動停止一回を単位時間に対応付けた。 α は形状母数、 β は尺度母数であり、この二つの母数を検査結果から推定した。以後、形状母数を α 、尺度母数を β と記述する。式 (1) は時刻 t までの間に疲労き裂が発生する確率であるため、 $F(t)$ を破損確率として、破損率評価を要求されるリスクベースメンテナンス (RBM) に利用することが可能である。

2・2 ベイズ推定

一般に検査記録から寿命分布母数を推定する際に、次のような状況である場合が多い。

- (1) 既存のデータもしくは今後の検査データから機器の寿命分布を推定する際に、十分な量のデータが利用できない。
- (2) 個別の機器のデータは存在しなくとも、類似機器に共通してあてはまるデータベースから、寿命分布の推定に利用できる情報が得られる。あるいは、試験データなどをもとにした設計時の寿命分布データが存在する。

このような状況の場合には、純粹に客観的な統計処理を行うよりも、母数の主観確率分布を検査データに基づいて更新していくことで推定を行うベイズ推定が有効であると考えられる。

以下ベイズ推定の実施方法を述べる。 θ を推定を行う母数のベクトル、 A を検査によって観察される事象とするとき、観察事象によって更新された母数の事後分布はベイズの定理 (式 (2)) によって求められる。^{6), 7), 8)}

$$P(\theta|A) = \frac{P(A|\theta)P(\theta)}{\int_{\theta} P(A|\theta)P(\theta)d\theta} \quad (2)$$

$P(A|\theta)$ は母数がある値 θ をとるという条件のもとで、 A という事象が得られる条件付確率として与える。ベイズ推定は推定対象の母数 θ が確率密度関数に従うばらつきを持つものとして扱い、事前分布 $P(\theta)$ を、得られた事象 A の情報を取り入れた事後分布 $P(\theta|A)$ に更新することで推定を行う。従って、類似機器に共通するデータベースから予測される分布を初期の事前分布としてベイズ推定を開始し、以後は検査のたびごとに更新していくことにより、母数の推定精度を高めていくことが出来る。この場合、事前分布が適切であれば、少ないデータから母数推定を比較的精度良く行うことが出来る。

ベイズ推定により母数の区間推定を行う場合、通常の統計学で用いられる信頼区間は用いず、確信区間を用いる。^{7), 8)} 確信区間は、母数の事後分布の両端からある確率の区間を切り取って残った、中央部の区間である。一方、最尤法によって区間推定を行う場合には信頼区間を用いる。そこで本論文では、最尤法との比較を行うときには、信頼区間をベイズ推定による確信区間と対応付けて検討することとした。

本論文におけるモデルでは事象 A としては、前回の検

査から今回の検査までの期間内に、き裂が発生しなかった事象 (safe) とき裂が発生した事象 (failure) の二通りが考えられる。 $P(A|\theta)$ は今回の検査で新しく得られた事実を反映したものであるため、前回の検査時点でき裂が発生していないという条件付の確率を求めた。そのため $P(A|\theta)$ としてき裂が発見されなかった場合は式 (3)、き裂が発見された場合は式 (4) を用い、複数の機器に対する検査結果を得た場合には、各機器 i の $P_i(A|\theta)$ の積をもって $P(A|\theta)$ とした。

$$P(\text{safe}|\alpha, \beta) = \exp\left\{\left(\frac{t_{\text{last}}}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_{\text{inspect}}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \quad (3)$$

$$P(\text{failure}|\alpha, \beta) = 1 - \exp\left\{\left(\frac{t_{\text{last}}}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_{\text{inspect}}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \quad (4)$$

ただし、 t_{inspect} は補修後、検査が行われるまでの経過時間である。 t_{last} は前回の検査が行われるまでの時間であり、今回が補修後初めての検査である場合には 0 である。

2・3 初期の事前分布の設定

ベイズ推定を行うにあたっては、母数に対する初期の事前分布の設定は重要である。そこで本論文では、事前分布の与え方とベイズ推定の有効性を系統的に調査した。過去の経験に基づく情報、あるいは過去のデータの蓄積などの情報が何らかの形で存在する場合と存在しない場合とで分けて考えることとした。

疲労寿命分布の母数についての情報がデータベース等から予測できる場合には、予測された分布データをもって初期の事前分布とすることが妥当である。このため初期の事前分布を式 (5) のように二母数が互いに独立な対数正規分布と仮定し、 α と β の様々な初期分布について調査した。

$$f_{\text{prior}}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha\sigma_\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln \alpha - \ln Me_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)^2\right\} \\ \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta\sigma_\beta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln \beta - \ln Me_\beta}{\sigma_\beta}\right)^2\right\} \quad (5)$$

Me_α 、 Me_β は事前分布における α 、 β の中央値であり、 σ_α 、 σ_β は事前分布における $\ln \alpha$ 、 $\ln \beta$ の標準偏差である。 α 、 β ともに正の値しかとりえないため、自動的にこの条件を満足する対数正規分布を採用した。

一方、初期の時点で、母数の分布について何の情報も存在しない場合には、母数に関する情報を一切持たない分布を事前分布として与えることでベイズ推定が行える。このような考え方のもとで与えられる事前分布を無情報性事前分布 (Noninformative prior) という。^{8), 9)} 最も単純な無情報性事前分布として一様分布が用いられることが多い。しかし、同一の分布形であっても、異なる形式の式で定義されることがあり、この場合には母数の定義が異なることになる。従って、ある定義で母数が一様分布していても異なる定義では一様分布になるとは限らない。この場合、ある特定の値に高い確信の度合いを与えることになりかねず、無情報性事前分布としては不適切である。推定する分布が二母数ワイブル分布である場合には、

Table IV. Results of Bayesian inference with 9 case priors estimated by inspection data.

		1st	2nd	3rd
Case1	α	6.81 ± 3.25	4.57 ± 2.27	2.73 ± 0.32
	β	130.6 ± 30.6	89.1 ± 6.4	131.5 ± 6.0
Case2	α	6.22 ± 3.15	4.64 ± 2.35	2.73 ± 0.32
	β	104.9 ± 33.9	88.0 ± 6.0	130.7 ± 6.0
Case3	α	5.75 ± 3.00	4.63 ± 2.32	2.72 ± 0.32
	β	64.5 ± 29.6	86.7 ± 5.8	130.0 ± 5.9
Case4	α	4.16 ± 1.83	2.97 ± 1.12	2.64 ± 0.31
	β	114.3 ± 28.2	90.2 ± 8.0	131.3 ± 6.0
Case5	α	3.61 ± 1.65	2.96 ± 1.16	2.63 ± 0.31
	β	91.5 ± 29.2	88.1 ± 8.0	130.6 ± 6.0
Case6	α	3.20 ± 1.61	2.95 ± 1.24	2.62 ± 0.31
	β	59.2 ± 25.6	85.9 ± 7.8	129.7 ± 6.1
Case7	α	3.00 ± 1.22	2.40 ± 0.73	2.56 ± 0.30
	β	101.2 ± 26.1	89.4 ± 9.0	131.2 ± 6.1
Case8	α	2.52 ± 1.05	2.37 ± 0.74	2.55 ± 0.30
	β	80.4 ± 25.8	87.2 ± 9.0	130.4 ± 6.1
Case9	α	2.09 ± 0.90	2.27 ± 0.75	2.55 ± 0.31
	β	53.6 ± 22.0	83.9 ± 9.5	129.5 ± 6.1

についても、推定結果は最尤法および Non-info.の結果とほぼ一致する。またすべてのケースにおいて利用できる検査データが増えることで、 α 、 β の分散は小さくなることがわかる。

3.3 MTBF と故障率

検査一回目の時点で補修され、検査二回目および検査三回目で、き裂が確認されなかった機器に対し、ベイズ推定によって故障率を推定した。Fig. 1に、推定した故障率の90%確信区間の、時刻に対する推移を示す。事前分布は、Table IIからの推測値を用いている Case 5を用いた。起動停止回数310回、331回において新しい検査結果を得ることで、母数の分布が更新されて母数の確信区間が狭まる。この結果、故障率推定の不確実性が小さくなることわかる。

Fig. 2は最尤法、Non-info.、そして適切な事前分布を想定した Case 5の事前分布によるベイズ推定の三つの手法から推定される MTBF の90%確信区間を示したものである。Non-info.は、最尤法と比較して、利用できる

Fig. 1. Lower and upper bounds of 90% credible interval for hazard rate calculated using Bayesian inference with Case 5 prior estimated by inspection data.

Fig. 2. Lower and upper bounds of 90% credible interval for MTBF calculated using MLM and Bayesian inference with non-informative prior and Case 5 prior estimated by inspection data.

検査データが少ない時点からより狭い範囲に MTBF を推定できる。さらに、Case 5のように適切に事前分布を与えれば、Non-info.では推定できない検査一回目においても推定が可能である。ただし十分な検査記録がある場合にはどの推定手法でも結果はほぼ一致している。

4 シミュレーションによる検討

4.1 シミュレーション法

事前分布の影響を調べるため、正解とする母数を設定し、事前分布の正解に対する偏差が、ベイズ推定の結果にどのように影響するかをシミュレーションにより系統的に明らかにした。母集団として第3章の実機データから推測された $\alpha = 2.6$ 、 $\beta = 130$ のワイブル分布を仮定した。検査対象機器数は10とした。起動停止回数30回ごとに検査が行われ、き裂発生寿命に至った機器は見落とされることなく発見されるとした。検査で、き裂が確認された部位は、新品に交換されるものとした。

以上の条件のもとで20例の仮想的な検査データを作成し、各検査終了時に、この仮想検査データを用いて、最尤法による推定およびベイズ推定を行った。結果として、20例の仮想検査記録による推定結果の平均値を求めた。ベイズ推定における事前分布は無情報性事前分布のほか、Table IIIに示した9ケースを設定し比較することで有効性を検討した。

4.2 寿命分布母数に対する推定

推定値の妥当性を示す指標として、相対誤差 d_{post} を式(9)のように定義した。 α_{post} 、 β_{post} は事後分布で同時確率密度が最も高くなる位置の α 、 β である。 α_{true} 、 β_{true} は α 、 β の真値であり、それぞれ2.6、130である。

$$d_{post} = \sqrt{\left(\frac{\alpha_{post}}{\alpha_{true}} - 1\right)^2 + \left(\frac{\beta_{post}}{\beta_{true}} - 1\right)^2} \quad (9)$$

検査三回目、六回目、九回目終了時点での最尤法、Non-info.、Case 1～9の事前分布を与えた場合の α_{post} 、 β_{post} および d_{post} を Table Vに示す。Non-info.の d_{post} は検査回数に関係なく最尤法の d_{post} より小さく、特に検査回数が少ないほど最尤法と Non-info.の差は顕著である。このように利用可能なデータが少ない際のベイズ推定による母数推定が有効であることが確認できる。

検査三回目終了時点の Case 1～9の d_{post} は最尤法よ

Table V. Results of MLM and Bayesian inference with non-informative prior and 9 case priors calculated by simulated data.

	3rd			6th			9th		
	α_{post}	β_{post}	d_{post}	α_{post}	β_{post}	d_{post}	α_{post}	β_{post}	d_{post}
MLM	22.5	135.2	14.3	3.35	124.9	0.290	2.93	125.5	0.131
Non-info.	3.44	124.4	0.326	3.14	123.2	0.214	2.82	124.1	0.095
Case1	3.53	124.5	0.358	3.41	127.0	0.312	3.03	127.3	0.169
Case2	3.90	112.3	0.518	3.40	123.6	0.313	3.02	124.9	0.166
Case3	4.18	104.7	0.639	3.38	120.1	0.308	3.00	122.3	0.163
Case4	2.36	146.1	0.154	2.99	127.4	0.150	2.78	126.8	0.074
Case5	2.69	122.9	0.066	2.99	123.2	0.158	2.78	124.2	0.084
Case6	2.93	109.6	0.202	2.97	118.8	0.166	2.76	121.2	0.092
Case7	1.70	170.6	0.466	2.63	128.5	0.018	2.59	126.7	0.026
Case8	1.97	134.4	0.246	2.65	123.1	0.056	2.58	123.6	0.050
Case9	2.15	114.1	0.213	2.63	117.7	0.096	2.56	120.2	0.077

り小さく, Me_α を過大に見積もった Case 1 ~ 3, Me_α を過小かつ Me_β を過大に見積もった Case 7を除いて Non-info.より小さい。また, 検査六回目終了時点においては, Case 4 ~ 9 の d_{post} は最尤法, Non-info.よりも小さいが, Me_α を過大に見積もった Case 1 ~ 3 は最尤法・Non-info.より大きい。検査九回目終了時点の結果は検査六回目終了時点と同様の傾向だが, 推定手法や事前分布による d_{post} の差は小さい。 d_{post} の値は全般的に事前分布の Me_α に強く依存しており, 特に利用可能な検査記録が多い場合に Me_α の影響が大きい。ここから β と比較して α の更新が遅いことがわかる。

4・3 MTBF と故障率

Fig. 3 は最尤法, Non-info., そして適切な事前分布を想定した Case 5 の事前分布によるベイズ推定の三手法によって推定される MTBF90% 確信区間を示したものである。Fig. 4 は事前分布の Me_α の影響を調べるため, Case 2, 5, 8 の事前分布に対してベイズ推定より求められた MTBF90% 確信区間を示したものである。Fig. 5 は事前

Fig. 3. Lower and upper bounds of 90% credible intervals of MTBF calculated using MLM and Bayesian inference with non-informative prior and Case 5 prior estimated by simulated data.

Fig. 4. Lower and upper bounds of 90% credible intervals for MTBF calculated using Bayesian inference with Case 2, Case 5, and Case 8 prior estimated by simulated data.

Fig. 5. Lower and upper bounds of 90% credible intervals for MTBF calculated using Bayesian inference with Case 4, Case 5, and Case 6 prior estimated by simulated data.

分布の Me_β の影響を調べるため, Case 4, 5, 6 の事前分布に対してベイズ推定より求められた MTBF90% 確信区間を示したものである。

Non-info.による MTBF 推定は, 利用できる検査データが少ない場合には, 最尤法と比較して推定の確信区間が狭く有利である。ただし検査データが豊富にある場合には最尤法と比較して大きな差は見られない。

検査回数が少なく, き裂がまったく検出されない場合には, Non-info.では MTBF の推定が困難である。しかし, たとえこのような場合であっても, 破壊試験や類似機器のデータなどから式 (5) を利用して適切に事前分布を与えることにより, MTBF の推定が可能であり, 推定される MTBF の確信区間も狭い。このとき事前分布の Me_α を過大もしくは過小評価しても MTBF の推定結果に生じる誤差は大きくないが, Me_β を過大評価すると特に検査記録が少ない段階で推定される MTBF の確信区間が大きくなりすぎる。

機器の故障率 90% 確信区間上界の経過時間による変動について, Fig. 6, Fig. 7 に示す。Fig. 6 は Me_α の影響を調べるため, Case 2, 5, 8 の結果を図示している。

Fig. 6. Upper bounds of 90% credible interval for hazard rate calculated using Bayesian inference with Case 2, Case 5, and Case 8 prior estimated by simulated data.

Fig. 7. Upper bounds of 90% credible interval for hazard rate calculated using Bayesian inference with Case 4, Case 5, and Case 6 prior estimated by simulated data.

Fig. 7は Me_β の影響を調べるため、Case 4, 5, 6の結果を図示している。事前分布の Me_β の過大、過小評価の故障率推定結果への影響は起動停止回数30回、60回、90回、120回と検査回数の増加につれて小さくなるが、 Me_α の過大・過小評価の故障率推定結果への影響は検査が行われてもあまり小さくならない。

5 考 察

Table VのCase 1～3のように、事前分布の Me_α を正解値より大きく設定した場合には、検査回数が増えても α の誤差はあまり減少しないことから、 Me_α の事前分布の設定がその後のベイズ推定に大きな影響を及ぼすことがわかる。このため、故障率のように α の影響が大きい値のベイズ推定にあたって、根拠のない Me_α の設定は避けなければならない。この意味で Me_α に関する情報が無いときには、特定の Me_α を設定しない、無情報性事前分布を利用すべきである。

一方、MTBFの推定値については、事前分布の Me_α の影響は小さく、 Me_β の影響が大きい傾向があることがFig. 4とFig. 5の比較から分かる。これは式(7)において $\alpha \geq 1$ であれば式(10)が成り立ち、 α がMTBFに与える影響が小さいことによるものと考えられる。 $\alpha \geq 1$ であることは時刻とともに故障率が増大することを意味し、これは疲労寿命の場合に該当する。

$$0.88 < \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \leq 1 \quad (10)$$

このため利用できる検査データが少ない場合には、 Me_β が適切に評価されていれば、式(6)によって事前分布からベイズ推定を行うことでMTBFの確信区間を狭くすることができる。 Me_β の評価が困難である場合、特定の Me_β を設定しない、無情報性事前分布を用いるべきである。これにより、最尤法による推定が困難であるような、検査回数が少ない時点から有効なMTBF推定が行える。ただし利用可能な検査記録が十分に多い場合には、ベイズ推定の優位性は失われ、最尤法による推定で十分である。

6 結 言

疲労き裂検査データから、ベイズ推定によって、疲労き裂発生寿命を推定する方法を検討した。また、実機検査データ、および乱数による仮想的な検査記録を用いて最尤法およびベイズ推定により疲労き裂寿命を推定し、ベイズ推定の最尤法に対する有効性とその範囲を調査した。以下に本研究で得られた結論をまとめる。

(1) 疲労き裂発生寿命を二母数ワイブル分布と仮定し、熱疲労き裂検査記録からベイズ推定を行うことで寿命分布の母数推定が行え、同時にMTBFおよび故障率を求めることができた。検査記録が十分に存在する場合は最尤法を用いることでも同様の推定を行うことができる。

(2) 予め母数に対する情報が特に無い場合には無情報性事前分布からベイズ推定を行うことで、最尤法での推定が難しい、検査回数が少ない状態からでも有効に推定を行うことができる。

(3) ベイズ推定を行う際に、適切に事前分布を与えることができれば、無情報性事前分布では有効に推定が行えないケースであっても、寿命を狭い確信区間で推定することが可能になる。

(4) MTBFを推定する場合は尺度母数に、故障率推定の際には形状母数に不適切な値を事前分布として与えると推定誤差が大きくなる。これらの母数に関する明確な情報が無い場合には無情報性事前分布を用いるべきである。

(5) 検査記録が十分に存在する場合にはベイズ推定の優位性は失われ、最尤法による推定が適切である。

参 考 文 献

- 1) 酒井信介, 金属学会誌, **66**, 1170 (2002).
- 2) 小林英男, 日本機械学会誌, **106**, 846 (2003).
- 3) API Publication 581, Risk-Based Inspection Base Resource Document (2000).
- 4) 市川昌弘, “構造信頼性”, p.160 (1988) 海文堂.
- 5) J. M. Bernardo, A. F. M. Smith, “Bayesian theory”, p.241 (1994) John Wiley.
- 6) 市川昌弘, “信頼性工学”, p.8 (1990) 裳華房.
- 7) 渡辺 洋, “ベイズ統計学入門”, p.14 (1999) 福村出版.
- 8) B. P. Carlin and T. A. Louis, “Bayes and empirical bayes methods for data analysis second edition”, p.17 (2000) Chapman & Hall/CRC.
- 9) D. Sun, J. Statistical Planning and Inference, **61**, 319 (1997).