Micropolar はりの均質化骨組構造体における巨視的非局所弾性特性†

渋谷 陽二*, ** 浜田 一駿*** 増田 滉也****
田中 展*

Nonlocal Elastic Properties of Homogenized Framework Structures Using Micropolar Beam

by

Yoji SHIBUTANII***, Kazutoshi HAMADA***, Akiya MASUDA****,
and Hiro TANAKA*

The micropolar body with an additional microscopic degree of freedom (DOF) can diversely extend the deformability by modeling the rotational material point instead of the classical rigid one. It contains three DOFs at any point in addition to the macroscopic three DOFs. Based on totally 6 DOFs, two kinds of strain tensors, which total number of components reaches 18, are defined and the conjugate stress and couple stress tensors are obtained via the constitutive laws. In order to make clear of the macroscopic nonlocal elastic properties of micropolar body, two-scale homogenization method based on such microcontinuum theories has been formulated in the finite element method. The orthogonal and oblique lattice framework structures consisting of micropolar beams are analyzed to summarize the size dependence of unit cell. The framework structure consisting of beams, which deformation is expressed by the angle of deflection as well as the deflection, is strongly affected by the surrounding deformation state. Therefore, the beam has been recognized as a pseudo model of nonlocality. The results point out some noticeable facts. First, even if the microscopic framework structure doesn't have any nonlocality, that is, it just contains the conventional local elastic constants, the nonlocal elastic constants of the homogenized macroscopic body exist because the rotation DOF in the microcontinuum is the same dimension as the angle of deflection in beam. Also, the micropolar body clearly illustrates the size effect for the different size of unit cell with providing the micrometer sized characteristic length.

Key words:

Micropolar, Nonlocal property, Two-scale homogenization, Finite element method, Beam, Framework structure

1 緒 言

一般化連続体力学は、1907 年の Cosserrat 弾性体から始まり、極性、非局所性、配置の複雑性、相関性といったミクロスコピックな非均質内部構造の特性を連続体力学の枠組みに取り込む試みとして行われてきた。連続体の任意な物体点の位置のみで力学量が確定する従来の力学モデルに対して、その物体点に付加的な自由度を持たせることで、その拡張を図ってきた。付加的な自由度として、9 自由度の変形勾配テンソルを新たな自由度として与える micropmorphic 体²⁾、回転と体積変化を許容する 4 自由度の microstretch 体³⁾、そして Cosserat モデルに帰着される回転の 3 自由度のみを持つ micropolar 体⁴⁾を定義し、これらをマイクロ連続体の場の理論として体系化したのが Eringen である。⁵⁾

一般に高次勾配理論で記述される非局所性であるが、変位の 2 次勾配項（ひずみの 1 次勾配項）と関連付けられるマイクロ連続体理論も、近似的に物体点近傍の周囲環境に依存した特性として考えられる。本論文では、通

常の古典的な局所理論に対して、マイクロ連続体理論も非局所的性質を表現しうる理論として取り扱う。周囲環境を規定するには長さが必要になり、それが特性長さと定義されるが、そのサイズの規定が問題となる。ただ、この特性長さの存在は、従来の局所連続体力学ではサイズの規定ができなかった不便さを解消してくれる。これまでの数多くの研究から、一般に特性長さは我々が可視化できるサイズに比して十分小さいので、その特性を活かした構造を思い浮かべる困難さがある。⁶⁾ したがって、可視化できるサイズでの非局所性の存在を見出すことが、従来の変形機構や Cauchy 応力ベースの強度概念を大きく変化させる可能性がある。

空隙のないバルク体では物体点での変形自由度の拡張が困難であり、一般にマクロな非局所性は観察されない。空間自由体積を極端に増大させたはりから構成される骨組構造体では、その節の変形自由度に回転の影響が大きく反映され、マクロな非局所性の存在が期待できる。したがって、本論文では微視と巨視のマルチスケール性で

† 原稿受理 令和元年 7 月 10 日 Received July 10, 2019 ©2020 The Society of Materials Science, Japan

* 正 会 員 大阪大学 大学院工学研究科機械工学専攻 〒565-0871 吹田市山田丘
Dept. of Mechanical Eng., Osaka Univ., Suita, Osaka 565-0871.

** 正 会 員 日越大学 ナノテクノロジープログラム ハノイ, ベトナム
Nanotechnology Program, VNU Vietnam Japan Univ., Hanoi, Vietnam.

*** JFEスチール(株), 福山市鋼管町, 〒721-8510 JFE Steel Corp., Koukan-cho, Fukuyama, 721-8510.

**** 大阪大学 大学院工学研究科機械工学専攻 〒565-0871 吹田市山田丘
Dept. of Mechanical Eng., Osaka Univ., Suita, Osaka 565-0871.

微視的視点に不可欠な非局所性をミクロ構造に導入し, micropolar 体のはりで構成される骨組構造をユニットセルとする 2 尺度均質化有限要素法^{7), 8)}により, 巨視的に均質化された連続体の物体点における非局所性の特性を明らかにすることを目的とする.

2 Microcontinuum場の方程式⁵⁾

基準配置における位置ベクトル $\mathbf{X}$ で表される任意な物体点 $\mathbf{P}$ と, 位置ベクトル $\mathbf{X}' (= \mathbf{X} + \boldsymbol{\Xi})$ で表されるその近傍の点 $\mathbf{Q}$ を考える (Fig. 1 参照). 現配置において対応する点 $\mathbf{P}'(\mathbf{x})$ と点 $\mathbf{Q}'(\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})$ を同様に定義し, $\mathbf{PQ}$ 間の相対ベクトルを 2 つの配置でそれぞれ $\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{\xi}$ とする. この時, 現配置での線素 $d\mathbf{x}'$ は次式のように表される.

$$dx'_i = (F_{ij} + \chi_{iK,j} \Xi_K) dX_j + \chi_{ij} d\Xi_j \quad (1)$$

ここで, 大文字は基準配置, 小文字は現配置に関わる添字を表す. $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ は通常のマクロな変形勾配テンソルで, $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ である. なお, t は時刻である. $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ は近傍の点 $\mathbf{Q}$ の変化を考慮した新たな変形勾配テンソルで, ここでは微視的変形勾配テンソルと称する. アフィン変換を仮定し, 微視的変形勾配テンソルの逆テンソルを $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ とする. これらの変形勾配テンソルは, 恒等テンソルと変位勾配テンソル (F_{ij} と $\chi_{iK,j}$ に対してそれぞれ $u_{i,j}$ と ϕ_{iK}) の和として表される. 線素 $d\mathbf{x}'$ のノルム ds' の 2 乗を求めると次式となり,

$$\begin{aligned} (ds')^2 = d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}' = & (F_{iI} F_{iJ} + 2F_{iJ} \chi_{iK,I} \Xi_K \\ & + \chi_{iK,I} \chi_{iN,J} \Xi_K \Xi_N) dX_I dX_J + 2(F_{iI} \chi_{ij} \\ & + \chi_{iJ} \chi_{iK,I} \Xi_K) dX_I d\Xi_j + \chi_{iJ} \chi_{ij} d\Xi_I d\Xi_j \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)と基準配置での線素のノルムの 2 乗 $(dS)^2 (= d\mathbf{X}' \cdot d\mathbf{X}')$ の差を考慮し, 次式に示す 3 種類の Lagrange 表示によるひずみの測度を新たに定義する.⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{IJ} &= F_{iI} \bar{\chi}_{ji} - \delta_{IJ} \approx u_{j,I} - \phi_{jI} \\ e_{IJ} &= \chi_{iI} \chi_{ij} - \delta_{IJ} \approx \phi_{jI} + \phi_{jI} \\ \gamma_{IJK} &= \bar{\chi}_{iI} \chi_{ij,K} \approx \phi_{jI,K} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なお, 式(3)では 2 次以上の項を省略している. 微小ひずみでは添字の区別をする必要がないので, 式(3)から次式のように 3 種類のひずみテンソルを再定義する.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= u_{j,i} - \phi_{ji} \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}(\phi_{ij} + \phi_{ji}) = \phi_{(ij)} \\ \gamma_{ijk} &= \phi_{ij,k} \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

ここで, 式(3)'の e_{ij} は式(3)の第 2 式を 1/2 倍にして, 微視的変位勾配テンソルの対称成分の表示にしている. $\boldsymbol{\chi}$ の微視的変形勾配テンソルを 9 個の自由度として物体点に付加する micromorphic 体, 体積の膨張・収縮と回転成分の 4 自由度とする microstretch 体, そして本論文で取り上げる回転成分 3 自由度のみの micropolar 体に分類され, これらを総称して一連の理論の対象となる連続体は microcontinuum 体と呼ばれている.⁵⁾ したがって, micropolar 体でのひずみテンソルは, 式(3)'における微視

的変位勾配テンソルには反対称成分 $\phi_{[ji]} (= (\phi_{ji} - \phi_{ij})/2)$ しか存在しないので, 次式のように簡略化される.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= u_{j,i} - \phi_{[ji]} = u_{j,i} + \varepsilon_{kji} \tilde{\phi}_k \\ \gamma_{ij} &= \tilde{\phi}_{i,j} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

すなわち, 9 成分のひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ と, 9 成分のひずみテンソル $\boldsymbol{\gamma}$ である. ここで, $\tilde{\phi}$ は反対称テンソル $\phi_{[ji]}$ に双対な回転軸ベクトルを表し, ε_{ijk} は交代記号である. これらに共役な 2 階の応力テンソル $\mathbf{t}$ と偶応力テンソル $\mathbf{m}$ については, ひずみエネルギーの 2 次形式を仮定し, 変分原理に基づき次式のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} t_{ij} &= A_{ijkl} \varepsilon_{kl} + C_{ijkl} \gamma_{kl} \\ m_{ij} &= C_{klj} \varepsilon_{kl} + B_{ijkl} \gamma_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで, 式(5)で定義される弾性定数テンソル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ には, 通常のひずみテンソルの対称性による添字 i と j , k と l の対称性はなく, ひずみエネルギーの 2 次形式から ij と kl の対称性のみとなる. 等方テンソル化した場合, $\mathbf{C}$ は 0 になり, $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ はそれぞれ 3 個の独立したパラメータ λ , μ , κ と α , β , η で次式のように表される.

$$\left. \begin{aligned} t_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + (\mu + \kappa) \varepsilon_{ij} + \mu \varepsilon_{ji} \\ m_{ij} &= \alpha \gamma_{kk} \delta_{ij} + \beta \gamma_{ij} + \eta \gamma_{ji} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

本論文では, 微視的な骨組構造を構成するはりに式(6)の等方性構成関係式を用いる. κ , α , β , η を非局所弾性定数パラメータとするが, ここでは $\beta = \eta = 0$ として κ と α の影響について調査する.

最後に, 平衡方程式は力とモーメントのつりあいから次式のように得られる.

$$\left. \begin{aligned} t_{ji,j} + \rho f_i &= 0 \\ m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} t_{jk} + \rho l_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{in } \mathcal{R} \quad (7)$$

ここで, $\mathbf{f}$ と $\mathbf{l}$ は物体力ベクトルと物体偶力ベクトルであり, 両応力テンソルの $\mathbf{t}$ と $\mathbf{m}$ にはともに対称性はないが, 式(7)を満足することにより角運動量の保存則は保証される.

Fig. 1 Finite deformation of microcontinuum body.

3 2 尺度均質化法

本論文では, 微視と巨視のマルチスケール性を介して巨視的な非局所弾性特性に着目するので, 無限周期を仮

定した構造であり、かつ階層性を表現できるモデルを取り上げる．そのため、micropolar 体の方方程式を導入した 2 尺度均質化法の定式を用いる．^{7)~9)}

Fig. 2 のように、巨視的 micropolar 連続体における領域 (領域: $\mathcal{V}^s$, 表面力規定境界: $\partial\mathcal{V}_t$, $\partial\mathcal{V}_m$, 変位規定境界: $\partial\mathcal{V}_u$, $\partial\mathcal{V}_{\tilde{\phi}}$) の位置ベクトル $\mathbf{x}$ は、任意な物体点 $\mathbf{P}$ を構成するユニットセル $\mathbf{Y}$ の位置ベクトル $\mathbf{y}$ を用いて $\mathbf{y}=\mathbf{s}^{-1}\mathbf{x}$ の関係でスケールされる．

Fig. 2 Two-scale homogenization.

2 章で記載したように、任意な物体点における変形の自由度は、3 成分の変位ベクトル u_i と回転に関する軸ベクトル $\tilde{\phi}_i$ の 3 成分である．これらの変数を次式のように漸近展開する．

$$\begin{aligned} u_i^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + s u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + s^2 u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \\ \tilde{\phi}_i^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \tilde{\phi}_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + s \tilde{\phi}_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + s^2 \tilde{\phi}_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)の展開式を、変位-ひずみ関係式(4)に代入すると、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= u_{j,i}^s + \varepsilon_{kji} \tilde{\phi}_k^s = \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} + s^{-1} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial y_i} \\ &+ s \left(\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} + s^{-1} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial y_i} \right) + \dots + \varepsilon_{kji} \left(\tilde{\phi}_k^{(0)} + s \tilde{\phi}_k^{(1)} + \dots \right) \\ &= s^{-1} \varepsilon_{ij}^{(-1)} + s^0 \varepsilon_{ij}^{(0)} + s^1 \varepsilon_{ij}^{(1)} + O_{\varepsilon_{ij}}(s^2) \\ \gamma_{ij}^s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \tilde{\phi}_{i,j}^s = \frac{\partial \tilde{\phi}_i^{(0)}}{\partial x_j} + s^{-1} \frac{\partial \tilde{\phi}_i^{(0)}}{\partial y_j} \\ &+ s \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_j^{(1)}}{\partial x_i} + s^{-1} \frac{\partial \tilde{\phi}_i^{(1)}}{\partial y_j} \right) + \dots \\ &= s^{-1} \gamma_{ij}^{(-1)} + s^0 \gamma_{ij}^{(0)} + s^1 \gamma_{ij}^{(1)} + O_{\gamma_{ij}}(s^2) \end{aligned} \quad (9)$$

となり、これをつりあい式(7)に代入すると次式となる．

$$\begin{aligned} s^{-2} \frac{\partial t_{ji}^{(-1)}}{\partial y_j} + s^{-1} \left(\frac{\partial t_{ji}^{(-1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial t_{ji}^{(0)}}{\partial y_j} \right) + s^0 \left(\frac{\partial t_{ji}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial t_{ji}^{(1)}}{\partial y_j} + \rho f_i \right) \\ + s^1 \left(\frac{\partial t_{ji}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial t_{ji}^{(2)}}{\partial y_j} \right) + \dots = 0 \quad \text{in } \mathcal{V}^s \\ s^{-2} \frac{\partial m_{ji}^{(-1)}}{\partial y_j} + s^{-1} \left(\frac{\partial m_{ji}^{(-1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial m_{ji}^{(0)}}{\partial y_j} + \varepsilon_{ikl} t_{kl}^{(-1)} \right) \\ + s^0 \left(\frac{\partial m_{ji}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial m_{ji}^{(1)}}{\partial y_j} + \varepsilon_{ikl} t_{kl}^{(0)} + \rho l_i \right) \\ + s^1 \left(\frac{\partial m_{ji}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial m_{ji}^{(2)}}{\partial y_j} + \varepsilon_{ikl} t_{kl}^{(1)} \right) + \dots = 0 \quad \text{in } \mathcal{V}^s \end{aligned} \quad (10)$$

s^{-2} , s^{-1} , s^0 の各オーダーで整理し、それぞれの階層の支配微分方程式として有限要素定式化を行うことになる．

4 Micropolar はりと有限要素定式化

4・1 はりの変位場

本論文では、応力テンソル $\mathbf{t}$ と偶応力テンソル $\mathbf{m}$ を断面において積分した合応力・合偶応力を用いて、通常の Bernoulli-Euler の仮説のもとではりの定式化を行う (Fig. 3 参照)．ただし、micropolar 体に基づくはり (ここでは micropolar はりと称する) では、通常のたわみ角に加えて、中立軸における任意な点で 3 つの micropolar 体の回転軸ベクトルが新たに変位場の式に加わる．すなわち、はりの任意な位置での変位 (u, v, w) は次式となる．

$$\begin{aligned} u &= u_0(x) - y \left(\frac{dv_0(x)}{dx} + \tilde{\phi}_z(x) \right) - z \left(\frac{dw_0(x)}{dx} - \tilde{\phi}_y(x) \right), \\ v &= v_0(x) - z \theta_x(x), \\ w &= w_0(x) + y \theta_x(x) \end{aligned} \quad (11)$$

ここでは、 x 軸まわりの回転角については $\theta_x = \tilde{\phi}_x$ としている．micropolar 体の新たな 3 つの回転の自由度の取り込み方には任意性がある．本論文では、micropolar 体の回転軸ベクトルであっても、通常のたわみ角と同様に中立軸上の物体点での角度変化により変位は生じるので、それらを足し合わせることを自然な考えとした．¹⁰⁾ しかし、このことは、同時に均質化された巨視的な micropolar 体において、微視的骨組構造体を構成する micropolar はりのたわみ角と付加自由度との区別化が困難になるが、この特性を活用する方法も考えられる．例えば、Eringen が局所弾性力学の骨組構造から非局所弾性定数を推定していることはよく知られている．¹¹⁾ これは、この特性を用いて非局所弾性定数を同定していることになり、骨組構造特有の適用と言える．

Fig. 3 Angle of deflection and additional rotation in micropolar beam.

Bernoulli-Euler の仮説を用いる一方、micropolar 体での回転角が導入されるため、Timoshenko はりのように t_{xy} , t_{xz} および t_{yx} , t_{yz} は 0 にならず、それ以外の成分は 0 である．また、曲げ応力 t_{xx} と線ひずみ ε_{xx} の比例定数であるヤング率 E^* は、式(6)の構成関係式から次式のように表される．

$$t_{xx} = E^* \varepsilon_{xx}, \quad E^* = \frac{(2\mu + \kappa)(3\lambda + 2\mu + \kappa)}{2\lambda + 2\mu + \kappa} \quad (12)$$

式(12)において $\kappa=0$ を代入すれば、通常の局所線形弾性力学におけるヤング率とラーメの定数の関係式が得られる．

4・2 有限要素定式化

1 次多項式の内挿関数を用いて, 長さ l で両端を 1 と 2 の節点番号を持つはり要素の変位場 $\mathbf{u}^e$ が, 節点変位 $\mathbf{d}^e$ と形状関数 $\mathbf{N}^e$ から次式のように表される.

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e \quad (13)$$

ここで, 節点変位 $\mathbf{d}^e$ は次式の 12 成分を持つ.

$$\mathbf{d}^e = \{u_1, v_1, w_1, \tilde{\phi}_{x1}, \tilde{\phi}_{y1}, \tilde{\phi}_{z1}, u_2, v_2, w_2, \tilde{\phi}_{x2}, \tilde{\phi}_{y2}, \tilde{\phi}_{z2}\}^T \quad (14)$$

ここで, $\{\}^T$ は転置を表す. 式(14)の節点変位ベクトルを用いて, 式(4)の変位-ひずみ関係式が $\mathbf{B}$ マトリクスにより次式のように表される.

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^e &= \mathbf{B}_u^e \mathbf{d}^e, \\ \boldsymbol{\gamma}^e &= \mathbf{B}_\phi^e \mathbf{d}^e \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ と $\boldsymbol{\gamma}^e$ は,

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^e &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}\}^T, \\ \boldsymbol{\gamma}^e &= \{\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}, \gamma_{zx}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yx}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

のそれぞれ 9 成分である. $\mathbf{B}$ マトリクスの詳細は付録を参照するとよい. 応力-ひずみ関係を表す $\mathbf{D}$ マトリクスも同様に,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}^e &= \mathbf{D}_u^e \boldsymbol{\varepsilon}^e, \\ \mathbf{m}^e &= \mathbf{D}_\phi^e \boldsymbol{\gamma}^e \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここで, $\mathbf{t}^e$ と $\mathbf{m}^e$ は,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}^e &= \{t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{zy}, t_{zx}, t_{xz}, t_{xy}, t_{yx}\}^T, \\ \mathbf{m}^e &= \{m_{xx}, m_{yy}, m_{zz}, m_{yz}, m_{zy}, m_{zx}, m_{xz}, m_{xy}, m_{yx}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

のそれぞれ 9 成分である. $\mathbf{D}$ マトリクスの詳細も付録を参照するとよい.

これらの関係式を用いて, 境界上の表面力 $\mathbf{T}^e$ と表面偶力 $\mathbf{M}^e$ が仮想変位 $\delta \mathbf{u}^e$ と $\delta \tilde{\phi}^e$ についてなす仮想仕事の原理式より, 次式が得られる.

$$\int_Y t_{ij}^e \delta \varepsilon_{ij}^e dV + \int_Y m_{ij}^e \delta \gamma_{ij}^e dV = \int_{\partial Y_t} T_i^e \delta u_i^e dS + \int_{\partial Y_m} M_i^e \delta \tilde{\phi}_i^e dS \quad (19)$$

これから, 要素剛性行列 $\mathbf{K}^e$ を次式のように求めることができる.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e &= \mathbf{F}^e, \\ \mathbf{K}^e &= \int_Y \left\{ (\mathbf{B}_u^e)^T \mathbf{D}_u^e \mathbf{B}_u^e + (\mathbf{B}_\phi^e)^T \mathbf{D}_\phi^e \mathbf{B}_\phi^e \right\} dV \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで, $\mathbf{F}^e$ は $\mathbf{T}^e$ と $\mathbf{M}^e$ を合わせた節点力ベクトルである. 各要素の剛性行列を座標変換し, 全体剛性行列を求めて解を得ることになる.

4・3 Y-周期境界条件とマクロ単位ひずみの付与

式(20)に基づく要素剛性行列を重ね合わせた全体剛性方程式 $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$ を, 下付添字 1: ユニットセルにおいて原点を含む境界上の節点, 添字 2: 境界を含まない領域内の節点, 添字 3: ユニットセルを $\mathbf{Y}$ だけ並進させた境界上の節点の 3 種類に分類する.¹²⁾ Y-周期性を拘束するための条件として, 次式を用いる.

$$\mathbf{q} = \mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_1 = \{\nabla_x \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}); \nabla_x \tilde{\phi}^{(0)}(\mathbf{x})\} \cdot \mathbf{Y} \quad (21)$$

ここで, $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x})$ および $\tilde{\phi}^{(0)}(\mathbf{x})$ は漸近展開された 0 次オーダーのマクロ変位ベクトル ($\mathbf{U}(\mathbf{x})$) とマクロな回転軸ベクトル ($\tilde{\phi}(\mathbf{x})$) であり, 本論文では均質化弾性定数を求めるために, マクロな単位ひずみに相当する変位勾配をユニットセルの境界条件として与える. 境界 $\partial \mathbf{Y}$ 上のつりあいから $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}$ となることから, 全体剛性方程式は次式に帰着される.

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{31} + \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{32} \\ \mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{13} + \mathbf{K}_{33}) \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{K}_{23} \cdot \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (22)$$

式(22)の連立方程式を解き, 境界 $\partial \mathbf{Y}$ 上の節点 k で得られた表面力 $\mathbf{T}_k$ と表面偶力 $\mathbf{M}_k$ から, 次式によりユニットセル全体で体積平均された応力テンソルと偶応力テンソルが得られる.

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathbf{t} \rangle &= \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \sum_{k \in \partial \mathbf{Y}} \mathbf{y}_k \otimes \mathbf{T}_k, \\ \langle \mathbf{m} \rangle &= \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \sum_{k \in \partial \mathbf{Y}} \mathbf{y}_k \otimes \mathbf{M}_k \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここで, $\otimes$ はテンソル積を表す. Fig. 2 のマクロな連続体の任意な物体点における micropolar 体のひずみ $\mathbf{E}$ と $\boldsymbol{\Gamma}$ (式(4)に相当するマクロ側でのひずみテンソルを表す) の 18 成分の単位ひずみに対してユニットセルの変形応答を求め, 有限要素解析から得られる式(23)の平均化された応力テンソルおよび偶応力テンソルと異方性構成関係式(5)から, 均質化弾性定数 $\mathbf{A}^H$, $\mathbf{B}^H$, $\mathbf{C}^H$ を求めることができる. ミクロなユニットセルでは式(6)の等方化された構成式を用いるが, 構造の異方性からマクロな構成式は異方性構成式(5)となる.

ユニットセル全体に対して, $\mathbf{E}_{ij} = 1.0$ を与えるには $U_{j,i} = 1.0$ の変位勾配を ($\Gamma_{ij} = 0$ より $\tilde{\phi}_i = \text{const.}$ となり, 一般性を失うことなく $\tilde{\phi}_i = 0$ とする), $\Gamma_{ij} = 1.0$ を与えるには $\tilde{\phi}_{i,j} = 1.0$ の回転軸ベクトルの勾配を境界条件として与えることになる.

5 Micropolar はりの骨組構造体の解析

5・1 解析モデルと解析条件

本手法の適用例として, ユニットセルとなる micropolar はりで構成される解析モデルには Fig. 4 のような対称性の高い直交格子 (Fig. 4(a)) と, 角度の変化が構造体の弾性特性に大きく影響を与える対角斜交格子 (Fig. 4(b)) の 2 種類を用いる.

まず, Fig. 4(a)の直交格子モデルについては, Fig. 5 のように Fig. 4(a)と同じサイズのモデルを 3 軸方向に 2 倍, 3 倍にしたモデルをユニットセルとして用い, サイズ効果の検討を行った. はりのラーメの定数を $\lambda = 76.7$ GPa, $\mu = 83.1$ GPa (ヤング率 $E = 206$ GPa, ポアソン比 $\nu = 0.24$), 直径を $d = 10$ μm , ユニットセルのサイズを $L_x = 110$ μm , $L_y = 100$ μm , $L_z = 90$ μm とした. 用いた要素分割の総節点数は 121, 総要素数は 120 である.

(a) Orthogonal lattice

(b) Oblique lattice

Fig. 4 Two kinds of framework structures employed in the present analyses.

Fig. 5 Models for size effect of orthogonal lattice structure.

つぎに、Fig. 4(b)の対角斜交格子モデルについてである。Fig. 6 に示した幾何学パラメータ間には次式の関係式がある。¹³⁾

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 &= 1, \\ \tan \theta_1 &= \frac{\cos \gamma_2}{\cos \gamma_3}, \quad \tan \theta_2 = \frac{\cos \gamma_3}{\cos \gamma_1}, \quad \tan \theta_3 = \frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2}, \\ L_x &= 2L \cos \gamma_1, \quad L_y = 2L \cos \gamma_2, \quad L_z = 2L \cos \gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Fig. 6 Geometric parameters describing the size of oblique lattice structure.

このとき、各角度のとりうる範囲は、 $0 < \theta_i < \pi/2$ 、 $0 < \gamma_i < \pi/2$ ($i=1,2,3$) である。はりのラーメの定数を $\lambda=80.8$ GPa, $\mu=53.8$ GPa (ヤング率 $E=140$ GPa, ポアソン比 $\nu=0.3$)、直径を $d=200$ μm 、ユニットセルのサイズを $L=2.5$ mm とした。用いた要素分割の総節点数は 161、総要素数は 160 である。本モデルは参考文献 13) と同一条件であり、文献 13) の Table 1 に記載されている 9 種類の角度のモデルのうち 6 種類に対して本解と比較した。文献 13) は通常のはり理論を用いて解析的に求めたものであり、本解のモデルとは異なり直接の比較はできないが、本手法で得られた弾性定数値の確認のための参照解になる。非局所弾性定数パラメータをすべて 0 にした結果との比較から、各軸方向のヤング率については 2% 弱、ポアソン比については 1% 弱程度の違いであり、比較対称性の高い構造については両者の違いはあまりないと言える。

対角斜交格子の場合、角度の変化により格子構造全体のヤング率やポアソン比の弾性特性が大きく変化する。そのポアソン比の変化を表したのが Fig. 7 である。 $\theta_1=\pi/3$ に固定し、 θ_2 を 0 から $\pi/2$ まで変化させた(図中では 0 から 2π まで示している)。 $\theta_2=0$ では Fig. 6 の幾何形状より求めたひずみ $\varepsilon_x=0$ となるため $\nu_{xy}=-\varepsilon_y/\varepsilon_x$ は ∞ となり、 $\theta_2=\pi/2$ では 0 になる。

Fig. 7 Change of Poisson ratio dependent to the angle θ_2 .

5・2 巨視的非局所弾性特性

(a) 直交格子構造の場合 Fig. 5 の $L_x \times L_y \times L_z$ のユニットセルの場合について、4・3 節に基づき 0 次オーダーのマクロな 18 個の単位ひずみに相当する変位勾配をユニットセルに負荷したときのはりの変形を拡大して示した一部が Fig. 8 である。式(6)の非局所弾性定数パラメータをすべて 0 にした局所はりを用いて、均質化された解としての変形後のはりを点線で示している。 E_{ij} のひずみは、通常のひずみと同じ引張りやせん断の変形挙動を示している。micropolar 体の回転の自由度を付加することにより生じる Γ_{ij} については、例えば $i \neq j$ で第 1 添字 i 軸周りに第 2 添字の j 軸方向の微小要素を曲げる変形挙動であることがわかる。9 成分のひずみテンソルなので、添字の順番が反対の場合には異なる変形モードとなる。したがって、局所弾性力学と異なる点は、9 成分のひずみを組み合わせることにより非対称モードの表現に適用性が高く、多様な変形様式の実現が従来の局所力学よりも可能であることを示唆している。

つぎに、非局所弾性定数について示す。Fig. 5 の 3 種類のユニットセルに対して、ラーメの定数 λ と μ は前述した値を持ち、(i) α, β, η は 0 として、 κ のみ μ との比を 0 から 1 まで変化させた。 $\mathbf{C}^H$ は構造対称性から 0 になり、 $\mathbf{A}^H$ と $\mathbf{B}^H$ のノルムの変化を示したのが Fig. 9(a) と (b) である。この条件では式(6)、(7)そして式(4)よりミクロなはりの付加自由度 $\tilde{\phi}$ は常に 0 になるが、4・1 節で述べたようにたわみ角と付加自由度の区別ができないことから、均質化された非局所弾性定数は 0 でないことがわかる。また、(ii) β, η, κ は 0 として、 α のみ $\mu \mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$ ははりの断面積) との比を 0 から 1 まで変化させたときの $\mathbf{A}^H$ と $\mathbf{B}^H$ のノルムの変化を示したのが Fig. 10(a) と (b) である。 $\mathbf{A}^H$ については、式(5)

Fig. 8 Deformation behaviors according to each macroscopic unit strain component.

より変位の 1 次勾配に対応する項（ひずみの項）であるが、式(4)より付加自由度 $\tilde{\phi}$ の効果を含む。しかし計算結果より、均質化された構造においては付加自由度 $\tilde{\phi}$ の影響がほとんど寄与せず、Fig. 9(a)と Fig. 10(a)よりサイズ依存性がない。一方、変位の 2 次勾配項（ひずみの 1 次項）に対応する $\mathbf{B}^H$ については、Fig. 9(b)と Fig. 10(b)よりサイズ効果が明確に存在している。また、Fig. 10(a)より、 α は $\mathbf{A}^H$ にほとんど影響を与えていないことがわかる。これは、式(6)より $\alpha(\neq 0)$ の項 $\gamma_{kk} = \tilde{\phi}_{k,k}$ の変化量が極めて小さく、式(4)の $\tilde{\phi}$ の項にほとんど寄与していないと考えられる。

Fig. 9 Change of nonlocal elastic properties according to κ .

Fig. 10 Change of nonlocal elastic properties according to α .

次式のように $\mathbf{A}^H$ と $\mathbf{B}^H$ のノルムの比の平方根は長さの次元となり、これを特性長さ l と定義する。⁶⁾

$$l = \sqrt{\|\mathbf{B}^H\| / \|\mathbf{A}^H\|} \quad (25)$$

上記の(i)の場合について、その変化を示したのが Fig.

11(a)である。図中には Fig. 5 のサイズの異なる 3 ケースについて示しており、 $\mathbf{A}^H$ についてはサイズ依存性がなく、 $\mathbf{B}^H$ については存在し、その結果式(25)の特性長さがサイズ依存性を表している。また、特性長さの大きさは 10 数 μm のオーダーであり、原子格子構造の特性長さを調べた例 6)に比して十分大きな値となり、適切な計測方法が提案できれば可観測な値である。

直交異方性の弾性定数テンソルに対して、単軸応力状態を仮定した i 軸方向のヤング率 E_i とポアソン比 ν_{ij} は、均質化弾性定数 $\mathbf{A}^H$ とそのコンプライアンステンソル $\mathbf{S}^H$ を用いて次式で表される。以降の解析結果は、これらの特性値を用いて整理される。

$$\begin{aligned} E_x^{-1} &= \frac{A_{22}^H A_{33}^H - A_{23}^H A_{32}^H}{\Delta}, \\ E_y^{-1} &= \frac{A_{33}^H A_{11}^H - A_{31}^H A_{13}^H}{\Delta}, \\ E_z^{-1} &= \frac{A_{11}^H A_{22}^H - A_{12}^H A_{21}^H}{\Delta} \end{aligned} \quad \Delta = \det \begin{bmatrix} A_{11}^H & A_{12}^H & A_{13}^H \\ A_{21}^H & A_{22}^H & A_{23}^H \\ A_{31}^H & A_{32}^H & A_{33}^H \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\nu_{ij} = -\frac{S_{ij}^H}{S_{ii}^H}, \quad \mathbf{S}^H = (\mathbf{A}^H)^{-1} \quad (27)$$

ここで、弾性定数やコンプライアンスは Voigt 表記で表され、式(27)は総和規約を用いず成分を表す。

非局所弾性定数のパラメータを(i)のケース、すなわち α, β, η をすべて 0 にして、 κ のみ 0 から μ と同値まで変化させたときの Fig. 5 の $L_x \times L_y \times L_z$ モデルにおけるヤン

(a) Characteristic length l

(b) Young's modulus

Fig. 11 Change of characteristic length and Young's modulus according to κ .

グ率の変化が Fig. 11(b)である。変化率については、後出の対角斜交格子の結果と合わせて述べる。

(b)対角斜交格子の場合 $\theta_1=0.9429$ rad, $\theta_2=1.046$ rad, $\theta_3=0.3979$ rad の形状に対して、非局所弾性定数パラメータ(i)のケースで、 κ/μ についてのみ 0 から 1 まで変化させたときの特性長さ l 、ヤング率 E_i としてポアソン比 ν_{ij} の変化を示したのがそれぞれ Fig. 12(a), (b)と(c)である。Fig. 12(a)より、直交格子と同様に κ が 0 の場合を含めて非局所性を表す特性長さが存在し、Fig. 11(a)と合わせると構造にかかわらず $\kappa/\mu=0.5$ 程度以上になるとあまり変化を示さなくなる。骨組構造は異なるが同じ非局所弾性定数パラメータ κ によるヤング率の変化を示した Fig. 11(b)と Fig. 12(b)の比較より、対角斜交格子の場合には

(a) Characteristic length

(b) Young's modulus

(c) Poisson's ratio

Fig. 12 Change of characteristic length, Young's modulus and Poisson's ratio according to κ .

κ を大きくするほどヤング率の増加率は著しく大きい。また、ポアソン比に対する影響を調べた Fig. 12(c)より、 κ を大きくすれば異方性比をより小さくし等方化する傾向にある。

6 結 言

micropolar 体の場の理論を用いてはりの変形場を表し、そのはりから構成された骨組構造をユニットセルとした 2 尺度均質化有限要素法により解析することで、巨視的な非局所弾性特性について検討した。直交格子と対角斜交格子の 2 種類の骨組構造を対象に、均質化された弾性定数を求めた。その結果、以下のことが得られた。

(1)ユニットセル内のマイクロ構造が非局所弾性定数を持たずに通常の局所弾性定数のみでも、巨視的な非局所弾性定数は存在する。これは、はりのたわみ角と micropolar 体の付加自由度である回転軸ベクトルを区別しないことにより生じることで、はり特有の性質と言える。

(2)micropolar はりの骨組構造体では、明確なサイズ効果を示し、特性長さは可観測な大きさとなるが、単調増加ではなくほぼ一定になる傾向を持つ。

(3)従来の 6 成分に比して micropolar 体の 18 成分のひずみにより、均質化法により求められた巨視的な物体点において多様な変形様式が表現可能となる。また、ユニットセル内の骨組構造を種々に創出し、そのはりの非局所弾性定数を変化させることにより、剛性を大きく変化させたり、巨視的な変形様式を等方化傾向にしたりすることのできる可能性がある。

付 録

4章の変位-ひずみ関係式(15)の B マトリクスの成分は下記のとおりである。

$$B_u = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & 0 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 & 0 & B_9 & B_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{11} & 0 & B_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{13} & 0 & B_{14} & 0 \\ 0 & 0 & B_{15} & B_{16} & B_{17} & 0 & 0 & 0 & B_{18} & B_{19} & B_{20} & 0 \\ 0 & B_{21} & 0 & B_{22} & 0 & B_{23} & 0 & B_{24} & 0 & B_{25} & 0 & B_{26} \\ 0 & B_{27} & 0 & 0 & 0 & B_{28} & 0 & B_{29} & 0 & 0 & 0 & B_{30} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{l}, \quad B_2 = -\frac{\{12(A\kappa + \alpha_y)x - 6Al\kappa - 6l\alpha_y\}y}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_y + l^3\alpha_y}, \\ B_3 &= -\frac{\{12(A\kappa + \alpha_z)x - 6Al\kappa - 6l\alpha_z\}z}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_z + l^3\alpha_z}, \\ B_4 &= \frac{(6\alpha_zx - Al\kappa - 2l\beta_z - 4l\alpha_z)z}{Al^2\kappa + 2l^2\beta_z + l^2\alpha_z}, \quad B_5 = -\frac{(6\alpha_yx - Al\kappa - 2l\beta_y - 4l\alpha_y)y}{Al^2\kappa + 2l^2\beta_y + l^2\alpha_y}, \\ B_6 &= \frac{1}{l}, \quad B_7 = \frac{\{12(A\kappa + \alpha_y)x - 6l(A\kappa + \alpha_y)\}y}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_y + l^3\alpha_y}, \\ B_8 &= \frac{\{12(A\kappa + \alpha_z)x - 6l(A\kappa + \alpha_z)\}z}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_z + l^3\alpha_z}, \quad B_9 = \frac{(6\alpha_zx + Al\kappa + 2l\beta_z - 2l\alpha_z)z}{Al^2\kappa + 2l^2\beta_z + l^2\alpha_z}, \\ B_{10} &= -\frac{(6\alpha_yx + Al\kappa + 2l\beta_y - 2l\alpha_y)y}{Al^2\kappa + 2l^2\beta_y + l^2\alpha_y}, \\ B_{11} &= -\frac{6(A\kappa + \alpha_z)x^2 - 6l(A\kappa + \alpha_z)x - 2l^2\beta_z}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_z + l^3\alpha_z}, \\ B_{12} &= \frac{3\alpha_z(A\kappa + \alpha_z)x^2 - 2\alpha_zl(2A\kappa + 2\alpha_z + \beta_z)x + Al^2\alpha_z\kappa + l^2\alpha_z\beta_z + l^2\alpha_z^2}{A^2l^2\kappa^2 + 2Al^2(\alpha_z + \beta_z)\kappa + 2l^2\alpha_z\beta_z + l^2\alpha_z^2}, \\ B_{13} &= \frac{6(A\kappa + \alpha_z)x^2 - 6l(A\kappa + \alpha_z)x - 2l^2\beta_z}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_z + l^3\alpha_z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{14} &= \frac{3\alpha_z(A\kappa + \alpha_z)x^2 - 2\alpha_z l(2A\kappa + 2\alpha_z - \beta_z)x - l^2\alpha_z\beta_z}{A^2l^2\kappa^2 + 2Al^2(\alpha_z + \beta_z)\kappa + 2l^2\alpha_z\beta_z + l^2\alpha_z^2}, \\
B_{15} &= \frac{6(A\kappa + \alpha_z)x^2 - 6l(A\kappa + \alpha_z)x - 4l^2\beta_z}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_z + l^3\alpha_z}, \quad B_{16} = -\frac{\gamma}{l}, \\
B_{17} &= -\frac{3\alpha_z(A\kappa + \alpha_z)x^2 + l(A^2\kappa^2 + A(2\beta_z - 3\alpha_z)\kappa - 2\alpha_z\beta_z - 4\alpha_z^2)x}{A^2l^2\kappa^2 + 2Al^2(\alpha_z + \beta_z)\kappa + 2l^2\alpha_z\beta_z + l^2\alpha_z^2} \\
&\quad - \frac{A^2l^2\kappa^2 - 2Al^2\beta_z\kappa + l^2\alpha_z^2}{}, \\
B_{18} &= -\frac{6(A\kappa + \alpha_z)x^2 - 6l(A\kappa + \alpha_z)x - 4l^2\beta_z}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_z + l^3\alpha_z}, \quad B_{19} = \frac{\gamma}{l}, \\
B_{20} &= -\frac{3\alpha_z(A\kappa + \alpha_z)x^2 - l(A^2\kappa^2 + A(2\beta_z + 3\alpha_z)\kappa - 2\alpha_z\beta_z + 2\alpha_z^2)x - 2l^2\alpha_z\beta_z}{A^2l^2\kappa^2 + 2Al^2(\alpha_z + \beta_z)\kappa + 2l^2\alpha_z\beta_z + l^2\alpha_z^2}, \\
B_{21} &= \frac{6(A\kappa + \alpha_z)x^2 - 6l(A\kappa + \alpha_z)x - 4l^2\beta_z}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_z + l^3\alpha_z}, \quad B_{22} = \frac{z}{l}, \\
B_{23} &= \frac{3\alpha_y(A\kappa + \alpha_y)x^2 + l(A^2\kappa^2 + A(2\beta_y - 3\alpha_y)\kappa - 2\alpha_y\beta_y - 4\alpha_y^2)x}{A^2l^2\kappa^2 + 2Al^2(\alpha_y + \beta_y)\kappa + 2l^2\alpha_y\beta_y + l^2\alpha_y^2} \\
&\quad - \frac{A^2l^2\kappa^2 - 2Al^2\beta_y\kappa + l^2\alpha_y^2}{}, \\
B_{24} &= -\frac{6(A\kappa + \alpha_y)x^2 - 6l(A\kappa + \alpha_y)x - 4l^2\beta_y}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_y + l^3\alpha_y}, \quad B_{25} = -\frac{z}{l}, \\
B_{26} &= \frac{3\alpha_y(A\kappa + \alpha_y)x^2 - l(A^2\kappa^2 + A(2\beta_y + 3\alpha_y)\kappa - 2\alpha_y\beta_y + 2\alpha_y^2)x - 2l^2\alpha_y\beta_y}{A^2l^2\kappa^2 + 2Al^2(\alpha_y + \beta_y)\kappa + 2l^2\alpha_y\beta_y + l^2\alpha_y^2}, \\
B_{27} &= -\frac{6(A\kappa + \alpha_y)x^2 - 6l(A\kappa + \alpha_y)x - 2l^2\beta_y}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_y + l^3\alpha_y}, \\
B_{28} &= -\frac{3\alpha_y(A\kappa + \alpha_y)x^2 - 2l\alpha_y(2A\kappa + \alpha_y\beta_y + 2\alpha_y)x}{A^2l^2\kappa^2 + 2Al^2(\alpha_y + \beta_y)\kappa + 2l^2\alpha_y\beta_y + l^2\alpha_y^2} \\
&\quad + \frac{l^2\alpha_y(A\kappa + \beta_y + \alpha_y)}{}, \\
B_{29} &= \frac{6(A\kappa + \alpha_y)x^2 - 6l(A\kappa + \alpha_y)x - 2l^2\beta_y}{Al^3\kappa + 2l^3\beta_y + l^3\alpha_y}, \\
B_{30} &= -\frac{3\alpha_y(A\kappa + \alpha_y)x^2 - 2l\alpha_y(A\kappa - \beta_y + \alpha_y)x - l^2\alpha_y\beta_y}{A^2l^2\kappa^2 + 2Al^2(\alpha_y + \beta_y)\kappa + 2l^2\alpha_y\beta_y + l^2\alpha_y^2}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

ここで,

$\alpha_y = (\mu + \kappa)A = \alpha_z$, $\beta_y = 6E^*I_y / l^2$, $\beta_z = 6E^*I_y / l^2$
 であり, E^* は式(12)である. また, I_y と I_z は, それぞれ y 軸
 と z 軸周りのはりの断面二次モーメントである. そして,

$$B_{\phi}^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & B_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{36} & 0 \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
B_{31} &= -\frac{1}{l}, \quad B_{32} = \frac{1}{l}, \quad B_{33} = -\frac{A\kappa(A\kappa + \alpha_y + 2\beta_y)}{A^2l\kappa^2 + 2Al(\alpha_y + \beta_y)\kappa + 2l\alpha_y\beta_y + l\alpha_y^2}, \\
B_{34} &= \frac{A\kappa(A\kappa + \alpha_y + 2\beta_y)}{A^2l\kappa^2 + 2Al(\alpha_y + \beta_y)\kappa + 2l\alpha_y\beta_y + l\alpha_y^2}, \\
B_{35} &= -\frac{A\kappa(A\kappa + \alpha_z + 2\beta_z)}{A^2l\kappa^2 + 2Al(\alpha_z + \beta_z)\kappa + 2l\alpha_z\beta_z + l\alpha_z^2}, \\
B_{36} &= \frac{A\kappa(A\kappa + \alpha_z + 2\beta_z)}{A^2l\kappa^2 + 2Al(\alpha_z + \beta_z)\kappa + 2l\alpha_z\beta_z + l\alpha_z^2}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

同様に, 応力-ひずみ関係式(17)の $\mathbf{D}$ マトリクスの成分
 は以下のとおりである.

参 考 文 献

1) E. Kröner, "Interrelations between various branches of
 continuum mechanics", IUTAM Symposium, Mechanics
 of Generalized Continua, Ed. E. Kröner, pp.330 (1968)
 Springer-Verlag.

$$D_{\alpha}^c = \begin{bmatrix} E^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa + \mu & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \kappa + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa + \mu & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \kappa + \mu \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

そして,

$$D_{\phi}^c = \begin{bmatrix} \alpha + \beta + \eta & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha + \beta + \eta & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha + \beta + \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \beta \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

- 2) A. C. Eringen and E. S. Suhubi, "Nonlinear theory of
 simple microelastic solids I & II", International Journal of
 Engineering Science, Vol.2, pp.189-203 & 389-404 (1964).
- 3) A. C. Eringen, "Theory of thermo-microstretch elastic
 solids", International Journal of Engineering Science,
 Vol.28, pp.1291-1301 (1990).
- 4) C. B. Kafadar and A. C. Eringen, "Micropolar media – I
 the classical theory", International Journal of
 Engineering Science, Vol.9, pp.271-305 (1971).
- 5) A. C. Eringen, "Microcontinuum Field theory", (1998)
 Springer.
- 6) Y. Shibutani, V. Vitek and J. L. Bassani, "Nonlocal
 properties of inhomogeneous structures by linking
 approach of generalized continuum to atomistic model",
 International Journal of Mechanical Sciences, Vol.40,
 Nos.2-3, pp.129-137 (1998).
- 7) G. Allaire, "Mathematical approaches and methods in
 homogenization and porous media", Ed. U. Hornung,
 pp.225-250 (1996) Springer, New York.
- 8) K. Terada and N. Kikuchi, "A class of general algorithm
 for nonlinear multi-scale analyses for heterogeneous
 media", Computer Methods in Applied Mechanics and
 Engineering, Vol.190, pp.5427-5464 (2001).
- 9) A. Satou, T. Yamada, K. Izumi, S. Nishiwaki and K.
 Terada, "Homogenization method for micropolar elastic
 bodies", Proceedings of the conference on computational
 engineering and science, Vol.19 (2014) in Japanese.
- 10) S. Ramezani, R. Naghdabadi and S. Sohrabpour,
 "Analysis of micropolar elastic beams", European Journal
 of Mechanics A/Solids, Vol.28, pp.202-208 (2009).
- 11) Ref. 5), pp.160.
- 12) I. Saiki, K. Ooue, A. Nakajima and K. Terada,
 "Multi-scale modeling for microstructures with structural
 elements and its applications to cellular solids",
 Transactions of JSCES, Vol.2002, p.20020004 (2002) in
 Japanese.
- 13) K. Ushijima, W. J. Cantwell and D. H. Chen, "Prediction
 of the mechanical properties of micro-lattice structures
 subjected to multi-axial loading", International Journal of
 Mechanical Sciences, Vol.68, pp.47-55 (2013).