長円孔を有する曲りはりの応力集中について*

村上 裕 則** 村上 一 実** 川 辺 敏 雄**

On the Stress Concentration in a Slotted Curved Beam

by

Yasunori MURAKAMI, Kazumi MURAKAMI and Toshio KAWABE

(Faculty of Science and Engineering, Ritsumeikan University, Kyoto)

In this study, the stress concentration factors of a slotted curved beam subjected to uniform bending are reported.

The experiment was carried out by the photoelastic method. Epoxy resin plates with thickness of 6mm were used as specimens, and a uniform bending moment was applied. The width of the curved beam and the length of the slot were maintained as constant. The radius of the curvature was varied in four steps (including the case of a straight beam) and the radius of semi-circle at both ends of the slot, and also the eccentricity of the slot from the center line of the beam were changed in three ways, respectively.

The stress concentrations along the upper and lower edges, through the minimum cross section and around the slot were examined, and the stress concentration factors at four main points were measured for several cases of the test conditions mentioned above. Moreover, the ratio of stress of the curved beam to that of the straight beam at each corresponding point was also investigated.

From the experimental results, the following conclusion has been made.

(1) The s.c.f. at the upper or lower edge of the beam decreases or increases, respectively, with the increase of curvature. But the s.c.f. at the upper or lower end of the slot shows an inverse tendency to that at the edge. As to the effect of eccentricity, the approach of the slot to each edge raises the s.c.f. at the edge. This trend is identical for the s.c.f. at the upper or lower end of the slot, when the slot approaches the upper or lower edge, respectively. The maximum values of s.c.f. obtained in this experiment are 1.4 and 1.8, respectively, for the lower edge of the beam and for the upper end of the slot.

(2) The ratio of stress of the curved beam to that of the straight beam is more than unity at the lower edge of the beam as well as at the upper end of the slot in all cases. This fact confines our attention to these points.

(3) In order to secure that none of the stresses at several main points of the slotted curved beam become specially large, it is desirable to locate the slot on the centre line of the beam, avoiding the eccentricity of the slot.

(Received June 15, 1966)

1 緒 言

円孔または長円孔を有する真直はりに、曲げモーメントを加えた場合の応力集中係数を求める問題は、構造物の設計に際して重要である。円孔を有する真直はりの曲げについては、すでに多くの理論的および実験的研究が発表されており、また長円孔を有する真直はりについても Frocht および Leven の研究発表がある¹⁾。また、種々の断面をもつ曲りはりの曲げの問題については、Peterson の設計図表にデータが載せられている²⁾。しかし、円孔または長円孔を有する曲りはりについての類似の研究はまだなされていないようである。そこで本実験においてはこの問題を取り上げ、1

個の円孔または長円孔を有する曲りはりに曲げモーメントを加えた場合に、各主要点の応力集中係数および各部の応力分布を求めてみた。曲りはりの曲率半径 ρ を4種類に変えて(真直はりも含めて)、そのおのおのについて円孔または長円孔の位置を中心線上およびその上下の位置に移動させ、なお円孔または長円孔の半径を3種類に変えて光弾性実験を行なった。この実験結果より各部の応力集中係数を求め、これを真直はりの場合と比較し、なお理論値による検討も行なった。

2 実験方法

2・1 試験片

実験に用いた試験片は厚さ約6mmのエポキシ樹脂板で、その形状をFig. 1に示した。図においてC-C曲線は試験片幅の中心線であり、G-G曲線は図に示す長

* 原稿受理 昭和41年6月15日

** 正 会 員 京都市北区等持院北町 立命館大学理工学部

Fig. 1. Shape of specimen.

円孔をもつAD断面の図心を通る曲線である。図に示すように、試験片の幅 $2b=20\text{mm}$ および長円孔の長さ $2d=8\text{mm}$ を一定とし、曲りはりの曲率半径 ρ を ∞ , 70, 50および30mm (それぞれ $b/\rho=0, 0.143, 0.2, 0.333$) の4種類に変えた。そのおのおの場合について、円孔または長円孔の半径 r を4, 3および2mmに(それぞれ, $d/r=1, 1.333, 2$)、また偏心距離 e を0および $\pm 2\text{mm}$ (+は上側, -は下側で $e/b=\pm 0.2$) の3種類に変えて実験を行なった。

2.2 荷重装置

荷重装置としては二つのローラ支点の上に試験片を載せ、その両端にアームを取り付けて、それらに重錘を掛けて試験片に純曲げを加えるものを用いた。支点をローラとした理由は大きい曲げモーメントを加えた場合に、試験片下面の軸方向の変位を拘束しないためであり、実験に際しては、潤滑油をローラ上に滴下して摩擦が最小限になるようにした。また、試験片にねじりモーメントが加わるのを防ぐために、アームや重錘が厳密に試験片厚さの中心線上にくるように留意した。

2.3 応力集中係数の求め方

応力すなわちしま次数の測定箇所は上下縁、孔の中心線を通る断面 (Fig. 1で AB, CD 断面) および穴の周囲とした。応力集中係数の測定はFig. 1において、A, B, C, DおよびE, Fの各点について行なった (E, DまたはF点は後の Fig. 2に示すように、上下縁において最大応力を生ずる点である)。応力集中係数 α は $e=0$ の場合の真直はりのAまたはD点における公称応力 σ_n と、各点における測定応力 σ との比

として求めた。すなわち、

$$\alpha = \sigma / \sigma_n \quad \text{ただし, } \sigma_n = \pm \frac{M}{I} \cdot b = \pm \frac{3Mb}{2t(b^3 - d^3)}$$

で計算した。後に示す図面の表現上、引張応力と圧縮応力とに対する α を区別して、前者を α_+ 、後者を α_- とするすることにする。ただしこれらの記号は当該点に生じている応力の正負のみを示すにとどまり、数値はいずれも正值をとるものとする。なお両者をまとめて、値のみを比較する場合には $\alpha_\pm$ と表わすことにする。端数のしま次数の測定は従来どおり Tardy 法によった。

2.4 応力比の求め方

曲りはりと真直はりの応力の比較を行なうために、各はりの該当点の測定応力の比を求めてみた。すなわ

$$\text{ち, 応力比 } m = \frac{\sigma(\text{Curved beam})}{\sigma(\text{Straight beam})} \text{ で求めた。}$$

3 実験結果および考察

Fig. 2は $b/\rho=0.2, d/r=2$ の場合の応力分布を示したものである。ただし AB, CD 断面については、これらの断面に働く主応力からもう一つの主応力を減じた主応力差の分布を示した。ただし、後者の主応力は0または非常に小さい値であるから、これらの断面に働く主応力の分布と近似的にみなせる。図においてC-C曲線はFig. 1と同様に試験片幅の中心線で、N-N線は曲りはりの式によって計算した理論上の縦中立軸を示している。(a)図は $e/b=+0.2$, (b)図は $e/b=0$, また(c)図は $e/b=-0.2$ の場合のものである。上縁について考えると、(a)図の場合A点よりもE点のほうが応力が高く現われているが、(b), (c)図ではA点とE点の応力の差がほとんどなくなっている。これと同様なことは下縁についてもみられる。すなわち、応力は(c)図においてD点よりもF点が高く現われているが、(b), (a)図となるとD点と下点の差がほとんどなくなっている。これは長円孔が上下縁に近づくにつれて、長円孔の応力集中が上下縁の応力分布に影響を及ぼしたものと思われる。またB点, C点について考えると、(a)図の場合B点の応力集中は著しく高いが、逆に(c)図の場合にはC点で高い応力集中を示している。このような応力集

Fig. 2. Some examples of stress distributions ($b/\rho=0.2, d/r=2, M=594.10\text{kgmm}$).

中を生ずる原因としては、縦中立軸の移動の影響が大きいものと思われる。すなわち、(a)図においては長円孔の位置が上に移動しているために、図心はC-C線より下方に下がり、N-N線はさらに図心より下方にあるために、B点とN-N線との距離が増大し、この結果B点に特に著しい応力集中を生じたものと思われる。また同様に(c)図においては、長円孔が下方にあるため図心はC-C線より上がり、この結果N-N線がC-C線よりも上部にきてC点との距離は増加して、C点に大きな応力集中をもたらしたものと考えられる。円孔の周囲の応力分布は(a)図の場合すべて引張り、(b)、(c)図の場合にはほぼN-N線を境にして引張り、圧縮に分かれている。

Fig. 3. 4 は E, D または F 点における応力集中係数

Fig. 3. Change in stress concentration factor due to curvature (b/ρ).

α_+ および α_- と b/ρ との関係を、 e/b をパラメータとして示したものである。図において、3種の d/r について、それぞれ点がプロットしてあるが、各点の差は微小であるため、その平均線が引いてある。Fig. 3 に示すように E 点において、 α_+ は b/ρ の増加に伴って漸次減少の傾向を示している。この傾向は円孔または長円孔を有しない曲りはりと同一の傾向である。また、 α_+ は e/b の減少につれて低下しており、 $e/b = +0.2$ の場合には α_+ はほぼ 1 以上の値を示しているが、他の場合には 1 より小さい。 $e/b = +0.2$ の場合に α_+ が特に高くなったことは前に述べたように円孔部の応力集中の影響と考えられる。また図において、 $e/b = 0$ と -0.2 の場合に $b/\rho = 0$ の真直はりでは α_+ が 1 より小さいのは、公称応力を最小断面について定義したからである(公称応力を穴を含まない断面についてとると $\alpha_+ = 1$ となる)。 b/ρ が増加するにつれて $e/b = 0$ と -0.2 の両曲線が漸次開いてくる現象は、 $e/b = -0.2$ の場合には穴と上縁との間の干渉はほとんどないものとみなせるが、 $e/b = 0$ になると b/ρ の増加とともに多少干渉の影響が現れてくるものと思われる。また、 $e/b = 0$ と $+0.2$ の場合とを比較して、後者の場合に α_+ の減少が大きいのは、 b/ρ の増加に伴って N-N 線の低下が大きいことによるものであろう。

Fig. 4. Change in stress concentration factor due to curvature (b/ρ).

次に、Fig. 4 に示す D または F 点においては、 α_- は Fig. 3 とは逆に b/ρ の増加に伴って上昇しており、一部を除いて 1 以上になっている。この上昇の傾向も穴のない曲りはりにおける傾向と一致している。また、 α_- は Fig. 3 の傾向とは逆に e/b の増加につれて低下している。 α_- が $e/b = -0.2$ において特に高い値をとるのは、Fig. 3 の場合と同様に穴の回りの応力集中の影響によるものである。また、 $e/b = 0$ と $+0.2$ の両曲線が b/ρ 増加とともに漸次開いてくる現象は、Fig. 3 で述べたと同じ理由によるものと思われる。

Fig. 5 および 6 は、それぞれ B および C 点における α_+ および α_- と b/ρ の関係を e/b をパラメータとして示したものである。この場合には d/r の影響が割合に顕著に現れたので、それぞれ d/r の違う 3 つの線によって描いてある。まず Fig. 5 に示すように B 点においては、 α_+ は b/ρ の増加とともに漸次上昇しており、これは b/ρ の増加に伴って N-N 線が下方に移動するためである。図に見られるように、 $e/b = +0.2$ の場合のみ α_+ は 1 より大きな値を示している。 $e/b =$

Fig. 5. Change in stress concentration factor due to curvature (b/ρ).

Fig. 6. Change in stress concentration factor due to curvature (b/ρ).

-0.2 において特に上昇のこう配が大きくなっているのは、 b/ρ の増加に伴ってN-N線の移動が他の場合に比べて大きいことによるものであろう。すべての場合に当然のことながら、 d/r の大きいものほど α_+ は大きく現われている。次にFig. 6 に示すようにC点においては横軸の上部が α_- 、下部が α_+ として表わしてある。 $e/b = -0.2$ および 0 の場合に α_- は b/ρ の増加とともに漸次減少の傾向を示しており、 $e/b = +0.2$ の場合には α_- はいったん減少して0となりその後引張りの α_+ に転じている。このように、 α_- が b/ρ の増加に伴って減少することは、 b/ρ の増加とともにN-N線がC点に近づくことによるものである。 $e/b = -0.2$ において特に α_- が高くなっているのは、N-N線とC点との距離が大きいことに基づくものである。 $e/b = +0.2$ の場合には、 b/ρ の増加とともにN-N線はC点のすぐ上側から漸次下降してC点を通り、さらに下降を続けるために図のような $\alpha_- \sim \alpha_+$ の変化をたどる。図中に示した $\otimes$ 印は理論計算の結果を表わすもので、実験値とよい一致を示している。

次に2.4節で示した応力比 m と曲率半径 b/ρ との関係求めたものをFig. 7および8に示した。まずFig. 7はDまたはF点に対するもので、 m は b/ρ の増加とともに1から漸次上昇しているが、これは曲りはりの特性を示すものである。また同図からわかるように、

Fig. 7. Change in stress ratio due to curvature (b/ρ).

Fig. 8. Change in stress ratio due to curvature (b/ρ).

$e/b = 0$ の場合に m は最も大きい。このことはFig. 4の曲線の傾向からみて明らかである。Fig. 8はB点についての同様な曲線で、 m は b/ρ の増加とともに上昇しており、特に $e/b = -0.2$ の場合にこの傾向は著しく、最高約3.8を示している。このことはFig. 5において $e/b = -0.2$ の場合が、曲線のこう配が最も大きいことから了解できる。ただし、応力比 m はきわめて高い値

Note: α_+ refers to points E and B, and α_- to points C and D or F.

Fig. 9. Change in stress concentration factor at each point due to eccentricity.

を示すけれども、この場合の α_+ は最高約0.6の低い値である。

次にFig. 9は各点の応力集中係数をまとめたもので、 $b/\rho=0.143$ と0.333の場合について、 e/b の各場合の値を示してある。図中にことわってあるように、 α_+ はBおよびE点に、 α_- はCおよびDまたはF点に適用される。ただしC点について1箇所(α_+)とししてあるのは例外を示している。図において白わくは $d/r=2$ の場合、黒わくは $d/r=1$ の場合を示している。E、DおよびF点は $d/r=2\sim1$ の三つの平均値を取ったので、白わくのみ示してある。図に見られるように $\alpha_{\pm}$ は $e/b=+0.2$ の場合にはB点が最も高く、 $e/b=0$ になるとBよりもD点がやや高くなり、 $e/b=-0.2$ ではCまたはF点が最も高くなる傾向にある。そして $e/b=\pm 0.2$ の場合には各点の $\alpha_{\pm}$ に相当大きな差があるが、 $e/b=0$ の場合にはこの差が小さくなって $\alpha_{\pm}$ は平均化する傾向がみられる。ただし、 $e/b=0$ の場合すべ

Fig. 10. Change in stress ratio at each point due to eccentricity.

での b/ρ に対して $\alpha_{\pm}$ は穴の上縁のB点よりも、はりの下縁のD点において、やや高い値を示している。

次に、Fig. 10は同じく各点の応力比 m を示したもので、 $e/b=-0.2$ になるとB点の m は著しく増大する。これらの結果から、穴を有する曲りはりが曲げを受け

Fig. 11. Three dimensional representation of stress concentration factor.

る場合に、各部の応力に大きな差を生じさせないためには、穴ははりの中心位置に置くのが望ましいと言える。

Fig. 11, 12は以上の結果をまとめて、 $\alpha_{\pm}$ を b/ρ および e/b に対して三次元的な表示をしたものである。Fig. 11はDまたはF点に対する α_- を示したもので、 d/r については平均値が取ってある。曲面は b/ρ の増

Fig. 12. Three dimensional representation of stress concentration factor.

加および e/b の減少とともに上昇する傾向を示している。Fig. 12は同じくB点に対する α_+ を表わしたもので、曲面の傾向は b/ρ についてはFig. 11と同じであるが、 e/b についてはFig. 11と逆の傾向である。特に e/b の増加による曲面の上昇が目だっている。

4 結 言

以上の実験結果をまとめて次のような結論が得られる。

(1) 曲りはりの上縁または下縁における応力集中係数 $\alpha_{\pm}$ の変化は、一般の傾向として、穴を有しない曲りはりの曲率の変化による傾向と類似の傾向を示す。すなわち、曲率 b/ρ の増大に伴って下縁の α_- は上昇し、逆に上縁の α_+ は低下する。穴の偏心距離 e/b の変化については、穴が上下縁に接近すると穴と縁との干渉によって $\alpha_{\pm}$ を高める方向に働く。しかし、穴の上下縁への同じ距離の接近に対しては、下縁の α_- のほうが上縁の α_+ より大きな値を示す。本実験の範囲で得られた α_- の最大値は約1.4であった。

(2) 穴の上下端における $\alpha_{\pm}$ については、曲率半径 b/ρ の増加に伴って上端の α_+ は上昇し、逆に下端の α_- は低下する。この傾向ははりの上、下端における傾向とは逆である。偏心距離 e/b の変化によっては穴が中心位置よりも上昇するとき、上端の α_+ は増大し、逆に下端の α_- は低下する。これに反して、穴が中心位置から下がると、上下端の $\alpha_{\pm}$ はこれと逆の傾向を示す。しかし、上下同一の偏心距離に対しては上端の

α_+ のほうが下端の α_- より大きくなる。本実験で得られた上端の α_+ の最大値は約1.8であった。

(3) 曲りはりと真直はりと該当点における応力比 m を求めたが、はりの上縁においてはすべての場合に1よりも低く、下縁においてはすべての場合に1よりも大きくなった。穴の上端については、すべての場合に1よりも大きく、特に穴が下方に移動すると m は急激に上昇して、本実験の範囲では約3.8のきわめて高い値を示した。穴の下端については $e/b = +0.2$ の場合を除いて、すべて1以下であった。

(4) 穴を有する曲りはりの設計において各部の応力値をほぼ同じに押えるためには、本実験の範囲では、穴がはりの中心線上に位置する場合が最も効果的であると言える。穴が上部に移動すると、穴の上端の応力が他の点に比べて増大し、逆に下部に移動すると穴の

下端またははりの下縁の応力が他の点に比べて増大する。

(昭和41年5月17日 日本材料学会第15期総会講演会にて講演)

参 考 文 献

- 1) Howland, R.C.J., and A.C. Stevenson, Phil. Trans. Roy. Soc., A-232, 155 (1933);
Tuji, Z., Sci. Paper Inst. Phy. Chem., Tokyo, **9**, 65 (1929);
Ryan, J.J., and L.J. Fischer, J. Frank. Inst., **225**, 513 (1938).
- 2) Frocht, M.M., and M.M. Leven, J. Appl. Mech., **18**, 107 (1951).
- 3) Peterson, R.E., Stress Concentration Design Factors, 127 (1962) John Wiley.