円錐形ノズル内での定常粘性流動*

岡 小 天**

The Steady Flow of a Viscous Fluid through a Conical Nozzle

by

Syoten OKA

(Department of Physics, Tokyo Metropolitan University, Setagaya-ku, Tokyo)

The purpose of this paper is to present a theory of the steady flow of Newtonian liquid through a conical nozzle. The equation of motion of viscous liquid has been treated on the following assumptions: i) the liquid is incompressible; ii) the motion of liquid is not turbulent; iii) the motion is steady; iv) no body force acts on the liquid; v) the motion has an axial symmetry; vi) there is no slip at the wall; vii) the stream lines are the straight lines passing through the vertex of the cone, that is, the end effect is neglected; viii) the motion is so slow that the inertia term can be neglected.

We have taken a spherical coordinate system r , θ , and ϕ whose origin is at the vertex of the cone. Then the velocity is given by

$$v_r = 3A(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)/4r^2,$$

where α is the semi-angle of the cone, and A is a constant. The expression for the pressure is obtained as follows:

$$p = p_0 + \frac{3}{2}A\eta \left[\frac{\cos 2\theta + 1/3}{r^3} - \frac{\cos 2\alpha + 1/3}{r_1^3} \right],$$

where η is the coefficient of viscosity, and p_0 the atmospheric pressure. Thus the average pressure gradient taken over the spherical surface of radius r is given by

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\frac{3}{2} \frac{A\eta}{r^4} (2 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha).$$

On the other hand, the volume of flow in unit time is given by

$$Q = -\pi A(1 - \cos \alpha)^2(1 + 2\cos \alpha).$$

Eliminating A from the above two equations, we get

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{R^4}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) F(\alpha),$$

where R is equal to $r\alpha$, and $F(\alpha)$ is given by

$$F(\alpha) = \frac{16}{3} \frac{(1 - \cos \alpha)^2(1 + 2\cos \alpha)}{\alpha^4(2 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}.$$

Since $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = 1$, the above equation may be reduced to Poiseuille's equation for a tube of uniform cross section.

From the expression for the velocity v_r we can calculate stress components of the fluid.

Especially, the tangential stress $\sigma_{r\theta}$ is given by

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{3}{2}A\eta \frac{\sin 2\theta}{r^3}.$$

For a given value of r , $\sigma_{r\theta}$ varies as $\sin \theta$ does in contrast with the case of a tube of uniform cross section where tangential stress decreases linearly from a maximum to zero with decreasing distance from the axis of the tube.

(Received Jan. 18, 1963)

1. は し が き

太さが一様な円管内の定常粘性流動に対しては有名

なポアズイユの法則が知られており、また2枚の傾いた平面壁¹⁾の間の二次元的な定常粘性流動に対してはRosenheadの計算がある。しかし円錐形ノズル内での定常粘性流動はまだ理論的に取り扱われていない。

* 原稿受付 昭和38年1月18日

** 東京都立大学理学部

ポアズイユの流れでは、速度こう配は半径方向に対して直線的に変化する。すなわち、接線応力は管壁で最大値をとり、直線的に減少して軸上で最小値零となる。このことは高分子溶液の場合、管壁では分子の配向はよいが、軸に近づくに従いしだいに配向が悪くなることを意味する。そこで一様な円管の代わりに円錐形ノズル内での定常粘性流動を考え、接線応力の分布が円錐の半頂角とともにいかに変わるかを理論的に調べた。さらに流量を計算し、ポアズイユの式に相当する式を導いた。

2. 仮 定

簡単のために液体としてはニュートン液体をとり、かつ次の諸仮定をする。i) 液体は非圧縮性である。ii) 流れは層流である。iii) 流れは定常流である。iv) 液体に外力は働かない。v) 流れは軸対称性をもっている。vi) 管壁上では流速は零である。vii) ノズルの両端の影響が無視できるような範囲内のノズルの部分だけを考え、流線は円錐の頂点を通る直線群で与えられるものとする。viii) 流れは充分にのろくて慣性項は無視できるものとし、Stokes 近似をとる。

3. 運動方程式

円錐の頂点を原点とする球座標 r, θ, ϕ をとる。まず連続の方程式は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

ρ は密度、 $\mathbf{v}$ は速度である。仮定 1) により $\rho = \text{const.}$ であるから

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

仮定 v), vii) により $v_\theta = v_\phi = 0$ であるから、(2) は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) = 0 \quad (3)$$

一般に Navier-Stokes の運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = K - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{3} \nu \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (4)$$

p は圧力、 K は単位質量に働く外力、 ν は運動学的粘性率で、粘性率 η を密度 ρ で割ったものである。仮定 i) ~ v), vii), viii) により (4) は

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \left(r^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \eta \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (6)$$

ただし

$$r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (7)$$

4. 速度分布

(3) から

$$v_r = f(\theta)/r^2 \quad (8)$$

ここに $f(\theta)$ は θ だけの関数である。(8) を (5), (6) に入れ、さらに両式から p を消去すれば

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (f' \sin \theta) \right] + 6f' = 0 \quad (9)$$

θ について積分すれば

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (f' \sin \theta) + 6f = C \quad (10)$$

C は積分定数である。ここで

$$x = \cos \theta \quad (11)$$

とおけば、(10) は

$$(1-x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - 2x \frac{df}{dx} + 6f = C \quad (12)$$

となる。これの一般解は A, B を定数として

$$f = AP_2(x) + BQ_2(x) + \frac{C}{6} \quad (13)$$

$P_2(x)$ は 2 次の第 1 種ルジャンドル関数、 $Q_2(x)$ は 2 次の第 2 種ルジャンドル関数で、それぞれ次式で定義される。

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad (14)$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4} (3x^2 - 1) \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{3}{2} x \quad (15)$$

v_r は円錐の軸上で有限でなければならないから、 $B=0$ 。したがって

$$f = \frac{A}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{6} C \quad (16)$$

円錐形ノズルの半頂角を α で表わせば、仮定 vi) により $f(\alpha) = 0$ となる。これを満たすように C を定めれば

$$f = \frac{3}{4} A (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \quad (17)$$

したがって

$$v_r = \frac{3}{4} A \frac{1}{r^2} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \quad (18)$$

5. 圧力分布

(18) を (6) に入れて θ で積分すれば

$$p = \frac{3}{2} A \eta \frac{1}{r^3} \cos 2\theta + \phi(r) \quad (19)$$

これを (5) に入れると

$$\phi'(r) = -\frac{3}{2} A \eta \frac{1}{r^4}$$

したがって

$$\phi(r) = \frac{1}{2} A \eta \frac{1}{r^3} + \text{const.} \quad (20)$$

ゆえに

$$p = \frac{3}{2} A \eta \frac{1}{r^3} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3} \right) + \text{const.} \quad (21)$$

ノズルの下端 $r=r_1$ での表面圧は一定 (大気圧) p_0 とみなしてよいから

$$p_0 = \frac{3}{2} A \eta \frac{1}{r_1^3} \left(\cos 2\alpha + \frac{1}{3} \right) + \text{const.}$$

したがって

$$p = p_0 + \frac{3}{2} A \eta \left[\frac{\cos 2\theta + 1/3}{r^3} - \frac{\cos 2\alpha + 1/3}{r_1^3} \right] \quad (22)$$

6. 圧力分布

一般に応力成分は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \\ \sigma_{\phi\phi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \\ \sigma_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\phi} &= \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi \cot \theta}{r} \right) \\ \sigma_{r\phi} &= \eta \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right)\end{aligned}$$

これらの式に(18), (22)を入れると

$$\sigma_{rr} = -p_0 - \frac{3}{2} A \eta \left[\frac{3 \cos 2\theta + 1/3 - 2 \cos 2\alpha}{r^3} - \frac{\cos 2\alpha + 1/3}{r_1^3} \right] \quad (23)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = -p_0 - \frac{3}{2} A \eta \left[\frac{\cos 2\alpha + 1/3}{r^3} - \frac{\cos 2\alpha + 1/3}{r_1^3} \right] \quad (24)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{3}{2} A \eta \frac{1}{r^3} \sin 2\theta \quad (25)$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \sigma_{\phi r} = 0 \quad (26)$$

接線応力 $\sigma_{r\theta}$ は $\sin 2\theta$ のように変わるので, 接線応力の分布は一般的な円管の場合に比べてやや内部まで一様になる傾向がみられる.

7. 流量

いま $r=r$ なる任意の球面を通して単位時間に流れる液体の体積を Q とすれば,

$$Q = \iint (-v_r) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (27)$$

これに(18)を入れると

$$Q = -\frac{3\pi}{2} A \int_0^\alpha (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \sin \theta \, d\theta$$

$$\therefore Q = -\pi A (1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha) \quad (28)$$

(22)から, 圧力こう配は

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{9}{2} \frac{A \eta}{r^4} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3} \right) \quad (29)$$

したがって, 球面上での平均をとれば

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\frac{3}{2} \frac{A \eta}{r^4} (2 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \quad (30)$$

(28)と(30)とから A を消去すれば

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{R^4}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) F(\alpha) \quad (31)$$

ただし

$$R = r\alpha \quad (32)$$

とおいた. $F(\alpha)$ は次式で与えられる.

$$F(\alpha) = \frac{16}{3} \frac{(1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha)}{\alpha^4 (2 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha)} \quad (33)$$

$\alpha \rightarrow 0$ の極限では

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = 1 \quad (34)$$

したがって, (31)はポアズイユの法則と一致する. われわれが取り扱っているようなのろい運動においても, 一般的な細管に対してポアズイユの法則が成り立つのは当然である.

8. おわりに

以上の解析からわかるように, 円錐形ノズル内での定常ニュートン流動では, 接線応力は $\sin 2\theta$ のように変わり, 一般的な円管の場合に比べてやや内部まで一様になる傾向がみられる. 流量に対してはポアズイユの式に相当する式が導かれ, これは $\alpha \rightarrow 0$ なる極限でポアズイユの式と一致する.

上の取り扱いには Stokes 近似に基づいており, 慣性項を考慮に入れた取り扱いが望まれる. さらに非ニュートン流動に対する計算も今後の問題である.

この問題を提示され, 研究を激励された呉祐吉教授および有益な討論をされた山本三三三氏に厚く感謝の意を表する.

参考文献

- 1) L. Rosenhead, Proc. Roy. Soc. A, 436 (1940)