平行板プラストメーターの理論*

岡 小 天** 小 川 セ キ 子**

Theory of Parallel-Plate Plastometer

by

Syoten OKA and Sekiko OGAWA

(Department of Physics, Tokyo Metropolitan University, Tokyo)

The parallel-plate plastometer is a simple and important instrument to investigate rheological behavior of matter. Especially, it is very useful for materials which have yield values. But there is only Scott's theory for this case and he made rather rough assumptions in the beginning of the calculation, so it is not sure whether the final result is reasonable or not. We have made calculation starting from the general equation of motion for the Bingham solid and obtained the relationship between the thickness of the specimen h and the time t when a constant force is applied perpendicular to the plates. Calculations have been made for the two cases: (a) The specimen is larger than the plates; thus the area under compression is constant. (b) The plates are larger than the specimen; thus the volume of the specimen is constant. Our final results (34) and (40) enable us to determine the yield value and the coefficient of plastic viscosity η . And our results reduces to the equations derived by Stefan and Healey when the yield value f is neglected.

(Received Jan. 5, 1960)

1. は し が き

平行板プラストメーターは装置として簡単なものであり、物体のレオロジカルな性質を調べるうえに重要なものである。ニュートン液体¹⁾に対しては Stefan および Healey²⁾により簡単な公式が得られている。近年 Dienes³⁾は Navier-Stokes の式から出発してある近似のもとに同じ結果を導いた。この計算は Stefan や Healey の公式がどのような条件のもとに成り立つかを明らかにしている点で重要である。平行板プラストメーターは高粘度の非ニュートン流動をする物体、とくに降伏点を有する物体に対して意味があるが、この場合に対する理論としては Scott⁴⁾のがあるだけである。Scott の取扱いでは最初からかなりひどい近似を入れているので、最後の結果がどの程度信頼できるか明らかでない。ここでは降伏点を示すもっとも簡単な物体としてビンガム物体をとり、なるべく近似を入れずに

計算を行なう方針をとった。まず、ビンガム物体に対する一般運動方程式から出発して、平板に一定の外力が作用したときの平板間距離 h と時間との関係を導く。この関係式にパラメーターとして平板間にはさまれているビンガム物体の降伏値 f と塑性粘性率 η とがはいっている。(Fig. 1 参照)

2. 基礎方程式

まず、平行板プラストメーターの中心を座標の原点に選び、板面に垂直に z 軸をとり、円筒座標 (r, θ, z) を用いることにする。そうすると降伏値 f 、塑性粘性率 η なるビンガム物体が運動している場合、応力-ひずみの関係式を円筒座標を用いてテンソル形式で表わすと一般につぎのようになる。ただし物体は非圧縮性とする。 $p_{rr}, p_{\theta\theta}, p_{zz}, p_{\theta z}, p_{zr}, p_{r\theta}$ は応力テンソルの成分、 v_r, v_{θ}, v_z は速度ベクトルの成分で、 p は静圧力を意味する。

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ p_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \\ p_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ p_{\theta z} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) + f \\ p_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + f \\ p_{r\theta} &= \eta \left(\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) + f \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Fig. 1 Cylindrical coordinates

* 原稿受付 昭和35年1月5日

** 東京都立大学理学部物理学教室

問題の性質から明らかなように, $v_\theta=0$ であつ v_r, v_z は θ にはよらない. したがって, いまの場合上式はつぎのように簡単になる.

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ p_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \frac{v_r}{r} \\ p_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ p_{\theta z} &= f \\ p_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + f \\ p_{r\theta} &= f \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

以下プラストメーターの板面距離が円板の半径に比べて充分小さい場合に限る. このときには $\partial v_r / \partial r \approx 0$ と考えるから, (2)により $p_{rr} = -p$ となる. Fig 2 において斜線をつけた部分の力のつりあいを考えれば $z=0$ で $p_{zr}=0$ なることを考慮してつぎの式が導かれる.

$$(pr d\theta z) - \{ pr d\theta z + \frac{\partial}{\partial r}(pr d\theta z) dr \} + p_{zr} r d\theta dr = 0 \quad (3)$$

すなわち, ずれ応力 p_{zr} はつぎのようになる.

$$p_{zr} = \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial r}(pr) \quad (4)$$

ところで(2)の p_{zr} の式は, z が正または負であるにしたがってそれぞれつぎのように書くべきものである.

$$\left. \begin{aligned} p_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - f, \quad z > 0 \\ p_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + f, \quad z < 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

いま, $z > 0$ の場合を考える. z が充分小さなところでは p_{zr} の大きさは降伏値 f に達せず, 相対速度は生じないものと考えられる. 相対速度の現われる最小の z の値は $p_{zr} = -f$ で決められる. あるいは

$$\frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial r}(pr) = -f \quad (6)$$

これから

$$z = -\frac{fr}{\partial(pr)/\partial r} \quad (7)$$

f は定数であるから, ビンガム物体の流動している部分に対しては Navier-Stokes の式をそのまま適用することができる. 平行板プラストメーターでは速度は充分小さく 2 乗の項は無視されるからつぎのように簡単になる.

Fig. 2 Equilibrium of forces

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \eta \nabla^2 v_r \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \eta \nabla^2 v_z \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3. 平行板プラストメーターの基礎方程式

(8)の第2式から

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \nabla^2 v_z = \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (9)$$

平行板距離が充分小さいとき v_z は小さく, (9)の右辺はほとんど零に等しい. したがって, p は z には無関係で r と t だけの関数とみなされる. ゆえに(8)の第1式は

$$\frac{dp}{dr} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

となる. $\partial v_r / \partial r$ は $\partial v_r / \partial z$ に対して無視できるから

$$\frac{dp}{dr} = \eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (11)$$

z について積分して

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{p'}{\eta} z + c \quad (12)$$

ただし p' は dp/dr を意味する. Fig. 3 からわかるように $\partial v_r / \partial z$ は $z = -fr / (pr)'$ で零となる. このことから(12)における c の値が定まり, $\partial v_r / \partial z$ はつぎのようになる.

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{p'}{\eta} z + \frac{fr}{\eta} \frac{p'}{(pr)'} \quad (13)$$

z について積分すればただちに v_r がつぎのように求まる.

$$v_r = \frac{p'}{2\eta} z^2 + \frac{fr}{\eta} \frac{p'}{(pr)'} z + c'$$

板面ではビンガム物体と面との間に相対的なスリップはないと考えるから, v_r は $z = h/2$ で零である. このことから c' が定まり, v_r は次式のようになる.

$$v_r = \frac{p'}{2\eta} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{fr}{\eta} \frac{p'}{(pr)'} \left(z - \frac{h}{2} \right) \quad (14)$$

つぎに連続の式

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0$$

より h に関する式を導く. 上式を z について $-h/2$ から $h/2$ まで, すなわち平行板間で積分すれば

$$|rv_z|_{-h/2}^{h/2} = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) dz \quad (15)$$

あるいは

$$-\frac{r\dot{h}}{2} = \int_0^{-fr/(pr)'} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) dz + \int_{-fr/(pr)'}^{h/2} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) dz \quad (16)$$

Fig. 3 Velocity profile

さて $0 \leq z \leq -fr/(pr)'$ では v_r は一定で、 $z = -fr/(pr)'$ における v_r の値は

$$\bar{v}_r = -\frac{f^2 p' r^2}{2\eta \{(pr)'\}^2} - \frac{fh}{2\eta} \frac{p'r}{(pr)'} - \frac{h^2}{8\eta} p' \quad (17)$$

に等しい。したがって(16)の右辺第1項は

$$\begin{aligned} \int_0^{-fr/(pr)'} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) dz &= -\frac{fr}{(pr)'} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{v}_r) \\ &= \frac{f^3}{2\eta} \frac{r}{(pr)'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^3 p'}{\{(pr)'\}^2} \\ &\quad + \frac{f^2 h}{2\eta} \frac{r}{(pr)'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^2 p'}{(pr)'} + \frac{fh^2}{8\eta} \frac{r}{(pr)'} \frac{\partial}{\partial r} (p'r) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。つぎに(16)の右辺第2項に(14)を入れると

$$\begin{aligned} \int_{-fr/(pr)'}^{h/2} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) dz &= \frac{1}{2\eta} \left[-\frac{h^3}{12} - \frac{fh^2}{4} \frac{r}{(pr)'} + \frac{f^3}{3} \frac{r^3}{\{(pr)'\}^3} \right] \frac{\partial}{\partial r} (p'r) \\ &\quad + \frac{f}{\eta} \left[-\frac{h^2}{8} - \frac{fh}{2} \frac{r}{(pr)'} - \frac{f^2}{2} \frac{r^2}{\{(pr)'\}^2} \right] \frac{\partial}{\partial r} \frac{p'r^2}{(pr)'} \end{aligned} \quad (19)$$

以上より(16)は結局つぎのようになる。

$$\begin{aligned} -\frac{r\dot{h}}{2} &= \frac{f^3}{6\eta} \left[\frac{3r}{(pr)'} \frac{\partial}{\partial r} \frac{p'r^3}{\{(pr)'\}^2} + \frac{r^3}{\{(pr)'\}^3} \frac{\partial}{\partial r} (p'r) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3r^2}{\{(pr)'\}^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{p'r^2}{(pr)'} \right] - \frac{fh^2}{8\eta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{p'r^2}{(pr)'} \\ &\quad - \frac{h^3}{24\eta} \frac{\partial}{\partial r} (p'r) \end{aligned} \quad (20)$$

r について積分すれば

$$-\frac{r^2 \dot{h}}{4} + c = \frac{f^3}{6\eta} \frac{r^4 p'}{\{(pr)'\}^3} - \frac{fh^2}{8\eta} \frac{r^2 p'}{(pr)'} - \frac{h^3}{24\eta} r p'$$

$r \rightarrow 0$ とすれば $c=0$ であることがわかる。したがって

$$\begin{aligned} h^3 \{(pr)'\}^3 p' - 6\eta \dot{h} r \{(pr)'\}^3 \\ + 3fh^2 r p' \{(pr)'\}^2 - 4f^3 r^3 p' = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

あるいは

$$\begin{aligned} 6\eta r (p'r + p)^3 \dot{h} &= p' \{h(p'r + p) - fr\} \\ &\quad \times \{h(p'r + p) + 2fr\} \end{aligned} \quad (22)$$

$(pr)' = (p'r + p)$ であるが、いまかりに右辺第2項の p を無視すれば(21)は Scott の導いた式

$$g^3 - g^2 \left(\frac{3f}{h} - \frac{6\eta \dot{h}}{h^3} \right) + \frac{4f^3}{h^3} = 0 \quad (23)$$

と一致する。ただし $g = -dp/dr$ である。

4. h と t との関係

まず(21)から p を求めるために p を

$$p = p_0 + p_1 \dot{h} + p_2 \dot{h}^2 + \dots \quad (24)$$

のように $\dot{h}$ で展開して(21)に入れば

$$\begin{aligned} h^3 \{(p_0' r + p_0) + (p_1' r + p_1) \dot{h} + \dots\}^3 \\ \times (p_0' + p_1' \dot{h} + p_2' \dot{h}^2 + \dots) \\ - 6\eta \dot{h} r \{(p_0' r + p_0) + (p_1' r + p_1) \dot{h} + \dots\}^3 \\ + 3fh^2 r (p_0' + p_1' \dot{h} + p_2' \dot{h}^2 + \dots) \\ \times \{(p_0' r + p_0) + (p_1' r + p_1) \dot{h} + \dots\}^2 \\ - 4f^3 r^3 (p_0' + p_1' \dot{h} + p_2' \dot{h}^2 + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$\dot{h}$ の零次の係数を零とおけば

$$h^3 (p_0' r + p_0)^3 p_0' + 3fh^2 r p_0' (p_0' r + p_0)^2 - 4f^3 r^3 p_0' = 0$$

あるいは

$$p_0' \{h(p_0' r + p_0) - fr\} \{h(p_0' r + p_0) + 2fr\}^2 = 0 \quad (26)$$

これから

$$p_0 = fr/2h \quad (26a)$$

または

$$p_0 = -fr/h \quad (26b)$$

つぎに(25)で1次の係数を零とおけば p_1 が求められる。(26a), (26b)に対応して

$$p_1 = 3\eta r^2/h^3 + c \quad (27a)$$

$$p_1 = -3\eta r^2/5h^3 + c \quad (27b)$$

ゆえに圧力 p は

$$p = \frac{fr}{2h} - \frac{3\eta r^2}{5h^3} \dot{h} + c \dot{h} \quad (28a)$$

あるいは

$$p = -\frac{fr}{h} + \frac{3\eta r^2}{h^3} \dot{h} + c \dot{h} \quad (28b)$$

$f=0$ とした場合に p はニュートン液体に対するものに一致しなければならないから、(28a)をすて(28b)をとる。

平行板に働く荷重を F とすると、力のつりあいの式は

$$\int_0^R p \cdot 2\pi r \cdot dr = F + \pi R^2 p_0 \quad (29)$$

となる。ここに R は試料の半径である。 p_0 は大気圧で(28b)において $r=R$ において得られる。(28b)を(29)に代入して、

$$F = -\frac{3\pi\eta R^4}{2h^3} \dot{h} + \frac{\pi R^3}{3h} \quad (30)$$

ここで試料が平行板からはみ出している場合(I)と平行板の間にある場合(II)とを分けて考える。

(I) $R=a$ の場合

ここに a は円板の半径である。(30)を書き直すとつぎのようになる。

$$-\dot{h} = \frac{2h^3}{3\pi\eta a^4} \left(F - \frac{\pi a^3 f}{3h} \right) \quad (31)$$

いま

$$h_t = \frac{\pi a^3 f}{3F} \quad (32)$$

とおけば、 $h \rightarrow h_t$ のとき $-\dot{h} \rightarrow 0$ となる。したがって、 $\dot{h}=0$ となる h_t から降伏値 f が求められる。また(31)から

$$\log \left(-\frac{\dot{h}}{h^3} \right) = \log \left(F - \frac{\pi a^3 f}{3h} \right) + \log \left(\frac{2}{3\pi\eta a^4} \right) \quad (33)$$

したがって $\log(-\dot{h}/h^3)$ を $\log(F - \pi a^3 f/3h)$ に対してプロットし、その直線が縦軸を切る長さから η が求まる。とくに $\pi a^3 f/3h \ll 1$ として、(31)を h について h_0 から h まで積分すれば次式が得られる。

$$\frac{3\pi a^4}{4} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) + \frac{f\pi^2 a^7}{6F} \left(\frac{1}{h^3} - \frac{1}{h_0^3} \right) = \frac{F}{\eta} t \quad (34)$$

ここで $f=0$ とおけばニュートン液体の場合に Stefan により導かれた式

$$\frac{3\pi a^4}{4} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) = \frac{F}{\eta} t \quad (35)$$

と完全に一致する。

(II) $\pi R^2 h = V = \text{一定の場合}$

(30) はつぎのように書き直される。

$$F = \frac{3\eta V^2}{2\pi h^5} \dot{h} + \frac{fV^{3/2}}{3\pi^{1/2} h^{5/2}} \quad (36)$$

あるいは

$$-\dot{h} = \left(F - \frac{fV^{3/2}}{3\pi^{1/2} h^{5/2}} \right) \frac{2\pi h^5}{3\eta V^2} \quad (37)$$

いま

$$h_l = \left(\frac{V^{3/2} f}{3\pi^{1/2} F} \right)^{2/5} \quad (38)$$

とおくとき、 $h \rightarrow h_l$ のとき $-\dot{h} \rightarrow 0$ となる。したがって、 $h=0$ となる h_l から降伏値 f が求められる。また (37) から

$$\log \left(-\frac{\dot{h}}{h^5} \right) = \log \left(F - \frac{fV^{3/2}}{3\pi^{1/2} h^{5/2}} \right) + \log \left(\frac{2\pi}{3\eta V^2} \right) \quad (39)$$

$\log(-\dot{h}/h^5)$ を $\log \left(F - \frac{fV^{3/2}}{3\pi^{1/2} h^{5/2}} \right)$ に対してプロットし、直線が縦軸を切る長さから η が求められる。

いま $fV^{3/2}/3\pi^{1/2} F h^{5/2} \ll 1$ と仮定して、(37) を h について h_0 から h まで積分すれば次式が得られる。

$$\frac{3V^2}{8\pi} \left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{h_0^4} \right) + \frac{fV^{7/2}}{13F\pi^{3/2}} \left(\frac{1}{h^{13/2}} - \frac{1}{h_0^{13/2}} \right) = \frac{F}{\eta} t \quad (40)$$

ここで $f=0$ とおけばニュートン液体に対して Healey により導かれた式

$$\frac{3V^2}{8\pi} \left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{h_0^4} \right) = \frac{F}{\eta} t$$

と完全に一致する。

参 考 文 献

- 1) J. Stefan, Sitzungsber. Acad. Wiss. Wien, **69**, 713 (1874), J.J. Bikerman, J. Colloid Sci., **29**, 163 (1947) 参照
- 2) Healey, Trans. Inst. Rubber Ind., **1**, 334 (1925)
- 3) G.J. Dienes and H.F. Klemm, J. Appl. Phys., **17**, 458 (1946)
- 4) J.R. Scott, Trans. Inst. Rubber Ind., **7**, 169 (1931), **10**, 481 (1934/35)

樹脂とガラスの接着特性について (Resin-Glass Bond Characteristics) by F.J. McGarry, Bulletin ASTM, No. 235 (Jan. 1959), (TP 33~38) pp. 63~68, 図 10, 表なし, 文献 4

強化プラスチックの補強材ガラス繊維と重合性三次元網状樹脂の接着特性力に関する基礎的研究として、ガラス棒あるいはモノフィラメントを樹脂中に注型して接着強度試験を行なっている。実験法は(1)Pyrexガラス棒をいろいろの厚さの円盤状樹脂の中央を貫いて注型とした試験片につき圧縮により接着力を測定する。(2)同様な試験片をねじりにより接着力を測定する。(3)二次元くさび状樹脂の中央にガラス繊維モノフィラメントを注型した試験片を圧縮すると、各断面で異なる種々の応力を受けたときの樹脂とモノフィラメントとの相互接着力の関係が一度に観察できる。ガラスの表面処理ガラス棒の直径、樹脂円盤の厚さ、樹脂

の種類を変えて試験片を造り、流体圧式試験機で荷重—変位曲線を描かせた。得られた結果はポリエステル樹脂の場合はガラスにおけるいろいろな表面処理の影響がほとんど認められず、破壊は常に両者の界面で発生し、ガラス表面をあらくして摩擦を増さないかぎり相互の接着強度はそれぞれの強度よりはるかに低く破断面も美麗である。これはガラス表面の汚変、ポリエステル樹脂の局部的劣化あるいは不完全キュアによるものだろうとしている。ポリエステル樹脂ガラス系の場合はキュアにおける樹脂の収縮、両者の熱膨張係数の相違などによる摩擦の増大はきわめて大切である。これに対してエポキシ樹脂—ガラス系の破壊は相互の中間界面では決して起らず、相互の接着力は両者の真の結合力凝結力に近くなっていて、二成分の実質的融合を物語っている。(伊藤勝彦)