論文

2 段多重重複繰返応力に対する応力修正係数の意義について*

河 本 実** 中 川 隆 夫***

On the Significance of the Stress Correction Factors for the Fatigue Stressing with Periodical Two Stress Amplitudes

by

Minoru KAWAMOTO

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

and Takao NAKAGAWA

(Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe)

Previously, the authors studied the fatigue lives under the reversed stress with periodical two stress amplitudes. The equation predicting fatigue lives was modified by introducing the stress correction factors. Three kinds of carbon steel were tested under such load conditions and the values of stress correction factors were obtained. At that time, however, no physical or mathematical meaning was given for these factors.

In this paper, the authors have investigated the significance of this stress correction factors by the analysis starting from the modified linear damage criterion. The conclusions obtained are as follows :

(1) The fatigue damage should be considered as the function of the practical strain amplitude (instead of the nominal strain amplitude). In this study, we introduced the damage function as

$$D = C \sum_{j=1}^p (\epsilon_j^{m_j} n_j).$$

(2) This strain ϵ_j should not be the strain of the virgin material but the practical strain after various stress histories.

(3) The stress correction factors should be defined as the ratio of the 1/m-th power average of this practical strain to the nominal strain. Accordingly, these factors are not only experimental constants but the factors with sufficient physical significance.

(Received June 26, 1964)

1 緒 言

機械や構造物の使用中に受ける繰返変動応力または重複繰返応力による材料の疲労に関しては既に多くの研究結果が発表されており、それらはいずれも Palmgren-Miner の直線被害則²⁾に基づいて、これとの比較ならびにその修正を行なったものである。筆者らも以前に 2 段多重重複繰返応力の下における炭素鋼の疲労寿命について詳細な実験的研究を行ない、直線被害則に基づく疲労寿命の推定式に応力修正係数を導入し、3 種類の炭素鋼について実際にそのような応力状態³⁾の疲労試験を行なって応力修正係数の実測値を得た。その研究において、筆者らは Fig. 1 に示すような

Fig. 1. Many-fold multiple reversed stress in two levels.

いわゆる 2 段多重重複繰返応力の下における疲労寿命を計算するに当って直線被害則

$$\sum_j \frac{n_j}{N_j} = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots = 1 \quad (1)$$

から出発し次のような疲労寿命の修正計算式を得た。

* 原稿受理 昭和39年6月26日

** 正 会 員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

*** 正 会 員 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町1

すなわち、Fig. 1 の応力状態の下における破壊までの繰返数は

$$N_i = \frac{n_0}{\frac{n_a}{N_a'} + \frac{n_A}{N_A'}} = \frac{1}{\frac{(1-\nu)}{N(i_a \sigma_a)} + \frac{\nu}{N(i_A \sigma_A)}} \quad (2)$$

で表わされる。ここで n_0 は変動 1 サイクル中の応力の総繰返数、 n_a は n_0 のうち低いほうの応力 σ_a の作用する繰返数、 n_A は同様に高いほうの応力 σ_A の繰返数、 $\nu = \frac{n_A}{n_0}$ である。また $N(\sigma)$ は一定応力振幅 σ が作用するときの破壊繰返数（疲労寿命）である。 i_a および i_A は応力振幅変更によって σ_a および σ_A なる両応力の相互干渉（Mutual interaction）のために直線被害則からはずれることを示す応力 σ_a および σ_A に対する修正係数（Stress correction factors）である。 N_a' および N_A' は $N_a' = N(i_a \sigma_a)$ 、および $N_A' = N(i_A \sigma_A)$ を表わす。筆者らの実験結果によればこの応力修正係数は、2 段の応力比 σ_A/σ_a 、繰返数割合 ν 、および応力振幅のレベルによって変わるが、だいたい $i_a > 1$ 、 $i_A < 1$ である。高応力の修正係数 i_A は耐久限度上昇を表わし、低応力の修正係数 i_a は疲労寿命の低下を表わす。実験を行なった当時、筆者らはこれらの応力修正係数に対し、応力変更およびその作用順序（Sequence）に基因する両応力の相互干渉を表わす係数であるとする以外に何らの物理的ないしは数学的意義を与えていなかった。それは筆者らが直線被害則からの偏りがかかる疲労試験中の材料の示す応力一ひずみ挙動と密接な関係をもつものと考えたものの、これらに対する充分な実験的基礎資料をもたなかったからである。最近、熱疲労や塑性疲労試験が盛んに行なわれるようになり、疲労試験中の応力とひずみが測定され、その挙動も漸次明らかとなってきたので、この研究で筆者らは疲労被害と応力一ひずみ挙動とを関係づけて考えてみることにする。

また、以前に筆者らは応力振幅が変化する場合の疲労試験の結果を整理するのに換算応力を用いるのが便利であることを提案し、これに上述の応力修正係数を適用した⁴⁾。その概要を述べると次のようである。まず直線被害則が成りたつと仮定すると、 σ_j なる応力を n_j 回受けたときの疲労被害は n_j/N_j で表わされ、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ なる応力をそれぞれ $n_1, n_2, n_3, \dots$ 回相次いで受けたときの累積被害は

$$D = \sum_j \left(\frac{n_j}{N_j} \right), \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

で表わされる。いま $S-N$ 曲線が

$$\sigma = AN^{-m} \quad (m > 0) \quad (4)$$

で近似されるものと仮定すると、(4)式および(3)式より被害は

$$D = A^{-1/m} \sum_j (\sigma_j^{1/m} n_j) \quad (5)$$

となる。ここで A および m は実験定数で材料によって異なる。いまこの被害が一定応力振幅 σ_r を $\sum_j n_j$

回受けたときの被害

$$D = A^{-1/m} \sigma_r^{1/m} \sum_j n_j \quad (6)$$

に等しいものととくと σ_r は

$$\sigma_r = \left\{ \frac{\sum_j (\sigma_j^{1/m} n_j)}{\sum_j n_j} \right\}^m \quad (7)$$

となる。この一定応力振幅 σ_r を繰返変動応力（または重複繰返応力）における換算応力（Reduced stress）と呼ぶ。これは応力振幅が階段状変化をせず、連続的に変化する場合にも、またまったく不規則に変化する場合にも(7)式の Σ が積分となるだけでまったく同じ概念で用いることができる。欧米特にスウェーデンでは変動荷重を受ける航空機の疲労寿命を整理するのにこの換算応力を用いている。（ $S-N$ 曲線が、片対数線図で直線関係にある場合も同様の概念が適用可能である。）2 段多重重複繰返応力（Fig. 1）のときには換算応力は

$$\sigma_r = \{(1-\nu)\sigma_a^{1/m} + \nu\sigma_A^{1/m}\}^m \quad (8)$$

となる。このような換算応力 σ_r を用いると、応力振幅が変化する場合の疲労試験結果を一定応力振幅の $S-N$ 線図上に重ねて表示できて便利である。もし実験結果を示す点が $S-N$ 曲線上にあるならば直線被害則が成りたち、しからざるときはその逆であり、一目瞭然である。前述のように一般には直線被害則は成りたないから、上述の応力修正係数を用いて換算応力は次のように修正される。

$$\sigma_r = \{(1-\nu)(i_a \sigma_a)^{1/m} + \nu(i_A \sigma_A)^{1/m}\}^m \quad (9)$$

2 応力修正係数の意義について

ここで(7)式にもどって考えると、 σ_j ($j=1, 2, 3, \dots, p$) なる呼び応力がそれぞれ n_j 回 ($j=1, 2, 3, \dots, p$) 相次いで作用するような重複繰返応力の場合、その被害効果は(7)式で示される一定応力振幅 σ_r が $\sum_{j=1}^p n_j$ 回作用したときの被害効果に等しいということであった。筆者らは疲労被害は繰返応力作用下の応力一ひずみ挙動と密接な関係があるものと考えており、したがって、応力を input として与える場合、疲労被害は response であるひずみの何らかの関数の形で表わさるべきであるとする。そこで、まず Hooke の法則に従う弾性式 $\sigma = E\varepsilon$ (7)式に代入すると

$$\varepsilon_r = \left\{ \frac{\sum_{j=1}^p (\varepsilon_j^{1/m} n_j)}{\sum_{j=1}^p n_j} \right\}^{1/m} \quad (10)$$

なる換算ひずみが得られ、このときの疲労被害は(5)式に $\sigma = E\varepsilon$ を代入して

$$D = \left(\frac{E}{A} \right)^{1/m} \sum_{j=1}^p (\varepsilon_j^{1/m} n_j) = C \sum_{j=1}^p (\varepsilon_j^{1/m} n_j) \quad (11)$$

となる。ここで $C = (E/A)^{1/m}$ である。すなわち、直線被害則に従うならば、重複繰返応力を受けた材料の

疲労被害は(11)式で示されるように $\varepsilon^{1/m}$ の形で表わされる。この場合、 ε は呼び応力 σ を Hooke の法則によってひずみに書き直したいわゆる呼びひずみである。しかし、実際には材料は弾性的でなく、疲労被害なるものも非弾性的の場合に生ずるものであるから、疲労被害を表わすには（呼びひずみでなく）非弾性的な実際のひずみで表わさねばならない。しかも、一定応力振幅の場合でも、生ずる非弾性ひずみは Fig. 2 のように繰返数とともに増す。一般に n 回目のサイクルにおけるひずみ振幅は

Fig. 2. Variation of strain amplitude during reversed stressing.

$$\varepsilon = \varepsilon(n) = \frac{\sigma}{E} + k_1 \sigma^p + k_2 \sigma^q (1 - e^{-\lambda n}) + k_3 \sigma^r n^s \quad (12)$$

なる形で近似できる。ここで第1項の $\frac{\sigma}{E} = \varepsilon_e$ は弾性ひずみ振幅、第2項の $k_1 \sigma^p = \varepsilon_p$ は初期塑性ひずみ振幅とともに繰返数に関係なく、 $\varepsilon_e + \varepsilon_p = \varepsilon_0$ (Fig. 2 参照) は初期ひずみ振幅である。第3項は遷移ひずみ振幅、第4項は定常ひずみ振幅を表わす。塑性疲労のような高応力域では Fig. 2 に示すようなひずみ変化をするので第4項が必要であるが、通常の疲労では図のようにある繰返数の後ひずみ振幅は一定値に落ち着く。すなわち、

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + k_1 \sigma^p + k_2 \sigma^q = \text{indep. of } n \quad (13)$$

この一定ひずみ ε を(11)式の呼びひずみの代わりに用いることとし、(11)式はそのまま非弾性的の場合にも成り立つものとする*1。

こうすれば(11)式の疲労被害 D は呼びひずみ振幅 $\frac{\sigma}{E}$ でなく、実際のひずみ振幅で表わされる。このひずみを(11)式に入れ、これを2段多重繰返応力の場合に適用する。

まず最初に σ_a なる応力を n_a 回作用せしめたときの疲労被害は

$$D_{a1} = C \varepsilon_{a1}^{1/m} n_a = C n_0 (1 - \nu) \varepsilon_{a1}^{1/m} \quad (14)$$

である。次に応力振幅を σ_A に変更し、この応力を n_A 回作用させるときそれによる被害は

$$D_{A1} = C \varepsilon_{A1}^{1/m} n_A = C n_0 \nu \varepsilon_{A1}^{1/m} \quad (15)$$

となるものと考えられるが、この式中の ε_{A1} は処女材のひずみ振幅であるから妥当でない。Fig. 3は筆者

Fig. 3. Variation of strain amplitude during two-step load fatigue tests.

らが既に行なった実験結果の一部で、2段2重重複回転曲げ疲労中のひずみ振幅の変化を示したもので、図の曲線Bは応力40kg/mm²より45kg/mm²にstep upしたもので、このときの変更後のひずみ振幅は処女材(曲線A)に45kg/mm²を作用させたときのひずみ

Fig. 4. Explanatory figures representing changes of the strain levels during two-step load fatigue tests.

*1 繰返変動応力のときには $D = C f \varepsilon^{1/m} d n$ となる、1サイクル中のヒステリシスループの面積が $q \varepsilon$ に比例し、 σ との関係はだいたい $\sigma = C_1 \varepsilon^p$ で近似されたとすると

$$\frac{dD}{dn} = C \varepsilon^{1/m}; \quad D = C f \varepsilon^{1/m} d n$$

なとり、(11)式および上記積分形とおくことは妥当と考えられる。

振幅より低くなっている。Fig. 4(a) はこれを説明したもので、今の2段多重の場合 σ_a を n_a 回受けた後の σ_A に対するひずみ振幅 ε_A' は処女材が σ_A なる応力を受けたときのひずみ振幅 ε_A とは異なっている。それゆえ、(10)式の ε_{A1} の代わりに ε_{A1}' でなければならない。よって

$$D_{A1} = C n_0 \nu \varepsilon_{A1}'^{1/m} \quad (16)$$

となる。同様に次の応力振幅 σ_a (n_a 回) に対してはやはり Fig. 3 の実験的事実と Fig. 4(b) の説明から疲労被害は

$$D_{a2} = C n_0 (1-\nu) \varepsilon_{a2}'^{1/m} \quad (17)$$

となるべきである。したがって、第1回目の変動サイクル間の累積被害は

$$D_1 = D_{a1} + D_{A1} = C n_0 \{ (1-\nu) \varepsilon_{a1}'^{1/m} + \nu \varepsilon_{A1}'^{1/m} \} \quad (18)$$

第2回目の変動サイクルでは

$$D_2 = D_{a2} + D_{A2} = C n_0 \{ (1-\nu) \varepsilon_{a2}'^{1/m} + \nu \varepsilon_{A2}'^{1/m} \} \quad (19)$$

第 k 回目では

$$D_k = D_{ak} + D_{Ak} = C n_0 \{ (1-\nu) \varepsilon_{ak}'^{1/m} + \nu \varepsilon_{Ak}'^{1/m} \} \quad (20)$$

となる。 z 周期で破壊するものとすれば

$$1 = \sum_{k=1}^z D_k = C n_0 \{ (1-\nu) \sum_{k=1}^z \varepsilon_{ak}'^{1/m} + \nu \sum_{k=1}^z \varepsilon_{Ak}'^{1/m} \} \quad (21)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z} \sum_{k=1}^z \varepsilon_{ak}'^{1/m} &= \bar{\varepsilon}_a^{1/m} \\ \frac{1}{z} \sum_{k=1}^z \varepsilon_{Ak}'^{1/m} &= \bar{\varepsilon}_A^{1/m} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

なる $1/m$ 乗平均を用いると(21)式は

$$1 = C n_0 z \{ (1-\nu) \bar{\varepsilon}_a^{1/m} + \nu \bar{\varepsilon}_A^{1/m} \} \quad (23)$$

となる。破壊までの繰返数(疲労寿命)は $N_t = z n_0$ であるからこれを(23)式に入れると

$$N_t = \frac{1}{C \{ (1-\nu) \bar{\varepsilon}_a^{1/m} + \nu \bar{\varepsilon}_A^{1/m} \}} \quad (24)$$

となる。ここで前述の呼びひずみ振幅との比をとって

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\varepsilon}_a}{\varepsilon_a} &= i_a \\ \frac{\bar{\varepsilon}_A}{\varepsilon_A} &= i_A \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

とおく。これを(24)式に代入すると

$$\begin{aligned} N_t &= \frac{1}{C \{ (1-\nu) (i_a \varepsilon_a)^{1/m} + \nu (i_A \varepsilon_A)^{1/m} \}} \\ &= \frac{1}{C \{ (1-\nu) \left(\frac{i_a \sigma_a}{E} \right)^{1/m} + \nu \left(\frac{i_A \sigma_A}{E} \right)^{1/m} \}} \\ &= \frac{1}{\frac{(1-\nu)}{N(i_a \sigma_a)} + \frac{\nu}{N(i_A \sigma_A)}} \end{aligned} \quad (26)$$

となつて(2)式と同じ式を得る。すなわち、 i_a および i_A は前述の応力修正係数である。

このように応力修正係数 i_a および i_A は実験定数であるけれども、上述の(2)および(26)式で定義せられるものであり、実際に材料の示す応答(ひずみ振幅)の $1/m$ 乗平均値と呼びひずみ振幅との比を表わすもので、もし、あるスペクトルをもつ繰返変動応力を受けたときのひずみの値が実測され、これらの繰返数に対する変化の曲線が得られるならば積分によってこれらの係数が求められるはずであり、単なる実験定数でなく、疲労進行中に実際に材料の示す応力-ひずみ挙動と密接な関係をもつものであるから充分物理的意義を有するものである。ただこれら複雑な応力経歴(Stress history)を受ける材料のひずみ変化を求めることはかなり手数のかかることなので、応力変化が比較的単純な場合を除いては、これの最終結果として得られる応力修正係数でカバーするほかはないのである。直線被害則に対し、種々の修正が提案されているが、筆者らのように応力(またはひずみ)を修正するものは見当たらないようである。しかも応力を修正する方法を採用することにより、耐久限度を含む取扱いができる点で、筆者らの方法は有利である。

3 多段多重重複繰返応力への応用

以上の諸式は2段多重重複繰返応力に対するものであるが、応力振幅の種類が三つ以上、たとえば p 種類あるときにもこの同じ概念を拡張して用いることができる。すなわち、この場合には j 番目の応力振幅に対する応力修正係数を i_j 、繰返数割合を $\nu_j = n_j/n_0$ とすると、(20)式に相当して、多段多重重複繰返応力に対する疲労寿命は次の式で与えられる。

$$N_t = \frac{1}{\sum_{j=1}^p \frac{\nu_j}{N(i_j \sigma_j)}} \quad (27)$$

なお、疲労被害に関する以上の概念は $S-N$ 曲線の方程式の誘導にも、また、2段2重重複繰返応力における二次応力での残存寿命の推定にも利用できるが省略する。

4 結 言

2段多重重複繰返応力に対する疲労寿命の計算式に導入した応力修正係数の意義について研究し、次の結論を得た。

(1) 疲労被害 D は(呼びひずみでなく)繰返応力作用下の実際のひずみ振幅の関数と考えるべきである。

この研究では $D = C \sum_{j=1}^p (\varepsilon_j^{1/m} n_j)$ なる形の被害関数を用いた。

(2) このひずみ振幅は処女材のひずみ ε ではなく、過去に受けてきた応力経歴のため、処女材とは異なつたひずみ ε' とせねばならない。

(3) 応力修正係数はこれら実際のひずみ振幅の $1/m$ 乗平均値と呼びひずみ振幅との比で定義さるべきものである。したがって単なる実験定数でなく、充分物理的意義を有する。

この研究に関しては、京都大学工学部機械工学教室河本研究室の研究員諸兄に熱心なご討論を賜わり、また特にそれに関して大学院博士課程学生柴田俊忍君のご協力と貴重なご批判をいただいた、紙上にて厚くお礼申し上げる次第である。

(昭和39年5月14日 日本材料学会第13期総会講演会にて講演)

参 考 文 献

- 1) たとえば,
材料試験, **8**, 72 (1959); Corten, H.T., and T.J. Dolan, Internat. Conf. Fatigue of Metals, Proc., 235 (1956); Freudenthal, A.M., and R. A. Heller, Internat. Conf. Fatigue of Aircraft Structures, Proc., Academic Press, 146 (1956) および J. Aero Space Sci., **26**, 431 (1959).
- 2) Palmgren, A., VDI, Z., **68**, 339 (1924); Miner, M.A., ASME, J. Appl. Mech., **67**, A-159 (1945); 西原利夫, 河本実, 山田敏郎, 機械学会論文集, **10**, 38—I, 23 (1944).
- 3) 河本実, 中川隆夫, 村上哲夫, 材料試験, **4**, 49, (1955); 小西一郎ほか, Engg. Res. Inst., Kyoto Univ., Tech. Rep., **8**, 17 (1955); 河本実, 中川隆夫, 北川正治, 日本材料試験協会第4期総会講演会前刷, 3 (1955); 河本実, 中川隆夫, 川並高雄, 同上, 第5期, 同上, 9 (1956); 河本実, 中川隆夫, 小浜弘幸, 同上, 第6期, 同上, 24 (1957) 河本実, 中川隆夫, 1st Japan Cong. Test. Mat., Proc., 6 (1958); 河本実, 中川隆夫, 柴田俊忍, 本田宜史, 機械学会論文集, **30**, 27, (1964).
- 4) 河本実, 中川隆夫, 第6回応用力学連合講演会前刷, 1 (1956); 中川隆夫, 学位論文 (京都大学) 32 (1958); 河本実, “金属の疲労”, p. 229 (1962) 朝倉書店.
- 5) 中川隆夫ほか, 日本機械学会関西支部第209回講演会前刷, 15 (1961); 同上, 日本機械学会 関西支部第37期総会講演会前刷, 141 (1962). (機械学会論文集, **31**, 226 (1965) に掲載予定)。