材料強度・構造強度・災害発生の確率モデル

Application of Probabilistic Models to Material Strength, Structural Strength and Disaster Occurrence

まえがき

信頼性工学は、古くは真空管に起因する無線機器の故障低減を目的として始まったといわれている。第2次世界大戦後、経済発展とともに自動車や航空機に代表される多数の機器が社会で利用されるようになった。また、高度成長期以降、鉄道をはじめとする交通機関の拡張、道路や橋梁などの社会基盤の充実が図られている。我々の生活や社会の基盤を支えるあらゆる機械、土木建築からなる構造物の信頼性、安全性に対する認識が深まるとともにその重要性が再認識されるようになり、信頼性工学が担うべき役割も増している。

信頼性とは、「アイテムが与えられた条件の下で、与えられた期間、要求機能を遂行できる性質」として JIS に定義されている。その実現のための科学的理論と応用に関する研究が信頼性工学で探求・議論されている領域である。構造物を構成する材料や部品からなる製品・構造物の信頼性を如何に保証するかについて、技術革新や適応領域の拡大とともに理論的検証や適用方法が考案されている。構造物へはたらきかける人間要素も含めた系を対象にした人間信頼性工学も探求されている。このように信頼性工学においては、技術革新とその適用分野の領域を広げながら、システム全体の安全性・信頼性を確保するための方策の検討がされている。近年では、豪雨などの異常気象や地震など自然災害による甚大な被害を踏まえた社会の信頼性、安全性を確保するために、災害後の組織間連携など社会のレジリエンス向上の議論も始まっている。

信頼性工学部門委員会は、設立当時から信頼性工学の理論やその応用を共通課題と捉えて、材料疲労強度に限定せず多様な学術領域の委員が参画し、信頼性工学の理論とその応用についての研究を通して信頼性工学の発展に寄与している。信頼性工学の適用分野として、金属材料疲労強度、機械構造物、土木建築構造物における信頼性設計や信頼性評価に関する研究やその応用についての探求を進めている。

今回の連載講座においては、信頼性工学部門委員会で、近年活発に議論されている分野における確率モデルに焦点を当てて、分野横断的に応用される信頼性工学の話題を提供できる下記テーマで構成した。

第1回 タイトル：材料損傷・破壊問題への確率過程の応用

執筆者：松田伸也（香川大学）、合田公一（山口大学）

第2回 タイトル：金属材料の統計的疲労特性に関するレビューおよび今後の展開

執筆者：中村裕紀（豊田工業高等専門学校）、伊藤勉（富山県立大学）、黒田雅利（熊本大学）、境田彰芳（明石工業高等専門学校）、松田伸也（香川大学）、松村隆（電気通信大学）、酒井達雄（立命館大学）

第3回 タイトル：金属材料の静的強度特性値による $S-N$ 曲線の統計的推定と今後の展開

執筆者：伊藤勉（富山県立大学）、中村裕紀（豊田工業高等専門学校）、向山和孝（大阪大学）、境田彰芳（明石工業高等専門学校）、中川雅央（滋賀大学）、岡田憲司（香川高等専門学校）、酒井達雄（立命館大学）

第4回 タイトル：破壊性状により変化する構造性能の確率的分析

執筆者：高橋利恵（前橋工科大学）

第5回 タイトル：土構造物の地震・豪雨に対するリスク評価

執筆者：西村伸一（岡山大学）

本連載講座の解説テーマは、材料の損傷破壊の確率過程による表現、本部門委員会と疲労部門委員会で収集している金属材料疲労データベースを対象にした統計的分析、建築構造物への信頼性工学の応用、自然災害による土構造物のリスク評価となっており、信頼性工学の基本的な理論や取り扱う対象に対する探究アプローチの方法論に触れることができる解説になっている。特に、近年、自然災害に起因する被害の甚大化が懸念されており、それらに対する対策を講じる上で、自然災害に対するリスク評価は興味深い内容になっている。本講座が信頼性工学分野の技術者・研究者に限らず多くの関連分野の方々の参考になれば幸いである。

1. 材料損傷・破壊問題への確率過程の応用†

松田 伸也* 合田 公一**

I: Application of Stochastic Processes for Damage and Fracture of Materials

by

Shinya MATSUDA* and Koichi GODA**

Key words:

Markov process, Weibull distribution, CFRP, Porous ceramics, Cumulative fiber breakage, Damage tolerable property

1 緒 言

工学分野における信頼性確保のためには、対象物の時間とともに移り変わる現象を確率論的に理解する必要がある。そのため、信頼性工学の分野では確率過程論を用い、その現象の推移が論じられてきた。信頼性工学部門委員会では、過去に疲労き裂の不規則進展性や構造物の損傷進展、経年劣化を扱う問題において、確率過程論を応用した研究が多々報告されてきた。しかしながら、最近の材料・構造信頼性分野において、確率過程に基づく応用研究があまりみられなくなった。原因の一つとして、近年のコンピュータ技術の目覚ましい発展により、高度な解析ソフトが簡便に使えるようになったことが挙げられる。その結果、解析手法の良否を考えずに利便性の良いソフトを選び、解析の原理を知らないままブラックボックス化した中身を信用して結果を受入れることがしばしば見受けられる¹⁾。逆に言うと、解析ソフトに使われている基礎理論を理解せずに使うため、得られる結果の重要性を見逃すことがある。具体的な事例として、モンテカルロ法と数値計算ソフトを組合せた構造解析手法が存在する。得られた解に対して、しばしば平均値や標準偏差などを着目しがちであり、モンテカルロ法の確率変数の意義や数値計算ソフトで使われる基礎理論の妥当性を知らずに使用している。

確率過程の基礎理論を再認識することは、解析ソフトで得られる結果を唯一の解釈として受け入れることなく、また確率過程論の限界について見渡すことができるので、信頼性工学を発展させる上で重要な課題であると言える。さらに、近年では機械学習のアルゴリズムにマルコフ連鎖モンテカルロ法(MCMC)など確率過程に基づく手法が組み込まれている。ゆえに機械学習を構造解析手法に活用する上でも大いに重要になる。

以上を踏まえて本講座では、材料の損傷および破壊問題への確率過程論の適用性を解説する。初めに、モノリシックセラミックスや炭素繊維の典型的なぜい性破壊問

題を取り上げ、確率過程論の適用による数式表現を論じる。次に、多孔質セラミックスの累積微視損傷や炭素繊維強化プラスチック(CFRP)内の累積繊維破断に対してマルコフ過程を適用し、ぜい性破壊と累積損傷破壊との相違について、確率過程論の立場から論じる。

2 基礎理論—マルコフ過程とワイブル分布—

2・1 最弱リンク説に基づくワイブル分布の導出

セラミックスや炭素繊維のようなぜい性材料は欠陥やき裂が存在し、その中の最弱欠陥(最も大きい欠陥)を起点として全体の破壊に至る。このとき、最弱欠陥のサイズは試料によってばらつくので、その大きさに伴って破壊強度は大きな変動を示す。このことは最弱リンク説によって説明できる。Fig.1に示すように、 n 個の輪が直列に連結した1本の鎖を考える。これに一軸方向のみの引張応力 σ を作用させたとき、鎖の破壊強度は最も弱い輪の破壊強度で決まる考え方を最弱リンク説と呼ぶ。まず1つの輪を取り上げ、一軸方向のみの引張応力 σ が作用することを考える。輪の破壊確率を $F_{\text{ring}}(\sigma)$ とすると、輪に生じる σ までに破壊しない確率は $1-F_{\text{ring}}(\sigma)$ である。次に、Fig.1に示す n 個の輪からなる鎖に対して σ を作用させたとき各輪に生じる応力はすべて σ とする。すなわち、一様な一軸引張応力状態を考える。このとき n 個の輪がすべて壊れない確率は鎖の壊れない破壊確率に等しい。ゆえに鎖の破壊確率を $F_{\text{chain}}(\sigma)$ とすれば、それぞれの n 個の輪の破壊しない確率の積となるため次式で表される。

$$1-F_{\text{chain}}(\sigma)=[1-F_{\text{ring}}(\sigma)]^n=\exp\left[\ln\{1-F_{\text{ring}}(\sigma)\}^n\right] \quad (1)$$

最弱リンク説では破壊強度の小さい輪が鎖の破壊強度を決定するため、 $F_{\text{ring}}(\sigma)<1$ とすることができ、式(1)より $F_{\text{chain}}(\sigma)$ は次式で近似できる。

$$F_{\text{chain}}(\sigma)=1-\exp\{-nF_{\text{ring}}(\sigma)\} \quad (2)$$

これより、 $F_{\text{chain}}(\sigma)$ は $F_{\text{ring}}(\sigma)$ だけでなく、鎖を構成する輪の数 n にも依存することが理解できる。Weibullは

† 原稿受理 令和3年3月9日 Received Mar.9, 2021 ©2021 The Society of Materials Science, Japan

* 正会員 香川大学 創造工学部 創造工学科 先端材料科学領域 〒761-0396 高松市林町
Area in Advanced Mater. Sci., Faculty of Eng. and Design, Dept. of Eng. and Design, Kagawa Univ., Hayashi-cho, Takamatsu, 761-0396.** 正会員 山口大学 工学部 機械工学科 〒755-8611 宇部市常盤台
Dept. of Mech. Eng., Yamaguchi Univ., Tokiwadai, Ube, 755-8611.

$F_{\text{ring}}(\sigma)$ として、 $(\sigma/\sigma_0)^m$ を定義した。したがって、式(2)を書き換えることで破壊確率 F は、

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left\{-V/V_0(\sigma/\sigma_0)^m\right\} \quad (3)$$

となり、ワイブル分布が表現される。ここで、 m は形状母数、 σ_0 は尺度母数であり、分布の範囲や位置を特徴づける材料定数（ワイブルパラメータ）である。式(3)は、しばしば2母数ワイブル分布とも呼ばれる。また $n=V/V_0$ であり、 V および V_0 は、 σ および σ_0 に対応したぜい性材料の体積である。このようにワイブル分布には体積によって破壊強度が変わることが導出過程で組込まれており、いわゆる体積効果が表現されている。

Fig.1 Weakest link model.

2・2 2状態1段階過程に対する出生マルコフ過程

2母数ワイブル分布はマルコフ過程²⁾の最も単純な形として数式表現できる。同様に一軸引張応力 σ の下でぜい性材料中に含まれる最弱欠陥からき裂が発生すると不安定成長してぜい性破壊することを考える³⁾。このとき状態遷移図（マルコフグラフ）はFig.2で表される。ここで $\lambda(\sigma)$ は推移率であり、信頼性工学の分野では故障率と呼ばれる。最弱欠陥を含む状態を S_{B0} とし、材料が応力 σ まで破壊せず、その後の応力増分 $\Delta\sigma$ 内で破壊した状態を S_{B1} とする。このとき $\Delta\sigma$ 内で破壊する確率（推移確率） P_{01} は $\lambda(\sigma)\Delta\sigma$ である。この材料は未破壊状態 S_{B0} または破壊状態 S_{B1} のどちらかにあり、各状態の推移確率 P_{00} , P_{11} は $1 - \lambda(\sigma)\Delta\sigma$, 1 としてそれぞれ表される。また破壊は不可逆性のため状態変化は S_{B0} から S_{B1} への一方向のみであり、 S_{B1} から S_{B0} への推移確率 $P_{10}=0$ となる2状態1段階過程である。したがって、 σ から $\sigma + \Delta\sigma$ における状態 S_{B0} および S_{B1} の状態確率 P_{B0} , P_{B1} は式(4)で行列表現できる。

$$\begin{pmatrix} P_{B0}(\sigma + \Delta\sigma) \\ P_{B1}(\sigma + \Delta\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{B0}(\sigma) \\ P_{B1}(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \lambda(\sigma)\Delta\sigma & \lambda(\sigma)\Delta\sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$\Delta\sigma \rightarrow 0$ とすると、次の連立微分方程式が得られる。

$$dP_{B0}(\sigma)/d\sigma = -\lambda(\sigma)P_{B0}(\sigma) \quad (5-1)$$

$$dP_{B1}(\sigma)/d\sigma = \lambda(\sigma)P_{B0}(\sigma) \quad (5-2)$$

式(5-1), (5-2)を境界条件 $P_{B0}(0)=1$ および $P_{B1}(\infty) \rightarrow 1$ の下にそれぞれ解くと、

$$P_{B0}(\sigma) = \exp\left[-\int_0^\sigma \lambda(\sigma) d\sigma\right] \quad (6-1)$$

$$P_{B1}(\sigma) = 1 - \exp\left[-\int_0^\sigma \lambda(\sigma) d\sigma\right] \quad (6-2)$$

となる。ワイブル分布と等価にするためには推移率 $\lambda(\sigma)$ を式(7)のように、べき乗型関数とすればよい。

$$\lambda(\sigma) = m\sigma^{m-1}/\sigma_0^m \quad (7)$$

式(7)を式(6-1), (6-2)に代入して計算すれば、 P_{B0} および P_{B1} はそれぞれ式(3)に示したワイブル分布の $V/V_0=1$ における信頼度関数および累積分布関数と等価となる。なお、推移率を指数型関数とすれば2重指数分布が得られる。

Fig.2 Markov graph (state transition diagram) for 2 states and 1 step.

2・3 ワイブル分布の解析事例

Fig.3に4点曲げ試験後の窒化ケイ素の破面および曲げ強度⁴⁾のワイブルプロットを例証する。セラミックスのようなぜい性材料では、破壊過程において、内在するき裂を起点として一つの面内を放射状にき裂が進展する。その際に形成される表面は、平坦で鏡面状を呈するミラー領域が形成される。その結果、巨視的な破面では、特徴的な破壊起点（ミラー領域）と放射状の様子が観察される（Fig.3(a)）。また強度分布は直線回帰できており、2母数ワイブル分布に適合する（Fig.3(b)）。ここで図中のワイブルパラメータは、最小二乗法による直線回帰より求めている。ただし、無限に大きなき裂は現実的に存在しないため、さらにデータ数が多くなると強度の下限値が現れる⁵⁾。この場合は、3母数ワイブル分布がよく適合する。したがって、一つの欠陥やき裂を起点として破壊するぜい性材料は、最弱リンク説の仮説が適用できるため、その強度分布はワイブル分布に適合する。炭素繊維においてもFig.3に類似した破面を呈し、引張強度はワイブル分布に適合することがよく知られている⁶⁾。

Fig.3 Results of a 4-point bending strength test for Si_3N_4 : (a) the fracture surface and (b) Weibull plots of the strength.

3 多孔質セラミックスの強度分布解析 (マルコフ過程の適用)

多孔質セラミックス（以後、多孔体）は、破壊に至る前に微視的な損傷を起こすために損傷許容性に優れており、応力-ひずみ線図では非線形性が現れる⁷⁾。本節では、応力速度依存性を考慮した確定的なき裂進展モデルと累積微視損傷を考慮したモデルによる SiC 系多孔体の4点曲げ強度分布を解析する⁸⁾。

※1 二軸または三軸均等引張応力下で2母数ワイブル分布が成立する扱い³⁾は、本稿では取り上げず、別の機会に議論する。

3・1 確定的なき裂進展を仮定した確率モデル

安定き裂成長 (Slow Crack Growth: SCG) 則とワイブル分布を組合せた確率モデルを示す. 時間 t での応力 $\sigma(t)$ で多孔体中の気孔 (以後, 初期き裂) から相互作用することなく独立してそれぞれモード I で SCG が起こることを考える. き裂半長が a のとき応力拡大係数 K_I は, $\phi\sigma(t)\sqrt{\pi a}$ (ϕ : き裂形状係数) として表される. SCG のき裂進展速度 v は実験的に,

$$v = da/dt = C(K_I/K_{IC})^{n_s} \quad (8)$$

として表される. ここで n_s はき裂伝ば指数, K_{IC} は破壊じん性値, C は材料定数である. $t=0$ のとき初期き裂半長を a_i とする. $t=t_f$ のとき a_f まで安定成長して不安定破壊するという条件の下で式(8)を積分すれば,

$$a_i^{-(n_s-2)/2} - a_f^{-(n_s-2)/2} \approx a_i^{-(n_s-2)/2} = \frac{n_s-2}{2} C \alpha^{n_s} \int_0^{t_f} \sigma(t)^{n_s} dt \quad (9)$$

として計算される. ここで $\alpha = \phi\sqrt{\pi}/K_{IC}$ である. 一般にセラミックスでは $n_s \geq 20$ のため左辺の第2項を省略できる. 一方, SCG を起こさずに即時破壊する不活性強度を σ_i とすれば $a_i = (K_{IC}/\{\phi\sigma_i\sqrt{\pi}\})^2$ と表現できる. また一定負荷速度での破壊のため, $\sigma(t) = \dot{\sigma}t$ ($\dot{\sigma}$: 応力速度) と表され, 破壊強度 σ_f は $\dot{\sigma}t_f$ である. ゆえに等価静的強度 σ_i^* は,

$$\sigma_i^* = (A\sigma_f^{n_s+1}/\dot{\sigma})^{1/(n_s-2)} \quad (10)$$

として表現できる. ここで, $A = (n_s-2)C\alpha^2/\{2(n_s+1)\}$ である. 多孔体中では, 様々なサイズの初期き裂が存在しており, そのうちの一つを起点として破壊すると仮定する. すなわち σ_i が式(3)のワイブル分布に従うと仮定し, σ を σ^* で置き換えると破壊確率 F は,

$$F(\sigma_f, \dot{\sigma}) = 1 - \exp\left\{-\left(\sigma_f/\dot{\sigma}\right)^{\hat{m}}\right\} \quad (11)$$

と与えられる. ここで, $\hat{\sigma}_0 = \sigma_0^{(n_s-2)/(n_s+1)}(\dot{\sigma}/A)^{1/(n_s+1)}$ であり, $V/V_0=1$ としている. また, $n_s \geq 20$ のため $\hat{m} = m(n_s+1)/(n_s-2) \approx m$ と近似できる.

3・2 累積微視損傷と応力分散を考慮した確率モデル

SCG による確定的なき裂進展破壊ではなく, 微視的な損傷が累積 (損傷許容性の発現) して破壊することを考える. 具体的には, 応力 σ の増加とともに一つの結晶粒が応力集中源となり, 隣接する結晶粒界のガラス相が SCG を起こした後に不安定成長して粒界が損傷する. その後, 次々と局所的に粒界損傷が起こり, 損傷群 (クラスター) が形成される. そしてクラスターサイズがある臨界値に到達したとき, 多孔体が破壊すると仮定する. 以上の機構に対して累積損傷を確率過程で表すことを考え, そのマルコフグラフを Fig.4 に示す. 無負荷の状態 S_0^* において, すべての粒界は未損傷の状態にある. σ の増加に伴い一つずつ粒界が損傷していく過程のため, i 個の粒界が損傷した状態を S_i^* と記し, その状態が故障率 μ_i の下で起こるとする. したがって応力増分 $\Delta\sigma$ の間に状態 S_i^* から状態 S_{i+1}^* へ移る確率は $\mu_i\Delta\sigma$ である. いま, 未損傷の状態 S_0^* か

ら推移確率 $\mu_0\Delta\sigma$ で粒界が1つ損傷した状態 S_1^* へ推移する. 次に, 状態 S_1^* から推移確率 $\mu_1\Delta\sigma$ でさらに粒界が1つ損傷した状態 S_2^* へ推移する. このように次々と連鎖的に損傷が発生し, 最終的に N_c 個の粒界が損傷した状態 $S_{N_c}^*$ のとき破壊を起こす. このとき各状態確率 P_i^* ($i=0, 1, 2, \dots, N_c$) は, 次の連立常微分方程式を満たす.

$$dP_0^*/d\sigma = -\mu_0P_0^* \quad (12-1)$$

$$dP_1^*/d\sigma = \mu_0P_0^* - \mu_1P_1^* \quad (12-2)$$

$$dP_2^*/d\sigma = \mu_1P_1^* - \mu_2P_2^* \quad (12-3)$$

⋮

$$dP_{N_c-1}^*/d\sigma = \mu_{N_c-2}P_{N_c-2}^* - \mu_{N_c-1}P_{N_c-1}^* \quad (12-4)$$

$$dP_{N_c}^*/d\sigma = \mu_{N_c-1}P_{N_c-1}^* \quad (12-5)$$

次に損傷周りの応力分担と推移率を考える. 多孔体の SEM 観察より結晶粒の配列は六方配列と近似した. これより荷重分担係数 (応力集中係数) K_i は, 破壊起点となる1つの結晶粒に隣接する6つの結晶粒の粒界のみに応力が分担されると考え, $1+i/6$ として表現した. ゆえに推移率 μ_i は, SCG 損傷を考慮した式(11)を用いて,

$$\mu_i = -\frac{d}{d\sigma} \ln\left(1 - F\left(\sigma K_i, \dot{\sigma}\right)\right) = \hat{m} \left(\frac{K_i}{\hat{\sigma}_0}\right)^{\hat{m}} \sigma^{\hat{m}-1} = L_i \sigma^{\hat{m}-1} \quad (13)$$

として表現した. 式(12)および式(13)より, 初期条件および収束条件として, $\sigma=0$ のとき $P_0^*=1$ および $P_k^*=0$ ($k=1, 2, \dots, N_c-1$), $\sigma \rightarrow \infty$ のとき $P_{N_c}=1$ とすることで, 状態確率 P_0^* , P_k^* および臨界クラスター発生確率 (破壊確率) $P_{N_c}^*$ は, 次のように計算される.

$$P_0^* = \exp\left[-\left(\sigma/\hat{\sigma}_0\right)^{\hat{m}}\right] \quad (14)$$

$$P_k^* = L_0 L_1 \cdots L_{k-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^{k-1} (L_j - L_i)} \exp\left[-\left(\frac{K_i \sigma}{\hat{\sigma}_0}\right)^{\hat{m}}\right] \quad (15)$$

$$P_{N_c}^* = 1 - L_0 L_1 \cdots L_{N_c-1} \sum_{i=0}^{N_c-1} \frac{1}{L_i \prod_{j=0, j \neq i}^{N_c-1} (L_j - L_i)} \exp\left[-\left(\frac{K_i \sigma}{\hat{\sigma}_0}\right)^{\hat{m}}\right] \quad (16)$$

式(16)の破壊確率曲線 $P_{N_c}^*$ は, 一定負荷速度の下, N_c を増加させれば損傷許容効果のために確率曲線は高強度側にシフトし, 低確率側での立ち上がりが急速となる. 高破壊確率になると N_c によらず2母数ワイブル分布に漸近し, 最終的には一致する. 一般のセラミックスを参考に形状母数 $\hat{m}=10$ とした場合, $N_c > 10$ では一つのマスターカーブに漸近する. このことは, 実際の破壊において粒界の損傷は $N_c > 10$ と予想され, 本解が確率曲線の原因分布になりうることを示唆している. したがって $N_c=10$ として多孔体の破壊強度を予測した.

Fig.5 に各負荷速度に対する4点曲げ強度のワイブルプロットと式(11)および(16)による予測線図をそれぞれ示す. 各材料定数の決定は文献(8)を参考にさせていただきたい. 曲げ強度は応力速度の低下に伴って低下した. 0.479MPa/sでの強度データ (Δ マーク) に注目すると, 破壊確率がおよそ40%から分布の傾きが変化しており, 上に凸の形

状を据える傾向を示した。これは、窒化ケイ素の強度分布 (Fig.3(b)) とは明らかに異なる。それに対して式(11)から予測した確率曲線は、強度の応力速度依存性は表現できているが、直線であり、各負荷速度に対する実験値からやや外れる傾向を示した。以上の結果より、一つのき裂から SCG により破壊するモデルでは、多孔体の破壊過程を十分に説明できない。一方で、式(16)より予測した確率曲線は、式(11)と比較して実験値を良く予測できおり、式(16)のモデルは妥当であると言える。このことから、多孔体強度データの分布が曲線を示す理由は損傷許容性による応力分配効果が影響していると考えられる。以上より、マルコフ過程モデルを順問題として適用すれば多孔体の損傷許容性を論じることができる。

Fig.4 Markov graph of micro failure process in porous ceramics.

Fig.5 Weibull plots of the 4-point bending strength and curves predicted using Eqs. (11) and (16).

4 CFRP内の繊維破断数の推定 (マルコフ過程による逆解析)

長繊維系複合材料の強化材である炭素繊維やガラス繊維は、単独の強度は優れているものの、そのばらつきも大きいことから確率的に扱われることが多い。このような確率変動を考慮した上で、複合材料全体の強度予測を行なう多数のモデリングが提案されてきた⁹⁾⁻¹⁵⁾。このうち、Chain-of-bundles モデル⁹⁾は長繊維系複合材料の確率論的強度モデルの基本であり、多くの扱いに導入されている。しかし、Chain-of-bundles モデルは強度やその分布を評価するものであり、繊維の破断過程を再現できるものではない。本節では、少数繊維からなる CFRP の強度データおよび単繊維試験によるワイブルパラメータに基づき、マルコフ過程を用いて CFRP の繊維破断過程の累積性を定量評価する¹⁶⁾。

4・1 逆解析モデルの提示

長繊維系複合材料の破壊過程は繊維破断やそれにとともなう界面はく離の蓄積をとおして進行する。繊維破断点からの応力回復域はマトリックスの弾性率や界面はく離の規模によって決定され、回復域の2倍の距離を無効長さ l_0 と称し、これがChain-of-bundlesモデルにおけるbundle長さに相当する。界面はく離が生じないかまたはその規模が小さければ応力集中によってクラスターと呼ばれる繊維破断点の集まりが生成し、これが複合材料全体の破壊源とされる。一方、セラミックス基複合材料で示されるように、界面はく離の規模が大きければ、応力集中の規模は小さくクラスターは生じにくくなる。繊維破断点は個々に分散し、より累積数の多い破断過程を示すようになるので、クラスター型と破断点分散型の破壊条件を統一的にモデリングするのは困難である。そこで、応力集中の有無を問わずに繊維の累積破断過程を定量的に評価する手法を以下に提案する。

Fig.6 に長繊維系複合材料の破壊過程に関するマルコフグラフを示す。まず無負荷の状態において、 N 本の繊維から成る複合材料内のすべての繊維は未破断状態 S_0 にある。応力 σ を負荷していくと N 本中の最弱箇所繊維破断が生じるが、複合材料は破壊しない状態 S_1 、および1箇所の破断点で複合材料全体が破壊に至る状態 S_{1f} の2つの状態を仮定する。このとき、 σ および $\sigma + \Delta\sigma$ の間で推移する確率として状態 S_0 から S_1 または S_{1f} に推移する確率の和を $\lambda_1 \Delta\sigma$ (λ_1 : 推移率) とおくと、推移せずに S_0 に留まる確率は $1 - \lambda_1 \Delta\sigma$ である。 S_{1f} は破壊状態であり、Fig.6 に示すように、 $S_0 \rightarrow S_{1f}$ への吸収率を α_1 とおき、 $S_0 \rightarrow S_1$ への推移比をその排反事象として $(1 - \alpha_1)$ とする。そして、同様に $S_1 \rightarrow S_{2f}$ のように破断点が2つ連続したクラスターによって複合材料全体が破壊する状態、および $S_1 \rightarrow S_2$ のように破断点が2つ存在しても破壊しない状態を設ける。以降も $S_2 \rightarrow S_{3f}$ および $S_2 \rightarrow S_3$ のように設定しながら、同様な状態推移を連続させる。このとき、 $S_1 \rightarrow S_{2f}$ のようにクラスターで壊れる状態、 $S_3 \rightarrow S_{4f}$ のようにクラスターでなくてもその近傍で破断が生じたときに破壊する状態、あるいは $S_2 \rightarrow S_{3f}$ のようにクラスターが存在しても応力集中が及ばない離れた箇所繊維破断が生じたときに破壊する状態など、様々な破壊状態が想定される。以上のように表現すると、本問題は離散的状態空間 $\{S\}$ 内において状態変化が $S_{i-1} \rightarrow S_i$ または $S_{i-1} \rightarrow S_{if}$ が推移率 λ_i ($i=1,2,3,\dots$) の下で起こるようなマルコフ過程となる。 $\Delta\sigma \rightarrow 0$ とするとき、各状態確率 P_i ($i=1,2,3,\dots$) は次の連立常微分方程式を満足する。

$$dP_0/d\sigma = -\lambda_1 P_0 \quad (17-1)$$

$$dP_1/d\sigma = -\lambda_2 P_1 + \lambda_1 (1 - \alpha_1) P_0 \quad (17-2)$$

$$dP_{1f}/d\sigma = \lambda_1 \alpha_1 P_0 \quad (17-3)$$

$$\vdots$$

$$dP_i/d\sigma = -\lambda_{i+1} P_i + \lambda_i (1 - \alpha_i) P_{i-1} \quad (17-4)$$

$$dP_{if}/d\sigma = \lambda_i \alpha_i P_{i-1} \quad (17-5)$$

$$\vdots$$

$$dP_{(k+1)f} / d\sigma = \lambda_{k+1} P_i \quad (17-6)$$

$$P_f = \sum_{i=1}^k P_{if} \quad (18)$$

となり, これに $P_{(k+1)f}$ が加わるとすべて破壊する. 本解析では λ_i をワイブル分布の推移率で表現する. すなわち,

$$\lambda_i = \frac{NL - (i-1) \cdot 2\delta}{L_0} \cdot \frac{m\sigma_0^{m-1}}{\sigma_0^m} \quad (i=1,2,3,\dots) \quad (19)$$

と与える. ここで, m , σ_0 はワイブル形状母数, 尺度母数, L , L_0 は繊維長さ, 標準繊維長さであり, δ は繊維破断にともなう応力回復長さの2倍長を示し, 式(19)は繊維破断が生じると繊維の全長が減少することを示している. 応力回復域では, Cox¹⁷⁾の解のようにマトリックスを弾性体に仮定するとき δ は一定となり, Kelly-Tyson モデル¹⁸⁾のように弾完全塑性体を仮定するとき δ は応力の関数であり σ の増加とともに増加する (本稿では Cox 解の結果を示す). また, 従来の Harlow-Phoenix モデル¹¹⁾のように, これまでの確率論的強度モデルでは繊維破断が生じると破断点周りの応力集中を考慮した破断集積 (クラスター) 形成を前提にするが, ここでは強度推定のモデリングを目的としていないので, 上述のようにクラスターも含めた様々な最終破壊状態を許容することができる.

Fig.6 Markov graph of fiber breaking process in a long fiber-reinforced composite.

4・2 逆解析モデルによる繊維破断点累積性の評価

炭素繊維 (T300JB-3K, TORAY Co.) 1, 2, 3, および 4 本からなる束にエポキシ樹脂を浸透させて作製した少数繊維試験片の引張強度データを対象とし, 式(17-1)から(17-6)を数値計算によってフィッティングさせた¹⁶⁾. その際, 吸収率 α_i は式(18)の破壊確率曲線と実験データの残差の二乗和が最小になるようにして決定した. このとき, ワイブルパラメータは $N=1$ で得られた結果より形状母数 $m=7.39$ および尺度母数 $\sigma_0=3.22\text{GPa}$ とした. また, 式(19)の δ は 0.11mm として固定した. この値は Cox 解より得られる 90%回復レベルに相当する.

Fig.7(a)に $N=2$ の結果を示す. まず α を 1 に固定すると $P_f(k=1)$ のとき $\alpha_1=0$ であった. すなわち, $N=2$ の CFRP は繊維破断点が 1 つ発生しても壊れない. 続いて $P_f(k=2)$ のとき $\alpha_2=0.203$ であった. このとき $\alpha_1=0$ および $\alpha_3=1$ と固定している. これから, 試験片全体の 20.3% は 2 個の繊維破断点を生じるときに破壊する. さらに, $P_f(k=3)$

(a) Fitting to fracture probability data of CFRP strand with two fibers ($N=2$)

(b) Fitting to fracture probability data of CFRP strand with three fibers ($N=3$)

Fig.7 Fracture probabilities of CFRP strands and data fitting by proposed Markov process model.

とき $\alpha_3=0.819$ であった. このとき $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0.203$ および $\alpha_4=1$ と固定している. これから, 先ほど壊れなかった残り 79.7% ($=1-0.203$) のうち, その 81.9% が 3 個の繊維破断点を生じるときに破壊する. よって, $k=2$ または $k=3$ で壊れる試験片は $20.3\% + 79.7\% \times 0.819$, すなわち 85.6% を占める. さらに, $P_f(k=4)$ を試みたところ, 破壊曲線は $P_f(k=3)$ とほぼ重なったが, $\alpha_4=0.468$ が得られた. これは試験片全体の 6.7% ($=0.468 \times (100\% - 85.6\%)$) が $k=4$ で壊れることになる. 最終的に全体の 0.3% の割合ではあるが, α_i において 1 が得られた. すなわち, この CFRP は最大で 7 個の繊維破断点が生じることを意味する. 平均破断点数 $\bar{n}_f$ は

$$\bar{n}_f = \sum_{i=1}^k i \cdot P_{if} \quad (20)$$

となり, 今回の結果では $\bar{n}_f=3.05$ が得られた. 換言すると, 2 本の繊維からなる CFRP 試験片は平均的に約 3 個の破断点を有すると破壊に至る. さらに, 得られた $\alpha_1 \sim \alpha_i$ を各 P_{if} に代入すれば, 引張応力の増加とともにどのような割合で繊維破断点数が生成されていくか, すなわち繊維破断過程も推定することができる.

Fig.7(b)に $N=3$ の場合を示す. この場合は $\alpha_1=\alpha_2=0$ であったが, $\alpha_3=0.546$ および $\alpha_4=0.739$ が得られた. これから, 3 本の繊維からなる試験片は繊維破断点が 3 個および 4

個で壊れる確率が $54.6\% + 45.4\% \times 0.739$, すなわち全体の 88.2% を占める。しかし、その後、 $k=5, 6, 7$ では吸収率 α はすべて 0 であった。Fig.7(b)は $k=8$ の場合も 0 であることを示している。さらに $k=9$ を試みたところ、破壊曲線は $P_f(k=8)$ とほぼ重なったが、 $\alpha_9=0.493$ が得られた。これは全体の 5.8% を占めており、高強度領域をフィッティングさせるには繊維破断の累積性が必要であることを意味している。最終的に α_{10} において 1 が得られ、 $\bar{n}_f=4.10$ であった。以上から、マルコフ過程モデルを逆解析手法として適用することにより、CFRP の繊維破断過程を定量的に論じることができる。

5 おわりに

本講座では、材料の損傷および破壊問題をターゲットとして確率過程論の適用性を解説した。初めに、典型的なぜい性破壊問題を取り上げ、最弱リンク説から導出されるワイブル分布は、確率過程論の適用によって数式表現できることを示した。次に多孔質セラミックスの微視的累積損傷や炭素繊維強化プラスチック (CFRP) 内の累積繊維破断に対してマルコフ過程を適用し、ぜい性破壊と累積損傷破壊との相違を確率過程論の立場から論じた。

確率過程論は、材料の損傷・破壊問題に限らず、幅広い分野で適用されている。例えば、生物学において捕食者非捕食者の系の動態を記述するために確率過程が適用されている。また、昨今の COVID-19 の大流行により感染症予測モデルである SIR モデル¹⁹⁾を基盤とし、感染の特徴が解析されている。その中で著者らは、マルコフ過程に基づき COVID-19 の特徴を解析してきた。さらに信頼性工学部門員会 確率過程応用研究分科会において COVID-19 の特徴を学術的に理解することを目的として、委員会委員と議論してきた²⁰⁾。

本講座を通じて確率過程は、分野や現象に捉われず対象物の時間とともに移り変わる現象を確率論的に理解する場合に有効な手法であり、確率論的な現象を見通しよく表現できることを理解していただければ幸いである。

参 考 文 献

- 1) K. Goda, "Watashi no issatsu, Kagaku wo hagukumu", Journal of the Society of Mechanical Engineers, Vol. 121, p 44 (2018).
- 2) S. Karlin, "A first course in stochastic process", translated into Japanese by K. Sato and Y. Sato, pp. 193-237 (1974) Sangyo-Tosho.
- 3) Y. Matsuo, "On the Relative Coefficients of the Multiaxial Probability Distribution Function for Fracture", Bulletin of JSME, Vol. 24, pp. 495-500 (1981).
- 4) Chairman of Editorial Committee: H. Nakayama, "CERAMICS STRENGTH DATABASE VOL.1", p 1, (1996), The Society of Materials Science, Japan.
- 5) S. Matsuda and K. Ogi, "Effect analysis of loading rate on relationship between strength and flaw size of ceramics using probabilistic model on the basis of SCG concept", Transactions of the JSME, Vol. 83, p. 16-00369 (2017).
- 6) M. Herráez, A. Fernández, C. S. Lopes and C. González, "Strength and toughness of structural fibres for composite material reinforcement", Philosophical Transactions of the Royal Society A, Vol. 374, 20150274 (2016).
- 7) A. Suzuki and H. Baba, "Assessment of damage tolerance and reliability for ceramics", Journal of the Society of Materials Science, Japan, Vol. 50, pp. 290-296 (2001).
- 8) S. Matsuda and M. Takahashi, "Fracture strength distribution of porous ceramics under quasi-static load", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 77, pp. 2601-2609 (2010).
- 9) B. W. Rosen, "Tensile failure of fibrous composites", AIAA Journal, Vol. 2, pp. 1985-1991 (1964).
- 10) C. Zweben, "Tensile failure analysis of fibrous composites", AIAA Journal, Vol. 6, pp. 2325-2331 (1968).
- 11) D. G. Harlow and S. L. Phoenix, "The chain-of-bundles probability model for the strength of fibrous materials I: Analysis and conjectures", Journal of Composite Materials, Vol. 12, pp. 195-214 (1978); *ibid.*, "II: A numerical study of convergence", Vol. 12, pp. 314-334 (1978).
- 12) D. G. Harlow and S. L. Phoenix, "Probability distributions for the strength of composite materials I: two-level bounds", International Journal of Fracture, Vol. 17, pp. 347-372 (1981); *ibid.*, "II: A convergent sequence of tight bounds", Vol. 17, pp. 601-630 (1981).
- 13) W. A. Curtin, "Theory of mechanical properties of ceramic-matrix composites", Journal of the American Ceramic Society, Vol. 74, pp. 2837-2845 (1991).
- 14) K. Goda, "Application of Markov process to chain-of-bundles probability model and lifetime distribution analysis for fibrous composites", Journal of the Society of Materials Science, Japan, Vol. 47, pp. 464-471, (1998).
- 15) K. Goda, "Markov process analysis for the strength of ceramic matrix composites reinforced with continuous fibers", Materials Science Research International, Vol. 8, pp. 87-92 (2002).
- 16) K. Goda and Y. Sawada, "Stochastic estimation of the number of fiber-break points in a CFRP by Markov process", Advanced Composite Materials, Vol. 29, pp. 569-586 (2020).
- 17) H. L. Cox, "The elasticity and strength of paper and other fibrous materials", British Journal of Applied Physics, Vol. 3, pp. 72-79 (1952).
- 18) A. Kelly and W. R. Tyson, "Tensile properties of fiber-reinforced metals: copper/tungsten and copper/molybdenum", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 13, pp. 329-350 (1965).
- 19) W. O. Kermack and A. G. McKendrick, "A Contribution to the mathematical theory of epidemics". Proceedings of the Royal Society A, Vol. 115, pp. 700-721 (1927).
- 20) Subcommittee on Stochastic Processes and their Applications, <https://material-reliability.wixsite.com/stochastic-process> (see web 2021.3.10).