モードⅢき裂変形様式の応力拡大係数 2 次元解の適用性に関する検討†

橋本 堅一*

Investigation on Utilization of Two-Dimensional Exact Solution for Stress Intensity Factor in Mode III Crack Deformation Mode

by

Ken-ichi HASHIMOTO

The stress intensity factor for the crack under mode III loading in the three dimensional elastic body is analyzed numerically by the finite element method. After obtaining the energy release rates, these energy release rates are converted into stress intensity factors. The method considering the difference of the strain energy between the analysis model and the crack extension model is used for the approach obtained the energy release rate in this study. The ratio of the model width(W), the model thickness(T) and the model length(L) for the basic finite element model are in the ratio 1:1:4. After the analytical accuracy is investigated by three point bending model with the mode I loading, the stress intensity factor for mode III loading is analyzed by the same basic finite element model with the different boundary condition. As a result, the result for mode I loading using the basic model agrees well with the two dimensional analytical solution. However, the result for mode III loading has the some differences for the two dimensional exact solution. Therefore, the numerical analyses of the model with different thicknesses are conducted for mode III loading. As a result of those analyses, it is clear that the numerical results approach the exact solution with the increase of thickness length. That is to say, the model thickness needs about twenty times as long as the model width to obtain the result close to two dimensional exact solution by the three dimensional analysis. However, the model length(L) requires eight times($L=8W$) of the model width(W) in connection with the influence of the boundary condition.

Key words:

Stress intensity factor, Mode III, 3-D analysis, Two dimensional solution, Energy release rate, Strain energy, Finite element method

1 緒 言

面外せん断き裂変形様式(モードⅢ)の応力拡大係数 K_{III} は扱いの容易さもあり, 多くのモデルの厳密解や級数解が 2 次元問題に対して求められている。しかしこれらの解析結果はモードⅠの応力拡大係数 K_I の解析結果が破壊じん性評価に用いられているように使用された実績がなく, 実際はどのような条件の下で利用できるかは明らかでない。3 次元問題を 2 次元問題で近似する方法としては解析面に垂直な方向の応力を零と仮定する平面応力問題, 解析面に垂直な方向のひずみを零(もしくは一定)と仮定する平面ひずみ問題, 回転断面を解析面として扱う軸対称問題などがあり, これらはコンピューターの能力が低い時代に, 弾塑性有限要素解析などのシミュレーションで大きな成果を残してきた。しかし面外せん断問題についてはその有効性を問題にすることの有用性が乏しいこともあり, ほとんど有限要素法による解析例はなく, 実用に値するかどうかの議論さえ行われていない。

本研究ではモードⅢの破壊じん性評価を行うための方法を模索することを目的に 3 次元有限要素解析により 2 次

元問題の応力拡大係数 K_{III} の厳密解の適用性について検討した。モードⅢの応力拡大係数の有限要素 2 次元解析については, 全エネルギー法¹⁾に類似した方法²⁾で 2 次元厳密解とほぼ一致した解が得られている³⁾ので, その方法を拡張した方法を採用した。すなわち, 対称モデルに対して, 微小き裂面積 δA だけき裂面を進展させた微小き裂進展モデルを考え, 両モデルの持つひずみエネルギーの差を用いてエネルギー解放率を求め, 線形弾性体におけるエネルギー解放率と応力拡大係数の関係により応力拡大係数に換算する方法である。

解析の対象としたモデルはき裂面に集中せん断力を受ける片側き裂片⁴⁾である。解の適用性については, 解析面に垂直な方向の長さに対して検討する必要があるが, モデルの長さ方向は厳密解については無限と仮定しているので, その方向に仮定する境界面の影響がないように留意した。

2 面外せん断の仮定とモードⅢき裂先端の応力場

モードⅢのき裂変形様式では Fig.1 に示すようにき裂先端軸方向にき裂面を滑らすように境界条件を設定するも

† 原稿受理 平成 27 年 7 月 16 日 Received July 16, 2015 ©2016 The Society of Materials Science, Japan

* 正 会 員 徳山工業高等専門学校土木建築工学科 〒745-8585 周南市学園台

Dept. of Civil Eng. & Architecture, Tokuyama College, National Institute of Technology, Gakuendai, Syunan 745-8585.

Fig.1 Crack deformation mode of mode III.

$$u=0, \quad v=0, \quad w=w(x, y) \quad (1)$$

ので、これに対して2次元近似での変位は次のように仮定される。ここで、 u, v は解析面 (xy 平面) のき裂面方向およびき裂面に垂直な方向の変位、 w は解析面に垂直な方向の変位である。これに対して、変位とひずみの関係およびHookeの法則は次の関係となる。

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2)$$

応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ および τ_{xy} はすべて零となり、つりあい方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

これを式(2)と組み合わせれば、次の関係が成り立つ。

$$\nabla^2 w = 0 \quad (4)$$

Fig.2 Polar coordinates system in crack tip and stress component for mode III loading.

これらの関係により応力関数とFig.2に示す xy 平面内の極座標を用いて、応力及び変位を求めると、

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \tau_{yz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (5)$$

$$w = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

ここで、 K_{III} はモードⅢき裂変形様式の応力拡大係数、 G はせん断弾性係数である。これらの応力解および変位解は、級数解として求められるが、2項以降の影響が少ないとして、第1項のみ表記している⁵⁾。またこれらの解は無限体内に半無限き裂が存在する場合の解と解釈される。

Fig.3 Stress field near a crack tip line and crack initiation.

これらの応力による破壊を $\theta = 0$ として考えてみると、き裂先端背面の応力場はFig.3の左の正方形のような純粋せん断状態にある。したがって、右の正方形の図のように、き裂先端を表す z 軸から時計と反対回り方向に $\pi/4$ 傾いた方向のき裂面の近傍に、非常に大きな引張応力が作用する。これにより、Fig.3のように、 z 軸から時計回りの方向に $\pi/4$ 傾いたモードⅠの開き裂面ができる。この開口き裂面は、ある一定の間隔を持って観察されるため、エシュロン(雁行)き裂と呼ばれる⁶⁾。Scholzらは、上記のエシュロンき裂の発生後、さらに荷重を大きくするとエシュロンき裂がき裂の面と平行な進展き裂により連結され、せん断過程領域を形成し、最終的には狭い幅の破碎領域となってせん断破壊が生じると述べている⁷⁾。しかし、エシュロンき裂やせん断領域(せん断帯とも呼ばれる)は、実際の断層にもしばしば見られるが、純粋なせん断破壊と思われるせん断き裂やずれ断層も、岩石実験や地表面に数多く観察されている。

以上の議論より、モードⅢき裂の変形様式による破壊は、面外せん断の2次元解析面をもっては扱うことができない。

3 数値解析

3・1 解析モデル

まず、モードⅠき裂変形様式の応力拡大係数を解析した。モデルとしては破壊じん性試験に標準試験法として用いられているFig.4(a)で与えられる3点曲げ供試体モデルを扱った。このモデルで破壊じん性評価に用いられる2次元解⁸⁾の適用性と解析精度を検討した。採用されている3点曲げ供試体の応力拡大係数の2次元表示は

$$K_I = \frac{PS}{BW^{3/2}} f_I \left(\frac{a}{W} \right) \quad (7)$$

ここで、 P ; 評価点での荷重、 S ; 支点間距離、 B ; 供試体厚さ、 W ; 供試体幅(深さ)、 a ; き裂長さ、そして

$$f_I \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{3(a/W)^{1/2} [1.99 - (a/W)(1 - a/W) (2.15 - \frac{3.93a}{W} + 2.7a^2/W^2)]}{2(1 + 2a/W)(1 - a/W)^{3/2}}$$

である。

次にFig.4(b)に示されるモデルを用いてモードⅢき裂変形様式の応力拡大係数の解析を行った。このモデルの提案されている応力拡大係数の2次元解⁹⁾は

Fig.4 Analytical model for three dimensional FEM.

$$K_{III} = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} f_{III} \left(\frac{a}{W} \right) \quad (8)$$

ここで、 W ；供試体幅、 a ；き裂長さ、そして、

$$f_{III} \left(\frac{a}{W} \right) = \sqrt{\frac{\pi a/W}{\sin(\pi a/W)}},$$

である。

Fig.5 Finite element mesh used in this study.

本研究では 3 次元有限要素解析を行うため、最も扱いの容易な 8 節点のアイソパラメトリック立体要素を使用した。この要素の局所座標系は (ξ, η, ζ) であり、座標系の原点は要素の中心である。この要素に対する形状関数は

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad (9)$$

与えられる。

数値解析に用いた 3 次元有限要素分割を Fig.5 に示す。モード I の解析に適用した基本有限要素モデルは x 軸を供試体幅 (W)、 z 軸をモデル厚さ (B)、 y 軸をモデル長さ (L) に沿った軸としてその比を 1:1:4 とした。また、き裂長さ (a) はモデル幅 (W) の 1/2 ($a/W=0.5$) とした。材料定数はヤング率を 200GPa、ポアソン比を 0.3 とし解析している。図中 x 方向中央部に存在する高さの短い要素は微小き裂進展に対応する要素である。解析はモデルの半領域が解析されるため、き裂はモデル中央に位置している。き裂面 (Fig.5 中薄塗の部分) 上部のリガメン

ト領域にモード I モデルの場合には対称境界拘束 (y 方向を拘束) を導入し、モード III モデルには逆対称条件 (z 方向を拘束) を適用した。リガメント領域の下端、すなわち高さの短い要素の底のラインがき裂先端ラインに対応している。载荷に対しては、モード I の場合、リガメント部上部に 3 次元的な等分布荷重 (2 次元の場合は集中荷重) を与え、支点となるもう一方の y 軸に垂直な面の下方の x 方向を拘束した。またモード III についてはき裂面の下部に z 方向の等分布荷重を与えた。モード III の 2 次元厳密解のモデルの y 方向は本来、無限長を仮定して得られているが、求める解が不安定にならないようにき裂面に平行なもう一端の面の節点を 3 方向すべて拘束した。これについては、一列内側の面に同じ拘束を行い、解析結果が変わらないことを確認している。き裂進展モデルは、対象モデルのき裂先端節点の拘束を一つ解除することにより微小き裂進展を表現した。

3・2 解析方法

解析方法としては全エネルギー法^{1),10)}として知られている方法を 3 次元解析に拡張して適用した。すなわち、外力一定のもとでき裂を有する線形弾性体モデルのひずみエネルギーと微小き裂面積 δA を進展させたモデルのひずみエネルギーの変化を δU とすると、エネルギー解放率 $\mathcal{G}$ は次式で表される。

$$\mathcal{G} = \frac{\partial U}{\partial A} \quad (10)$$

エネルギー解放率が求まれば、応力拡大係数とエネルギー解放率は直接関係を持つので、応力拡大係数に換算することが可能である。有限要素法で解析するには、対象とするモデルと微小き裂面積 δA を進展させたモデルの 2 つのモデルの解析が必要となる。線形弾性体のひずみエネルギーを求める方法は二つある。一つは個々の点の弾性ひずみエネルギーを領域全体にわたって積分する方法で、もう一つは外力仕事を計算する方法である。ここでは扱いの容易な方法と考えられる荷重と载荷点変位で求める外力仕事を計算する方法を採用した。

4 解析結果

等方線形弾性体におけるエネルギー解放率の応力拡大係数の関係は、き裂変形様式をモード I とモード III で独立して考えれば次式で与えられる。

$$\mathcal{G}_I = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2, \quad \mathcal{G}_{III} = \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (11)$$

ここで、 $\mathcal{G}$ がエネルギー解放率で K が応力拡大係数である。また E および ν はヤング係数およびポアソン比である。応力拡大係数はこの関係式で求めたものを 2 次元解で除すことによって無次元化して扱った。最初に、モード I の 3 点曲げモデルの解析を行った。微小き裂進展長さの影響を検討するために、高さの短い要素の高さを変化させて、き裂展モデルに対して、自由面の影響が最も出にくい中央部の節点を解除して、応力拡大係数を求めた。解析結果を Fig.6 に示す。横軸の長さは 6 面体の基本有限要素モデルの 1 有限要素の長さを 1 としたときのき裂進展長さ (要素高さ) で、実際にはその要素面積を 2 倍した面積 (1 節点を解放した場合、端部以外では 2 要素分の面積が新しいき裂面になる。) で除してエネルギー解放率を求めている。図

Fig.6 Effect of crack extension length on Mode I numerical analysis result.

Fig.8 Effect of crack extension length on Mode III numerical analysis result.

より、0.1 のき裂進展長さでは 10%以上の誤差をもつが、き裂進展長さを小さくすると、2 次元解析解に近づいていく。そしてき裂進展長さを 0.00001 にしたときは、2 次元解との誤差は 0.3%で一致してくる。しかし、それより小さくすると、ここで用いた形状関数を持つ要素では対応できなくなり、大きな誤差をもつことになる。したがって、微小き裂進展モデルの進展長さについて 0.00001 を採用して、モデルの厚さ方向 (z 方向) の応力拡大係数の変化を検討した。その結果を Fig.7 に示す。横軸はモデル厚さを 1 として示しており、両側の 2 つの評価点以外は拘束を解除した節点の位置が評価点になっている。端部については、節点は解除してもき裂進展面積は 1 要素長さ分の面積にしかならないためその要素の中央を評価点としている。モデル中央の 3 つの評価点は 2 次元解との誤差は 1%未満で一致しているが、それ以外の評価点では自由面に近づくほど誤差が大きくなり、最大で 15%程度の誤差をもつことになる。これらの傾向は破壊じん性試験に見られる中央部からき裂が発生する特性をうまく表現している。

次にモードⅢのモデルを解析した。モードⅠの解析と同じようにまず、自由面の影響が最も出にくい中央部の節点を解除して、き裂進展長さの影響を調査した。モードⅢにおける微小き裂進展長さと応力拡大係数の関係を Fig.8 に示す。ここでは 2 次元解に比べて高い値が解析された。き

Fig.7 Variation of stress intensity factor along crack tip line on mode I numerical analysis result.

裂進展長さを小さくすると一定の値に近づき、進展長さを 0.00001 にすると 0.0001 の解析解とほとんど一致したので、0.00001 の進展長さを用いて、厚さ方向の解析および厚さの影響を検討する解析を行った。厚さ方向の応力拡大係数の変化を調べたものを Fig.9 に示す。中央で最大値を示し、端部に近づくほど小さくなるという傾向としてはモードⅠの場合とよく似ているが、両側の 4 カ所の評価点が著しく小さくなっている。最後に 2 次元解は 3 次元的にはどのようなモデルに対する解を与えるかについて検討を加えるため、厚さ (B) を大きくして解析を加えた。厚さの変化に対しては Fig.5 における z 方向の節点座標を変化させることにより対応した。ここで、厚さを大きくするとき裂面と反対側の拘束の影響が出るため、モデル長さを 2 倍にしたモデル (L=8W ; Fig.4 の y 方向の長さを 2 倍にしている) についても解析を加えた。これらの解析に対する

Fig.9 Variation of stress intensity factor along crack tip line on mode III numerical analysis result.

評価点は応力拡大係数が最大値をとる中央部とした。得られた結果を Fig.10 に示す。●が Fig.5 の有限要素モデル (L=4W) の厚さ変化(z 方向の長さ)を調べたものであり、◇はモデルの長さ (y 方向の長さ) を 2 倍 (L=8W) にして厚さの影響を調べたものである。横軸が 1 のときの ●が Fig.9 の評価点が 0.5 のとき、Fig.8 のき裂長さが 0.00001 のときの値である。厚さを大きくすると 2 次元解に近づいていくのがわかる。ここでモデル幅 1 に対してモデル長さを 4 にした Fig.5 の標準有限要素モデルでは厚さ

Fig.10 Effect of model thickness on mode III numerical analysis result.

を8にすると2次元厳密解を下まわった。これについては前述の2次元解のモデル長さの無限方向に加えた拘束の面積が大きくなったことによる影響と考えられる。それに対して有限要素モデル長さを2倍にした解析では厚さを8にしてもまた2次元解の1に漸近している。この傾向から、厚さを増加させたときの結果から類推すると、厚さを20程度に設定しないと3次元有限要素法解析では2次元解を与えないという結果になる。したがって、今回解析したモデルで破壊じん性試験を行うと仮定すれば、Fig.11に示すような実験を行わなければならない。しかしながら、こういった実験は供試体の支持や載荷等の具体的な方法を考慮すれば非現実的となる。これらのことを考慮すると、薄い厚さの供試体に対して、Fig.10に示した解析で厚さを考慮した応力拡大係数を数値的に求めることが考えられる。これについては今回用いたモデルの長さ方向について2次元厳密解では無限長が仮定されているが、有限要素法ではある限られた領域を解析するため、境界条件を導入しなければならない。その境界条件がうまく採用されていれば、Fig.9中の2本の曲線は一致するはずであるが、差異を生じている。特に、モデル長さの短い方(●の解析)は2次元解を下まわるような傾向を示しており、厚さを増すことで、境界条件である拘束面積が増大してその影響が大きくなったものと考えられる。

Fig.11 Image of fracture toughness test for Mode III using 2-dimensional exact solution.

5 結言

本研究ではモードⅢの破壊じん性評価を行うための方法を模索することを目的に3次元有限要素解析により2次元問題の応力拡大係数 K_{III} の厳密解の適用性について検討してきた。モードⅠの破壊じん性試験では、実際に2次元解が破壊靱性の評価に用いられているし、モードⅡに対しても、2次元解を用いて破壊じん性を評価した多くの報告がある。これに対して今回、これまで2次元で解析されてきた多くのモードⅢき裂変形様式の応力拡大係数を3次元的に用いようとするれば、解析面に対して垂直な方向の厚さをかなり大きくとらないと適用できないことが明らかとなった。そしてそのような実験を行うことは供試体の支持や載荷方法で大きな支障が生じ、非現実的であることも指摘した。

本研究の主な目的は前述のように、モードⅢの破壊じん性評価を行うための方法を模索することである。これについては、モデル自体の選択も考える必要もあるが、解析結果を直線近似して用いる方法もある。そうすると、モデル長さをさらに長くしてみることや、厚さの選択をさらに増やすなど、多くの課題が考えられる。この辺りは、有限要素の特性としてさらに変形に柔軟性を持たせた形状関数を採用するなどを含めて今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) M. Siratori, T. Miyoshi and H. Matsushita, "Computational fracture mechanics", pp.62-63(1980) Jikkyo Syuppan.
- 2) C. Yatom, K. Hashimoto and H. Ishida, "Finite element analysis of the energy release rate for a kinked crack using the E-integral", Lecture Note in Numerical and Applied Analysis, Vol.13, pp.61-74 (1994) Kinokuniya.
- 3) C. Yatom, K. Hashimoto and H. Ishida, "Finite element analysis for energy release rate at the onset of crack kinking under inclined loading using the E-integral", Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.61, No.592, pp.2521-2528 (1995).
- 4) Y. Murakami, "Stress intensity factors handbook", pp.961-962(1987), Pergamon Press.
- 5) H. Okamura, "Introduction to linear fracture mechanics", pp.21-26, pp.200-201(1976).
- 6) C. H. Scholz, "The Mechanics of earthquakes and faulting", 2nd Edition, pp.110-115(2002), Cambridge University Press.
- 7) S. J. D. Cox and C. H. Scholz, "On the formation and growth of faults: An experimental study", Journal of Structural Geology, Vol.10, No.4, pp.413-430(1988).
- 8) J. E. Srawley, "Wide range stress intensity factor expressions for ASTM E399 standard fracture toughness", International Journal of Fracture Mechanics Vol.12, pp.475-476(1976).
- 9) G. C. Sih, "External Cracks under Longitudinal Shear", Journal of the Franklin Institute, Vol. 280, pp.139-149(1965).
- 10) V. B. Watwood Jr., "The finite element method for prediction of crack behavior", Nuclear Engineering and Design, Vol.11, pp.323-332(1969).