柱の強度に及ぼす残留応力の影響について*

村上 裕 則** 岩 崎 功*** 川 辺 敏 雄**

On the Effect of Residual Stresses on Column Strength

by

Yasunori MURAKAMI, Toshio KAWABE

(Faculty of Science and Engineering, Ritsumeikan University, Kyoto)

and Isao IWASAKI

(Department of Mechanical Engineering, Kyoto Institute of Technology, Kyoto)

The subject of inelastic buckling of columns and flat plates has been studied by several investigators.¹⁾ Residual stresses have considerable effects on the inelastic buckling strength of columns, and several researches have hitherto been reported on this problem.³⁾⁴⁾ Especially, Osgood made a clear analysis on the column with a simple rectangular cross section, assuming an ideally plastic material and an unfavorable distribution of residual stress, which showed a remarkable reduction of column strength.²⁾

The authors extended the analysis to the case of favorable distribution of residual stress, and also to the case of material with a linear strain-hardening characteristic. Although the analysis failed to give an explicit expression of the column strength, the column curves could be drawn by taking successively arbitrary values for the amount of spread of the plastic region. The theoretical column curves showed a noteworthy difference between the two cases of favorable and unfavorable distributions of residual stress.

Experiments were carried out to verify the analysis. Two sorts of materials, low and medium carbon steels, were used as specimens. The dimension of the cross section was 6×9 mm, the length being variously changed to give the slenderness ratios from about 40 to 100. The specimens were tested in a special device prepared for this purpose. The transverse deflection as well as the axial displacement were measured by two dial gages, respectively. As the treatment introducing residual stresses, low temperature quenching (quenched from 700°C into ice-water) and machining by a shaper (depth of cut was 1 mm) were adopted, of course, the former giving unfavorable and the latter favorable distributions of residual stress. The residual stress distribution was measured by the X-ray film method, using $\text{CrK}\alpha$ beams. Thin layers were etched off successively from both sides of the specimen, and the surface residual stress was measured each time by the $\sin^2\psi$ method. The original distribution of residual stress was obtained by using the correction formula.⁵⁾ The experimental results showed considerably lower values as compared with the theoretical ones, due probably to the eccentricity of axial loading and the initial curvature of the column *etc.*, however, a marked effect of residual stress distribution on the column strength was verified. (Received Aug. 26, 1966)

1 緒 言

柱や平板の塑性座屈については、すでに種々の報告があり解析もなされている。残留応力の座屈強度に及ぼす影響については、弾性域内（荷重による応力と残留応力とを重畳した応力が弾性限度以下のとき）ではまったく影響がないが、弾塑性状態によるとかなりの影響を及ぼすとされている。この問題についても数編の報告があり、なかでも Osgood は長方形断面の柱に

ついて、理想塑性材料と unfavorable な残留応力の分布形（表面圧縮，中央部引張りの巨視的なもの）を仮定して解析を行ない、Rankine 型の式を導いている。また、Huber, Beedle は W.F (Wide Flange) 形の H 形柱について種々の解析を行っており、わが国においては、藤田が同様な研究を発表している。

筆者らは、Osgood の解析をもとにして、残留応力が favorable な分布をなす場合（表面引張り，中央部圧縮）について解析を行ない、なお、材料が硬化型（直線硬化性を仮定した）の場合についても解析を拡張した。そして、これらの解析結果を検討するために、試験片にそれぞれ unfavorable と favorable な分布

* 原稿受理 昭和41年8月26日

** 正 会 員 立命館大学理工学部 京都市北区等持院北町

*** 正 会 員 京都工芸繊維大学工学部
京都市左京区松ヶ崎御所海道町

形の残留応力を発生させて座屈試験を行なった。

2 座屈強度の解析

最初に Osgood や藤田の解析を簡単に紹介する。まず、弾性域内においては、残留応力は座屈強度にまったく影響を及ぼさない。これは次のように証明できる。Fig. 1(a) は柱の横断面で O を図心とし、柱の軸方向に

Fig. 1. Schematic diagrams.

z 軸をとる。柱の曲がりには yz 面内に起こり、y の正の側が凹側となるものとする。なお残留応力の分布形を x 軸に関して対称と仮定する。(b)に示すように柱にごくわずかのたわみを生じたものとし、中央における最大たわみを v (v は y の正方向に測るものを正とする。したがって図の場合は負号をとる) とすると、

$$\int_A \sigma_y dA = -Pv, \quad \sigma = E \frac{y}{r} + \sigma_r,$$

$$\int_A \sigma_y dA = \int_A E \frac{y^2}{r} dA + \int_A \sigma_r y dA = \frac{EI}{r} = -Pv$$

$$\left(\therefore \int_A \sigma_r y dA = 0 \right)$$

ここで、 σ_r は残留応力で応力は圧縮を正とし、 r は図心を通る軸線が曲がった後の曲率半径である。

次に Osgood は一般の硬化型材料について次の式を導いている。(c)において、柱の軸方向を z 軸に、x 軸を紙面に垂直に、y 軸を厚さ方向にとる。y は曲がった後の柱の凹側に向かって測ったものを正とする。座屈が始まる前の均一な圧縮ひずみを ϵ_0 とし、座屈後の (x, y) 点におけるひずみを ϵ_{xy} とすると、座屈による (x, y) 点の応力の増加は $E_{xy} (\epsilon_{xy} - \epsilon_0)$ となる。こ

で、 E_{xy} は応力 σ に対する切線係数である。柱の中央におけるたわみを(b)に見るように v とすると (v は負号となる) モーメントのつりあいから、

$$\int_A E_{xy} (\epsilon_{xy} - \epsilon_0) y dA = -Pv \quad (1)$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\epsilon_{xy} - \epsilon_0}{y} \quad (2)$$

$$\left(\therefore \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{r} \right)$$

(2)式を(1)式に代入して、

$$\frac{d^2 v}{dz^2} \int_A E_{xy} y^2 dA + Pv = 0 \quad (3)$$

(3)式において、

$$E_r = \frac{\int_A E_{xy} y^2 dA}{I} \quad (4)$$

とおくと、

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P}{E_r I} v = 0$$

これより限界荷重は、

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_r I}{l^2} \quad (5)$$

となる。弾性範囲において、応力がすべての部分で弾性限度以下ならば、 $E_r = E$ となり(5)式は Euler load を与える。このときは、残留応力はなんら影響を及ぼさない。

次に弾塑性範囲における解析を示す。ただし、以下では断面は $b \times h$ の長方形で、座屈を生じたときの柱のたわみはごくわずかで、残留応力分布の対称性が保たれるものと仮定する。

2.1 非硬化型で残留応力が Unfavorable な分布形の場合

Fig. 2(a) を初期の残留応力分布とし、この式を次の放物線と仮定する。

$$\sigma_r = \sigma_{rt} \left(1 - \frac{ay^2}{h^2} \right) \quad (6)$$

ここで、 σ_r は圧縮を正とする。したがって σ_{rt} は負である。(a)の状態に圧縮応力が加わって、断面の一部が降伏点 σ_s に達したときを(b)とすると、応力分布の式は次のようになる。

Fig. 2. Unfavorable distribution of residual stress.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_s + \frac{a}{h^2} \sigma_{rt} (y_s^2 - y^2) & y^2 \leq y_s^2 \\ \sigma &= \sigma_s & y^2 \geq y_s^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(4)式から,

$$E_r = \frac{E \int_{-y_s}^{y_s} y^2 b dy}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{12E}{h^3} \int_{-y_s}^{y_s} y^2 dy = 8E \frac{y_s^3}{h^3} \quad (8)$$

また, 圧縮荷重は,

$$P = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dy = b \left[\int_{-y_s}^{y_s} \left\{ \sigma_s + \frac{a}{h^2} \sigma_{rt} (y_s^2 - y^2) \right\} dy + 2 \int_{y_s}^{h/2} \sigma_s dy \right] = bh \left(\sigma_s + \frac{4ay_s^3}{3h^3} \sigma_{rt} \right) \quad (9)$$

(9)式より,

$$\frac{y_s^3}{h^3} = \frac{3}{4a\sigma_{rt}} \left(\frac{P}{bh} - \sigma_s \right) \quad (10)$$

(10)式を(8)式に代入して,

$$E_r = \frac{6E}{a\sigma_{rt}} \left(\frac{P}{bh} - \sigma_s \right) \quad (11)$$

(11)式を(5)式に代入して,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{6E}{a\sigma_{rt}} \left(\frac{P_{cr}}{bh} - \sigma_s \right) \frac{bh^3}{12} = \frac{\pi^2 h^2 E}{12 a \sigma_{rt}} (P_{cr} - bh \sigma_s) \quad (12)$$

$$P_{cr} = \frac{bh \sigma_s}{1 - \frac{12 a \sigma_{rt}}{\pi^2 h^2 E}} \quad (12)$$

または細長比 l/k を導入して,

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_s}{1 - \frac{a \sigma_{rt}}{6 \pi^2 E} (l/k)^2} \quad (13)$$

(13)式が Osgood の導いた Rankine 型の式である。(13)式において, 残留応力の正負のつりあいから計算すると $a=12$ となる。

以下の解析は, 筆者らが上述の解析をもとにして行なったものである。

2・2 非硬化型で残留応力が Favorable な分布形の場合

Fig. 3(a) を初期の残留応力分布とし, この式を2・1

Fig. 3. Favorable distribution of residual stress.

の場合と同様に, 次の放物線形と仮定する。

$$\sigma_r = \sigma_{rc} \left(1 - \frac{ay^2}{h^2} \right) \quad (14)$$

ここで, σ_{rc} は正で(a)中の σ_{rt} は負である。断面の一部が降伏したときの状態が(b)で,

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_s & y^2 \leq y_s^2 \\ \sigma &= \sigma_s - \frac{a}{h^2} \sigma_{rc} (y^2 - y_s^2) & y^2 \geq y_s^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$E_r = \frac{2bE \int_{y_s}^{h/2} y^2 dy}{\frac{bh^3}{12}} = E \left(1 - \frac{8y_s^3}{h^3} \right) \quad (16)$$

$$P = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dy = b \left[\int_{-y_s}^{y_s} \sigma_s dy + 2 \int_{y_s}^{h/2} \left\{ \sigma_s - \frac{a}{h^2} \sigma_{rc} (y^2 - y_s^2) \right\} dy \right] = bh \left\{ \sigma_s + a \sigma_{rc} \left(\frac{y_s^2}{h^2} - \frac{4}{3} \frac{y_s^3}{h^3} - \frac{1}{12} \right) \right\} \quad (17)$$

この場合には, (16)式は $(y_s/h)^3$ の項, (17)式は $(y_s/h)^3$, $(y_s/h)^2$ の項を含んでいるため, (13)式のように P_{cr} を explicit に表現することができない。いま,

$$y_s/h = \alpha \quad (18)$$

とおくと, (17)式は,

$$\sigma = \sigma_s + a \sigma_{rc} \left(\alpha^2 - \frac{4}{3} \alpha^3 - \frac{1}{12} \right) \quad (19)$$

(16)式を前の(5)式に代入して,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E (1 - 8\alpha^3)}{l^2} \frac{bh^3}{12} = \frac{\pi^2 E bh^3 (1 - 8\alpha^3)}{12 l^2} \quad (20)$$

または,

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E (1 - 8\alpha^3)}{(l/k)^2} \quad (21)$$

α は $0 \leq \alpha \leq 0.5$ の範囲であるから, この範囲の任意の値を仮定して, (19)式から σ を求め, これを(20)式の σ_{cr} に等値して(21)式から l/k を計算する。このようにして $\sigma_{cr} - (l/k)$ の column curve を描くことができる。

この解析は, 2・1の場合と比較するために行なったもので, 後の Fig. 6 に示すように, 形削り盤加工後に実測した残留応力の分布形と(14)式の形とはかなり大きな差を生じたので, (14)式の代わりに,

$$\sigma_r = \sigma_{rc} \left(1 - \frac{ay^4}{h^4} \right) \quad (22)$$

を採用した。したがって, 応力の式は(15)式に代わって次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_s & y^2 \leq y_s^2 \\ \sigma &= \sigma_s - \frac{a}{h^4} \sigma_{rc} (y^4 - y_s^4) & y^2 \geq y_s^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

これに伴って(17)式は次のように変わる。

$$P = bh \left\{ \sigma_s + a \sigma_{rc} \left(\alpha^4 - \frac{8}{5} \alpha^5 - \frac{1}{80} \right) \right\} \quad (24)$$

(23)式の分布形では、残留応力のつりあいから $a=80$ となる。

次にひずみ硬化がある場合の解析を示す。

2・3 硬化型で残留応力が Unfavorable な分布形の場合

簡単のため直線硬化性を仮定して、ひずみ硬化域における切線係数 E_t を一定と仮定する。Fig. 2(c)において、 y_s 層が降伏するまでに加えたひずみは $1/E\{\sigma_s - (\sigma_r)_{ys}\}$ であるから、 y 層におけるひずみは、これに残留ひずみを加えたもので $\{\sigma_s - (\sigma_r)_{ys} + (\sigma_r)_y\}/E = \{\sigma_s + a/h^2 \sigma_{rc} (y_s^2 - y^2)\}/E$ しかたがって $\epsilon_s = \sigma_s/E$ 以上のひずみは $(a \sigma_{rc}/h^2 E) (y_s^2 - y^2)$ となる。これより応力増加は $(a \sigma_{rc} E_t/h^2 E) (y_s^2 - y^2)$ である。いま、

$$E_t/E = \lambda \quad (25)$$

とおくと、上式は $(a \sigma_{rc} \lambda/h^2) (y_s^2 - y^2)$ となる。これより応力分布の式は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_s + \frac{a}{h^2} \sigma_{rc} (y_s^2 - y^2) & y^2 \leq y_s^2 \\ \sigma &= \sigma_s - \frac{a\lambda}{h^2} \sigma_{rc} (y^2 - y_s^2) & y^2 \geq y_s^2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} P &= b \left[\int_{-y_s}^{y_s} \left\{ \sigma_s + \frac{a}{h^2} \sigma_{rc} (y_s^2 - y^2) \right\} dy \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{y_s}^{h/2} \left\{ \sigma_s - \frac{a\lambda}{h^2} \sigma_{rc} (y^2 - y_s^2) \right\} dy \right] \\ &= bh \left[\sigma_s + a \sigma_{rc} \left\{ \frac{4}{3} \alpha^3 + \lambda \left(\alpha^2 - \frac{4}{3} \alpha^3 - \frac{1}{12} \right) \right\} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

また、 E_r は(5)式から、

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{b \left\{ E \int_{-y_s}^{y_s} y^2 dy + 2 E_t \int_{y_s}^{h/2} y^2 dy \right\}}{\frac{bh^3}{12}} \\ &= E \{ \lambda + 8(1-\lambda) \alpha^3 \} \quad (28) \end{aligned}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E \{ \lambda + 8(1-\lambda) \alpha^3 \} bh^3}{12l^2} \quad (29)$$

または、

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \{ \lambda + 8(1-\lambda) \alpha^3 \}}{(l/k)^2} \quad (30)$$

(27)式と(30)式から、前と同様にして column curve を描くことができる。

2・4 硬化型で残留応力が Favorable な分布形の場合

この場合には、Fig. 3(c) に示すような応力状態となり、2・3の場合と同様にして、 y 層におけるひずみは $\{\sigma_s + a/h^2 \sigma_{rc} (y_s^2 - y^2)\}/E$ となる。応力分布の式は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_s - \frac{a}{h^2} \sigma_{rc} (y^2 - y_s^2) & y^2 \geq y_s^2 \\ \sigma &= \sigma_s + \frac{a\lambda}{h^2} \sigma_{rc} (y_s^2 - y^2) & y^2 \leq y_s^2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} P &= b \left[\int_{-y_s}^{y_s} \left\{ \sigma_s + \frac{a\lambda}{h^2} \sigma_{rc} (y_s^2 - y^2) \right\} dy \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{y_s}^{h/2} \left\{ \sigma_s - \frac{a}{h^2} \sigma_{rc} (y^2 - y_s^2) \right\} dy \right] \\ &= bh \left\{ \sigma_s + a \sigma_{rc} \left(\frac{4}{3} \lambda \alpha^3 + \alpha^2 - \frac{4}{3} \alpha^3 - \frac{1}{12} \right) \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{b \left\{ E_t \int_{-y_s}^{y_s} y^2 dy + 2 E \int_{y_s}^{h/2} y^2 dy \right\}}{\frac{bh^3}{12}} \\ &= E \{ 1 - 8(1-\lambda) \alpha^3 \} \quad (33) \end{aligned}$$

これより、

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \{ 1 - 8(1-\lambda) \alpha^3 \}}{(l/k)^2} \quad (34)$$

(32)、(34)式から column curve が描ける。

2・2で述べたように、(14)式の代わりに(22)式を採用すると、(31)式の代わりに、

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_s - \frac{a}{h^4} \sigma_{rc} (y^4 - y_s^4) & y^2 \geq y_s^2 \\ \sigma &= \sigma_s + \frac{a\lambda}{h^4} \sigma_{rc} (y_s^4 - y^4) & y^2 \leq y_s^2 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

しかたがって(32)式に代わって、

$$P = bh \left\{ \sigma_s + a \sigma_{rc} \left(\frac{8}{5} \lambda \alpha^5 + \alpha^4 - \frac{8}{5} \alpha^5 - \frac{1}{80} \right) \right\} \quad (36)$$

となる。

3 実験方法

実験に用いた試験片の形状は Fig. 4 に示すとおりで、細長比 l/k を約40~100の範囲で5~6種に変えた。材料は S45C および S15C で焼なまし状態における機械的性質は Table I に示すとおりである。応力ひずみ曲線において、S15C 材は明りょうな上下の降伏点を示したのに対して (表中の σ_s は降伏点)、S45C 材では降伏点が明りょうでなかったので $\sigma_{0.2}$ をとった。なお、弾性係数 E の値は 21 150 kg/mm² (S15C) およ

Fig. 4. Shape of specimens.

Table I. Mechanical properties of materials.

Material	Yield stress σ_s (kg/mm ²)	Tensile strength σ_B (kg/mm ²)	Elongation ϕ (%)	Reduction in area ψ (%)
S15C	24.1	44.7	37.8	65.4
S45C	36.4	64.1	28.4	48.2

び $21\,100\text{kg/mm}^2$ (S45C) とした。

残留応力を発生させる方法は, unfavorable な形には低温焼入れ (700°C から氷水中焼入れ) を用い, favorable な形としては形削り盤加工 (切込み 1mm , 両面加工) を使用した。残留応力の測定はX線のフィルム法により, ターゲットには Cr を用いた。試験片の両側から漸次薄層を腐食し去り, その都度X線測定を行なった。もとの残留応力を求める計算式は次式を用いた。

$$\sigma_a = \frac{1}{h-a} \{ (h-2a) \sigma_{ax} - a \sigma_{ox} \}$$

ここに, h : 試験片の厚さ, σ_a : もとの試験片の a 層に存在していた残留応力, σ_{ox} : もとの試験片表面における残留応力, σ_{ax} : a 層腐食後の表面でX線によって測定された残留応力。

座屈試験には Fig. 5 に示す装置を用い, Reece 万能試験機で圧縮荷重を加えた。

Fig. 5. Testing device.

一般に座屈試験においては, 軸荷重の偏心, 試験片の初期たわみなどの実験技術上の困難があり, これらは実験結果にかなりの影響を及ぼすので, できるだけこれらの誤差を導入しないように注意したが, なおいくぶんかの誤差は避けられなかった。試験片のたわみおよび縮みはそれぞれ2個のダイヤルゲージを用いて測定し, この平均値をとった。

4 解析および実験結果と考察

測定した残留応力分布の一例として, S45C 試験片についての低温焼入れ, および形削り盤加工後の測定結果を Fig. 6 に示す。○, ⊖印は低温焼入れに対するもので, 実線は測定結果で, 破線は(6)式による分布形を示している。●, ⊙印は形削り盤加工のもので, 実線は測定結果, 破線は(22)式による分布形を示している。両者の間にやや差がみられるが近似式として(6), (22)式を用いることはさしつかえないものと考えられる。

Fig. 7 は, 応力-たわみ曲線と応力-縮み曲線の一例を示している。これら両曲線の最高応力は, ほぼ一致しており, この両者の平均値をとって座屈応力とした。軸荷重の偏心や, 初期たわみなどの影響がなければ,

Fig. 6. Theoretical and experimental distributions of residual stress (S45C).

Fig. 7. Column deformation curves (S45C).

これらの曲線において, 座屈応力に達するまでは, ほとんどたわみや縮みを生じないはずであるが, 図に見られるように, これらの誤差がはいるのを避けられなかった。

Fig. 8 は S45C 材についての理論的な column curve で, 縦軸には, 座屈応力を無次元的に表わすために, 座屈応力と降伏応力との比 σ/σ_s がとってある。図において①, ⊖印は unfavorable な残留応力分布形についてのもので, ①印は非硬化型, ⊖印は硬化型に對

Fig. 8. Theoretical column curves (S45C).

する図である。同様に○, ●印は favorable な分布形についてのもので, ○印は非硬化型, ●印は硬化型に対する図である。ただし, favorable な分布形に対しては, (17)式および(18)式を用いたものである。

(6)式における σ_{re} の値は, Fig. 6 の実測値から $\sigma_{re} = -10.7\text{kg/mm}^2$ の値をとった。(14)式の σ_{re} の値は, Fig. 2(a) に示す残留応力の分布形をそのまま横軸に対して逆にして, $\sigma_{re} = 10.7\text{kg/mm}^2$ の値をとった。理論値の (29), (30)式および(33), (34)式における λ の値は, 初期降伏から全断面降伏に至るひずみの範囲における切線係数 E_t の平均値を求めて, $\lambda = 0.052$ の値をとった。硬化型の場合, 全断面塑性域の条件 $\alpha = 0$ (表面圧縮の場合) および $\alpha = 0.5$ (表面引張りの場合) を与えて計算すると, いずれも $l/k = 14$ となる。これ以下の l/k に対する座屈応力は計算で求まらないため想像して描いてあるが, $l/k \rightarrow 0$ となると圧縮破壊強度近くまで上昇するものと考えられる。図に見られるように, 残留応力の分布形が unfavorable と favorable の場合とでは, column curve に大きな差を生じている。しかし, 非硬化型と硬化型の差はごくわずかである。

同じく, Fig. 9 は S15C 材に対する理論的な column curve で, ○印は unfavorable, ●印は favorable な分布形に対するものである。 σ_{re} の値としては, 実測

Fig. 9. Theoretical column curves (S15C).

Fig. 10. Theoretical and experimental column curves (S45C).

した残留応力の分布曲線から $\sigma_{re} = \pm 11.6\text{kg/mm}^2$ をとった。ただし, この場合には, 全断面塑性域となる時のひずみが, 降伏点以後の流れの範囲におさまったので, 硬化は考えられなかった。

Fig. 10 は S45C 材について, 理論値と実験値を比較したもので, ◎印は低温焼入れした試験片の実験値で, ●印は機械加工した試験片の実験値を示している。○, ①印は Fig. 8 の理論値を示しており, ●, ◎印は (24) および (25) 式を用いて計算した理論値である。図に見られるように, 実験値はいずれも理論値よりかなり低く現われているが, これは前に述べたように, 主として荷重の偏心や試験片の初期たわみなどによる影響と思われる。また, 解析においては座屈が始まるまで試験片のたわみはごくわずかで, 残留応力分布の軸対称性が保たれるものと仮定しているが, Fig. 7 から判断すると非対称な分布形を生じていることとなり, この点も理論値との間に誤差を生ずる原因となる。いずれにしても, unfavorable と favorable な分布形との間には, 理論曲線と同様にかかなり大きな差がある。

同様に, Fig. 11 は S15C 材に対する理論値と実験値を比較したものである。図において, ●印は (24) 式によって計算したものである。この場合にも Fig. 10 と同様な傾向がみられる。

Fig. 11. Theoretical and experimental column curves (S15C).

以上のように, 残留応力の分布形が favorable な場合と, unfavorable な場合とでは座屈強度にかなり大きな差を生ずる。これは, 理論上では, 主として(5)式における弾性係数 E_r の塑性域の拡大による減少の差が, 大きく影響しているものと考えられる。

残留応力が favorable な分布形であっても, 柱の負担しうる最高荷重は, 非硬化型材料の場合には理論上 $\sigma_s A$ (A は断面積で bh) をこえることはない。なぜならば, Fig. 3 (b) において, y_s 層まで塑性域にはいったときの荷重は,

$$(P)_{y=y_s} = \sigma_s A' + 2 \int_{y_s}^{h/2} (\sigma_s - \sigma_{re} + \sigma_r) b dy$$

$$= \sigma_s A - \sigma_{rc} (A - A') + 2 \int_{y_s}^{h/2} \sigma_r b dy$$

ただし, $A' = 2y_s b$ で塑性域の面積である. 全断面塑性域となったときの荷重は, 上式で $y_s = h/2$, $A' = A$ において $(P)_{y=h/2} = \sigma_s A$ となる. すなわち, 残留応力が favorable な分布形であっても, 残留応力がない場合の理論上の最高荷重をこえることがない.

5 総 括

Osgood は長方形断面の柱について, 材料の非硬化性と表面圧縮の unfavorable な残留応力の分布形とを仮定して, 残留応力の座屈強度に及ぼす影響を表わす式を導いているが, 筆者らは, この解析を, まず表面引張りの favorable な分布形の場合に適用した. 塑性域の拡大を表わす量に関する関数の形が異なるために, Osgood の式のような explicit な表現は得られなかったが, 塑性域の拡大量を適宜仮定することによって, 残留応力の影響を加味した column curve を描くことができた. この両者の分布形による座屈強度にはかなり大きな差を生じて, 弾塑性状態では残留応力の分布形の影響がかなり著しく現われることがわかった.

さらに筆者らは, 材料が硬化型 (ただし直線硬化性を仮定した) の場合についても解析を拡張して, この場合の column curve をも描いたが, 切線係数と弾性係数との比 E_t/E の値が小さかったために, 非硬化

型の curve よりもやや高目に得られたにとどまった.

これらの解析結果を検討するために, 2 種の炭素鋼を用いて座屈試験を行なったが, 荷重の偏心や初期たわみなどの影響のために理論値よりもかなり低い結果となった. しかし, 残留応力の favorable と unfavorable との両分布形の間には, 解析結果と同様にかなり大きな差を生じて, 残留応力の分布形が座屈強度にかなり著しく影響を及ぼすことが認められた.

(昭和41年7月14日 日本材料学会第5回X線材料強度に関するシンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) Shanley, F.R., J. Aero. Sci., **14**, 5, 261 (1947);
Shanley, F.R., Trans. ASCE, **115**, 698 (1950);
T-H Lin, J. Aero. Sci., **17**, 3, 159 (1950);
Prais, P.C., J. Aero. Sci., **21**, 1, 43 (1954);
倉西正嗣, 機械学会誌, **58**, 435, 315 (1955);
山本善之, 機械学会誌, **60**, 467, 1 359 (1957).
- 2) Osgood, W. R., U. S. 1st. Nat. Cong. Appl. Mech., 415 (1952).
- 3) Huber, A.W., and L.S. Beedle, Weld. J., **33**, 589-s (1954).
- 4) 藤田譲, 造船協会論文集, **102**, 219 (1958); **107**, 173, 179 (1960).
- 5) 平修二, 吉岡靖夫, 材料, **11**, 675 (1962).