論文

岩石の曲げ強さに関する統計学的研究*

上 野 五 郎**

A Statistical Study on the Bending Strength of Rock

by

Gorō UENO

(Yamaguchi University)

One of the chief reasons why the bending strength is greater than the tensile strength in rocks, is that fractures can be caused on the parts of the rock also where the tensile stresses are not maximum, by the effect of Griffith cracks distributed at random in a specimen.

For the distribution of the strength of Griffith cracks, the present writer has adopted Weibull's distribution. It is because it has an advantage in being easily treated as compared with the normal distribution introduced by the other investigators, and because the two distributions are closely approximate unless the variation is too great, and the coefficient of uniformity m in Weibull's distribution can be related, by the use of Γ functions, to the coefficient of variation c .

By applying the theory of the probability of minimum value to the strength of Griffith cracks in a specimen, the distribution of the bending and tensile strengths can be calculated. The both strengths accord with Weibull's distribution, and the ratio of the two strengths are given as the function of m .

The experiments the writer carried on with Akiyoshi marble show that the bending and tensile strengths accord with the distribution by Weibull, and the ratio of the two strengths coincides with its theoretical value on a coefficient of confidence of 90%.

Theoretically the coefficients of variation of the two strengths are equal, and it has been tested in the experiment also that those of the experimental values are equal.

(Received Feb. 18, 1960)

1. 緒 言

岩石はりの曲げ破壊試験を行なえば、他のぜい性材料と同様に曲げ強さは単軸引張強さより数10%大に測定されることは周知のことである。

その原因はいろいろあろうが、強さのばらつきが相当大きいこととも関連して主要な一原因をなすものとして次のことが考えられる。すなわち、曲げ強さはりを弾性体とみなして曲げモーメントを加えたとき、引張応力が最大となる引張側表皮部分の破壊時引張応力として計算されるが、実際に破壊が発生する箇所は必ずしも引張側表皮部分とはかぎらず、力学的弱点の存在によっては内部から破壊が起こる可能性がある。ことに岩石では一般に相当な空隙率、吸水率を有することや、またたとえば雲母、方解石などを含むときはそこに非常にく離しやすいへき開面が存在すること

などから岩石内部に多数の弱点があると考えられる。個々の弱点の強度は一樣でないから内部から破壊することも多く、そのときにも表皮部分から破壊したかのように計算しなければならないことが、曲げ強さの引張強さより大なることの主要な一因をなしているといえよう。このことを理論的に取り上げるためには弱点の分布あるいは破壊への進行を統計学的に考察する必要がある。

ぜい性体の強度に関する確率論は従来主として金属の低温ぜい性などを対象として研究されている。岩石の強度のばらつきは金属に比べて非常に大きいにもかかわらず、なんとなく見過がれているのが現状であるが、ばらつきが大きいからこそ鉱山現場の保安その他の諸問題と関連してそれを統計的に研究しなければならない。

2. Griffith クラックによる最小値確率論

岩石内部の弱点としてまず考えられるのは数 mm²

* 原稿受付 昭和35年2月18日

** 正員 山口大学工学部

ないし m^2 程度の面積にわたるき裂であるが、これは試験片寸法にもよるけれども試験片成形の過程でそれをこわしてしまうし、たとえそうでなくとも破壊試験を行なったときに明らかに区別されるので、ここで弱点として考慮するのはいわゆる Griffith クラックである。

(I) 単軸引張強さに対して

Griffith 理論およびそれとぜい性破壊の諸問題との関係はすでに横堀教授によってまとめられたものがあるが^{1,2)}、同一体積の試験片による単軸引張強さのばらつきは次式によって説明される。

$$g(S) = nf(S)\{1-F(S)\}^{n-1} \quad (1)$$

$$G(S) = \int_{-\infty}^S g(S) dS = 1 - \{1-F(S)\}^n \quad (2)$$

ここで S : 引張強さ

$f(S)$: Griffith クラックの強度の確率密度

$F(S)$: " 累積分布関数

$g(S)$: 試験片強度の確率密度

$G(S)$: " 累積分布関数

n : 1 試験片内のクラック数

単軸引張応力に対してクラック強度は確率密度 $f(S)$ の無限母集団を形成し、1 試験片内には母集団から n 個のクラックが抽出されたものとすれば、試験片の強度は n 個中最も弱いクラックの強度に等しくなると考え、そのような S の最小値の分布を計算すれば $g(S)$, $G(S)$ が求められる。 $1-G(S)$ は応力 S の状態で試験片が破壊しない確率であるが、(2)式を変形し

$$B = -\log\{1-G(S)\} = -n \log\{1-F(S)\} \quad (3)$$

とおけばこれは risk of rupture と呼ばれる値であって取扱いに便利である。 $F(S)$ は材料に個有の関数であるから S に数値を与えたときの B の値は S なる均一応力分布における試験片の破壊しやすさを表す。また、 $G(S) = 0.5$ 、したがって $B = -\log 0.5$ に対応する S の値は強度の median を示すことになる。

$F(S)$ の表わし方によって $G(S)$ の形も変わってくる。 $F(S)$ として正規分布関数をとる人々もあるが、Weibull は

$$F(S) = 1 - \exp(-\alpha S^m) \quad (4)$$

を採用した⁴⁾。 $\alpha > 0$, $m > 1$ でもに材料によって決まる定数である。筆者が数値計算したところでは m の値が 2.5 以上ならばこれは正規分布関数(変動係数 40% 以下)ときわめてよい近似を示している。(4)式を用いたほうが $G(S)$ の形が簡単であること、寸法効果が簡単に表わされることなどの理由により、以後 $F(S)$ の形として(4)式をとることにする。

(1), (2)式に(4)式を代入すれば

$$g(S) = n\alpha m S^{m-1} \exp(-\alpha S^m) \\ = \beta m S^{m-1} \exp(-\beta S^m) \quad (\beta = \alpha) \quad (5)$$

$$G(S) = 1 - \exp(-\beta S^m) \quad (6)$$

が得られる。普通ぜい性破壊強度の分布は近似的に正

規分布とみなしてよいとされているが、(6)式が形式的には(4)式で α の代わりに β と置きかえたものに等しく、(4)式の分布が正規分布に近似していることを考慮すれば、(6)式を採用することは現象的にならず矛盾しない。

なお、クラックの核生成論の立場から研究された結果も(6)式と形式的には同じものが得られ、二者の統合理論が正しいと横堀教授は説明しておられる¹⁾。

(II) 均一性係数と変動係数

m は Weibull によって均一性係数と呼ばれ⁴⁾、 m の大なるほどその材料の強度のばらつきは小となる。 m を求めるには(6)式を変形した

$$\log[-\log\{1-G(S)\}] = \log \beta + m \log S$$

を用い、実験値よりその直線を描き直線の傾斜として求める直接の方法が考えられるが、むしろ次のような計算によって変動係数(標準偏差/平均値)と関係づけたほうが簡単である。

μ , σ^2 をそれぞれ S の母平均、母分散とすれば

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} S g(S) dS, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S^2 g(S) dS - \mu^2$$

この定積分に $g(S)$ として(5)式を代入し、 $x = S^m$ とおけば、 $S > 0$, $m > 1$, $\beta > 0$ であるから

$$\int_0^{\infty} S g(S) dS = \beta \int_0^{\infty} x^{1/m} \exp(-\beta x) dx$$

$$= \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) / \beta^{1/m}$$

$$\int_0^{\infty} S^2 g(S) dS = \beta \int_0^{\infty} x^{2/m} \exp(-\beta x) dx$$

$$= \Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) / \beta^{2/m}$$

$$\therefore \mu = \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) / \beta^{1/m}$$

$$\sigma^2 = \Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) / \beta^{2/m} - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right]^2 / \beta^{2/m}$$

したがって

$$c = \sigma / \mu = \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) / \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right\}^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (7)$$

測定値から変動係数 c を求めることは容易であり、 c と m とは 1 対 1 の対応をするから Fig. 1 によって m の値を知ることができる。

(III) 曲げ強さに対して

曲げ破壊のような不均一応力分布に対しては、(3)式の B の値を微小体積要素について考え、それを積分することによって試験片全体の B の値を得る。 $F(S)$ として(4)式を用い、 $n = kV$ (k : クラック密度、 V : 試験片体積)とすれば

$$B = k \int_V [-\log\{1-F(S)\}] dV$$

$$= k\alpha \int_V S^m dV \quad (8)$$

以下単軸引張の場合は添字 0 を、曲げの場合は b を

添えることにする。

いま, Fig. 2 のような曲げを考え, 応力-ひずみ関係が直線的で引張り側と圧縮側とで対称的であると仮定すれば,

$$\text{曲げ強さ } S_b = (l - l_1)Ph/I$$

点 (x, y) の応力は

$$0 \leq |x| \leq l_1 \text{ では } S_1 = (y/h)S_b$$

$$l_1 < |x| \leq l \text{ では } S_2 = \{(l - |x|)/(l - l_1)\}(y/h)S_b$$

ぜい性材料では曲げ破壊に圧縮応力の影響を考える必要がないから $0 \leq y \leq h$ の範囲で計算すれば

$$\begin{aligned} B &= 2k\alpha \left(\int_0^h S_1^m l_1 dy + \int_0^h \int_{l_1}^l S_2^m dx dy \right) \\ &= k\alpha V_b \frac{(l_1/l)m+1}{2(m+1)^2} S_b^m \end{aligned} \quad (9)$$

この値は曲げ強さが S_b と計算されるような応力分布状態において, $0 \leq x \leq l_1$, $y=h$ 以外の箇所からも破壊が発生しうることの考慮したときの破壊の危険性を示す。また, 曲げ強さの累積分布関数は

Fig. 1 The relation between the coefficient of variation c and the coefficient of uniformity m

Fig. 2 The specimen of bending test (the moment of inertia of section : I)

$$G(S) = \{1 - \exp(-B)\}$$

$$= 1 - \exp \left\{ -k\alpha V_b \frac{(l_1/l)m+1}{2(m+1)^2} S_b^m \right\} \quad (10)$$

これと(6)式を比較すれば, S_b^m の係数を $-\beta$ とおくことにより, 曲げ強さもやはり Weibull の分布に従うことがわかる。

S_b の指数 m は材料によって決まる定数であるから, (6), (10) および (7) 式より考えて, 同一材料で試験すれば単軸引張強さも曲げ強さも同一変動係数のばらつきを示さねばならない。なお, これは引張応力が破壊の原因となっているねじりや圧裂についてもいえることである。

いっぽう, 単軸引張強さ S_0 に対しては

$$B = k\alpha V_0 S_0^m \quad (11)$$

$B = -\log 0.5$ に対応する S_b , S_0 はその median を与え, また, m が 2.5 以上ならば Weibull の分布は正規分布と近似しているので, 強度の median と平均値はほとんど等しいとしてさしつかえなく, (9), (11) 式より平均強さの比は

$$\bar{S}_b / \bar{S}_0 = \left(\frac{V_b}{V_0} \right)^{-1/m} \left\{ \frac{2(m+1)^2}{(l_1/l)m+1} \right\}^{1/m} \quad (12)$$

で与えられる。

3. 実験結果と検討

材料は普通極細目と呼ばれる細粒の秋吉大理石で, 白色に灰色の斑がはいっており, 比重 2.70, 吸水率 0.09% である。

引張試験片は長さ 100 mm の角柱材料の両端面を新興通信工業 KK 製 SP-3 接着剤によって軟鋼製端子に接着した後, 円筒研磨機にかけて約 24φ の円柱に仕上げると同時に, 両端子中心を結ぶ軸と試験片軸とを一致させた。小鋼球をはさむことによって摩擦を減少させた球面座を有するつかみ, および鎖を介してその端子を引張れば, 試験片は曲げモーメントを受けることなく単軸引張応力のみを受け, Fig. 3 のような引張強さの分布を示した。

また, 曲げ試験は 25×25×100 角柱試験片を用い, Fig. 2 の $2l=80$ mm, $l_1/l=1/3$ とした。曲げ強さの分布を Fig. 4 に示す。

これらの分布に適合性検定を行なった結果は正規分布に適合し, 後に示すように変動係数 $c < 40\%$ であるので Weibull の分布に従うとして取り扱ってさしつかえない。

これらの実験値から得られた統計量は Table 1 のようになる。ここで $s/\bar{S}$ は変動係数 c の点推定量であるが, 引張強さと曲げ強さの関係を明らかにするためにはその区間推定や $c_0 = c_b$ の検定をしなければならぬ。

$c = s/\mu$ で s , $\bar{S}$ はそれぞれ母標準偏差 σ , 母平均 μ

の推定量であるけれども、一般に μ の推定精度に比べ σ の推定精度はわるいので、 c の推定精度も主として s に依存する。また、 c は平均値を1とみなしたときの標準偏差であるとも考えられる。一般に分散の形にすれば

$$Pr(Ns^2/\chi_2^2 < \sigma^2 < Ns^2/\chi_1^2) = 1 - \alpha$$

ただし 自由度 $=N-1$

$$Pr(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \alpha/2$$

$$Pr(\chi^2 > \chi_2^2) = \alpha/2$$

の関係を利用し χ^2 表を用いて σ^2 の区間推定をすることができる。したがってこの式の s の代わりに $s/\bar{S}$ を、 σ の代わりに c をおきかえてやれば、信頼係数 $1-\alpha$ で

$$(N/\chi_2^2)^{1/2} s/\bar{S} < c < (N/\chi_1^2)^{1/2} s/\bar{S} \quad (13)$$

とみなしても大差ない。

Table 2 における c の point estimation とは引張り、曲げおよびその平均値としての $s/\bar{S}$ であり、int. estimation とは(13)式で信頼係数90%としたときの c の区間の計算値である。更にそれら c の値をもとに

Fig. 3 Histogram of tensile strength of Akiyoshi marble

Fig. 4 Histogram of bending strength of Akiyoshi marble

Table 1 Statistical values (Akiyoshi marble)

	Total number, N	Strength (kg/cm ²)			Sample standard deviation, s (kg/cm ²)	$s/\bar{S}$ (%)
		min	max	Mean, $\bar{S}$		
Tension	30	37.8	90.4	62.5	11.4	18.2
Bending	33	63.8	148.4	110.7	22.4	20.2

して Fig. 1 より求めた m の値、実験に關与した試験片体積 V を考慮しつつ(11)式より求めた $\bar{S}_b/\bar{S}_0$ の値をその下方に掲げた。 m の推定値としては6.0、区間推定としては引張りと曲げで重なっている区間をとって4.9~7.3 (信頼係数90%)をとるべきであろう。また、それに基づく $\bar{S}_b/\bar{S}_0$ の値はそれぞれ1.73および1.62~1.88である。いっぽう、実測された Table 1 の $\bar{S}_b$ 、 $\bar{S}_0$ から求めた比は1.77であり、信頼係数90%で区間推定すれば1.66~1.88が得られるから両者は非常によい一致を示したとしてよいであろう。

なお、前述のように Weibull の分布からの結果として、単軸引張強さの分布も曲げ強さの分布も同一変動係数を持たなければならない。Table 2 で単軸引張り、曲げとの平均としての c の値を考えたのもその前提があったからである。 c を一種の標準偏差とみなし、 $c_b^2 = c_0^2$ という等分散の仮定を F 検定してみると

$$F = \frac{N_b c_b^2 / (N_b - 1)}{N_0 c_0^2 / (N_0 - 1)} = 1.22$$

$$\alpha = 0.10 \text{ で } F_0 = 1.86 \quad (\alpha: \text{危険率})$$

$F < F_0$ であるから、危険率を10%にとっても等分散の仮定は棄却できないことになる。したがって、単軸引張強さと曲げ強さは同一変動係数を持つとしてさしつかえない。これは Weibull の式を導入したことの正当性を消極的にはあるが支持する一つの証拠だといえよう。

岩石の曲げ強さが単軸引張強さより大である原因は決して一つではないが、上述の確率論が実験とよい一致を示したことは Griffith クラックあるいはクラックの核生成の問題がその主要な一原因であることを証明している。その他の原因としては、たとえば既に堀部教授がはりの中立軸の移動によるとして実験的に移動を確かめておられる。山口大学石原助教と筆者が秋吉大理石(細粒)について測定したところでは、応力-ひずみ曲線の形は引張応力下と圧縮応力下では相当異なるようである。これは当然堀部教授のいわれる中立軸の移動をきたすものと思われるので、それを考慮に

Table 2 The coefficient of variation c , the coefficient of uniformity m , and the ratio of mean strengths $\bar{S}_b/\bar{S}_0$. (Akiyoshi marble, $V_b/V_0 = 1.21$)

	Point estimation			Interval estimation	
	Tension	Bending	Mean	Tension	Bending
c (%)	18.2	20.2	19.2	15.1~23.2	16.2~25.4
m	6.4	5.7	6.0	7.9~4.9	7.3~4.5
$\bar{S}_b/\bar{S}_0$	1.69	1.77	1.73	1.57~1.88	1.62~1.95

入れれば(9)式の右辺の係数は修正を必要とするであろう。

また、 m の値は $\overline{S} \propto V^{-1/m}$ の形で寸法効果に関与するからその面から実験的に研究することは、大理石以外の岩種に実験を広げることとともに今後に残された興味ある課題である。

4. 結 言

(1) Griffith クラックの強度がWeibullの分布に従うとの仮定に基づく最小値確率論あるいはクラックの核生成論から導かれた、曲げ強さと単軸引張強さの平均値の比は(12)式で表わされる。秋吉大理石(細粒)による実験値は理論値とよい一致を示す。

(2) 変動係数40%以下ならば正規分布はWeibullの分布(4)あるいは(6)と近似しており、秋吉大理石(細粒)では引張強さ、曲げ強さともにWeibullの分布に従うとしてさしつかえない。

(3) Weibull のいう均一性係数 m の値は(7)式によって変動係数 c と関係づけられる。同一材料ならば引張強さに対しても曲げ強さに対しても m の値は変わらず、したがって変動係数も等しい。秋吉大理石(細粒)では危険率を10%にとっても両変動係数に有意差はないと検定された。

終りにいろいろ御指導をいただいた山口大学石原助教授、曲げ強さのデータを供与していただいた同学萩野助教授、ならびに実験、計算に御協力を受けた小池、高野両君に深く感謝の意を表わします。

参 考 文 献

- 1) 横堀, 材料強度学(昭30)
- 2) " , 材料試験, 5, 32(昭31) など
- 3) Frenkel and Kontorova, J. Phys. U.S.S.R., 1, 108 (1943)
- 4) Weibull, Ing. Vetenskaps Akad. Hand., No. 151 (1939), *Ibid.*, No. 153 (1939)
- 5) 堀部, 日本鉱業会誌, 71, 806(昭30)

有 機 材 料

アクリル樹脂の破壊現象 (Fracture Phenomena and Molecular Weight in Polymethyl Methacrylate) S.B. Newman and I. Wolock, J. Appl. Physics, Vol. 29, No. 1 (Jan. 1958) pp. 49~52, 図7, 表なし。

ポリマーの破断面の実験的研究はその粘弾性挙動に関連した破壊機構の研究に、特に他の工業材料の破壊特性との類似性に役立つ。ポリマーでもその破壊に影響する因子としては、荷重状態、ひずみ速度、温度、湿度などの外的環境、分子量とその分布などがあげられるがアクリル樹脂注型品について5種類の分子量の異なる試料について一定引張速度における破壊(温度23°C, 相対湿度50%)と分子量の関係が検討されている。破断面には銀蒸着を施して光学顕微鏡で破断面の状態が調べられている。破断面には明瞭な2種類の異なった破壊機構が存在することを示唆していて、引張速度の影響に関しては Zandman の結果と類似している。(伊藤勝彦)

急冷焼入れポリエチレンの結晶化回復 (Crystalline Recovery of Quenched Polyethylene) R.L. Collins, J. Polym. Sci., Vol. 27, No. 115 (Jan. 1958) pp. 75~82 図2, 表2。

中庄法ポリエチレン Marlex 50 の溶融物を25°C, 66°C および106.4°Cに急冷焼入して、時間 t とともに結晶化が回復進行するのを陽子磁気共鳴で測定すると、 $t=0.1 \sim 1000$ 時間の範囲では結晶化度 $X=A+B \log t$ の関係が成り立つ。結晶化の速度決定因子が無定形部分の拡散であると仮定すると係数 B は拡散係数と同じ温度変化をするはずであり、Marlex 50についてこの仮定の妥当性が示されている。また平衡結晶化度の近似式として180°Cに1時間保った後指数関数的に冷却させて X を測定した値が選ばれている。この結果 Marlex 50 では平衡結晶化度に達するには焼鈍温度100°Cでは数千時間を要する。(伊藤勝彦)