カレンダー中における流れ*

高 見 昭**

Flow in a Calender

by

Akira TAKAMI

(Yamawaki Gakuen, Tokyo)

Calendering is a continuous operation of driving a pair rolls to compress softened materials into a sheet of uniform thickness. Gaskell presented a theory of the steady isothermal flow of an incompressible Newtonian liquid in a symmetrical calender. In his treatment, it is assumed that the boundaries of the liquid are approximately in parallel. It is the purpose of this paper to take into consideration not only the velocity component v_x but also the velocity component v_y and we have determined v_x and v_y and the pressure p as a function of the position variables x and y .

With regard to the motion of the liquid, the following assumptions are made: (1) that the liquid is Newtonian; (2) that the liquid is incompressible; (3) the motion of the liquid is laminar; (4) that the motion is steady; (5) that no force acts on the liquid; (6) that the motion is symmetrical about the x axis; (7) that the separation at the nip $2H_0$ is small in comparison with the roll radius R ; (8) that the radii of the rolls are equal and the rolls rotate at the same speed; (9) and that there is no relative motion between the rolls' wall surfaces and the liquid in immediate contact with the wall. We shall consider only the immediate region of the nip.

Let us take a rectangular coordinate system whose origin is at the middle point between the centers of the rolls.

We get

$$\varphi = \sum_{i=1}^2 B_i \left(\frac{\alpha_i \sinh k_i Y}{k_i^2} + \beta_i Y \right) \cos k_i X,$$

where B_i , α_i , β_i and k_i are constants. $x/R = X$, $y/R = Y$.

The velocity component v_x and v_y are determined by $v_x = -\partial\varphi/\partial Y$ and $v_y = \partial\varphi/\partial X$. Also, p is obtained.

(Received Feb. 24, 1967)

カレンダーとは、一對のロールを駆動して、加工試料のかたまりを一様な厚さの板状に連続成形する作業であって、すでに Gaskell は対称カレンダーにおける非圧縮性のニュートン液体の定常恒温流れの理論を提出した。かれはロール壁面を平行平板とみなし、液体の流れも平行流として流れの速度ベクトルの成分 v_x , v_y の中で v_y を無視している。ここでは v_y をも考慮に入れて v_x , v_y および圧力 p を、 x , y の関数として解析する。

簡単のために、次の諸仮定をする。(1) 液体はニュートン液体である。(2) 液体は非圧縮性である。(3) 流れは層流である。(4) 流れは定常流である。(5) 液体には重力のような外力は働かない。(6) 流れは x 軸に関して対称である。(7) ロール間隙はロール半径に比較して小さい。(8) ロール半径は等しく、同一速度で回

転する。(9) ロール壁面と液体との間にすべりが無い。また、ロールの最小間隙に近い領域を考える。

ロールの中心線の中点を原点とする直角座標 x , y を用いれば (Fig. 1), v_x に対する運動方程式は仮定(1)~(5), (7)により、

Fig. 1. Flow in a calender.

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

* 原稿受理 昭和42年2月24日

** 山脇学園 東京都港区赤坂4丁目

$$\eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

ただし、ここに η は粘性率である。

連続の方程式は、

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

変数 x, y をロールの半径 R を用い、

$$\frac{x}{R} = X \quad (4)$$

$$\frac{y}{R} = Y \quad (5)$$

とおいて、 X, Y に変えれば、(1), (2), (3)式から

$$\frac{\eta}{R} \frac{\partial^2 v_x}{\partial Y^2} = \frac{\partial p}{\partial X} \quad (6)$$

$$\frac{\eta}{R} \frac{\partial^2 v_y}{\partial Y^2} = \frac{\partial p}{\partial Y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial Y} + \frac{\partial v_x}{\partial X} = 0 \quad (8)$$

(8)式から、

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial Y} \quad (9)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial X} \quad (10)$$

とおいて、(9), (10)式を(6), (7)式へ代入して、

$$-\frac{\eta}{R} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} = \frac{\partial p}{\partial X} \quad (11)$$

$$\frac{\eta}{R} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X \partial Y^2} = \frac{\partial p}{\partial Y} \quad (12)$$

(11), (12)式から p を消去して、

$$-\frac{\partial^4 \varphi}{\partial Y^4} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^2 \partial Y^2} \quad (13)$$

いま、

$$\varphi = X_0(X) Y_0(Y) \quad (14)$$

とおき、(14)式を(13)式へ代入して、

$$-X_0 Y_0'''' = X_0'' Y_0'' \quad (15)$$

(15)式の両辺を $X_0 Y_0''$ で割り、各辺が X または Y の

みの関数となるので定数 k^2 に等しいとおいて、

$$\frac{Y_0''''}{Y_0''} = -\frac{X_0''}{X_0} = k^2 \quad (16)$$

(16)式から、

$$X_0 = c_1 \cosh kX + c_2 \sinh kX \quad (17)$$

$$Y_0 = \frac{c_3 \cosh kY}{k^2} + \frac{c_4 \sinh kY}{k^2} + DY + E \quad (18)$$

ただし、ここに c_1, c_2, c_3, c_4, D, E は定数である。(17),

(18)式を(14)式へ代入して、

$$\begin{aligned} \varphi = & (c_1 \cosh kX + c_2 \sinh kX) \left(\frac{c_3 \cosh kY}{k^2} \right. \\ & \left. + \frac{c_4 \sinh kY}{k^2} + DY + E \right) \end{aligned} \quad (19)$$

(19)式を(10)式へ代入して、

$$\begin{aligned} v_y = & (-c_1 k \sinh kX + c_2 k \cosh kX) \left(\frac{c_3 \cosh kY}{k^2} \right. \\ & \left. + \frac{c_4 \sinh kY}{k^2} + DY + E \right) \end{aligned} \quad (20)$$

境界条件

$$v_y|_{Y=0} = 0 \quad (21)$$

を(20)式へ代入して、

$$E = -c_3/k^2 \quad (22)$$

(22)式を(19)式へ代入して、

$$\begin{aligned} \varphi = & (c_1 \cosh kX + c_2 \sinh kX) \left(\frac{c_3 \cosh kY}{k^2} \right. \\ & \left. + \frac{c_4 \sinh kY}{k^2} + DY - \frac{c_3}{k^2} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

(23)式を(9)式へ代入して、

$$\begin{aligned} v_x = & -(c_1 \cosh kX + c_2 \sinh kX) \left(\frac{c_3 \sinh kY}{k} \right. \\ & \left. + \frac{c_4 \cosh kY}{k} + D \right) \end{aligned} \quad (24)$$

仮定(6)から、境界条件、

$$\frac{\partial v_x}{\partial Y}|_{Y=0} = 0 \quad (25)$$

と(24)式から、

$$c_3 = 0 \quad (26)$$

(26)式を(23)式へ代入して、

$$E = 0 \quad (27)$$

(26), (27)式を(20)式へ代入して、境界条件

$$v_y|_{X=0} = 0 \quad (28)$$

を考慮に入れれば、

$$c_2 = 0 \quad (29)$$

ロールの回転角速度を Ω 、ロール壁面上速度の x 成分 u_x , y 成分 u_y は、それぞれ近似的に、

$$u_x = \Omega R \left(1 - \frac{X^2}{2} \right) \quad (30)$$

$$u_y = \Omega R X \quad (31)$$

また、 Y, H_0, R, X の関係も近似的に、

$$Y = \frac{H_0}{R} + \frac{X^2}{2} \quad (32)$$

ただし、ここには H_0 はロール壁面と x 軸との最小間隙である。

(26), (29)式を(23)式へ代入し、

$$\varphi = c_1 \cosh kX \left(\frac{c_4 \sinh kY}{k^2} + DY \right) \quad (33)$$

(33)式を(9)式へ代入し、

$$v_x = -c_1 \cosh kX \left(\frac{c_4 \cosh kY}{k} + D \right) \quad (34)$$

(33)式を(34)式へ代入し、近似的に整理すれば、

$$\begin{aligned} u_x = & -c_1 \cosh kX \left\{ \frac{c_4}{k} \cosh k \left(\frac{H_0}{R} + \frac{X^2}{2} \right) + D \right\} \\ \doteq & -c_1 \left(1 - \frac{k^2 X^2}{2} \right) \left\{ \frac{c_4}{k} \left(\cosh \frac{kH_0}{R} + \frac{kX^2}{2} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \sinh \frac{kH_0}{R} \right) + D \Big\} \\ & \doteq -\frac{c_1 c_4}{k} \cosh \frac{kH_0}{R} - c_1 D \\ & + \left(-c_1 c_4 \sinh \frac{kH_0}{R} + k c_1 c_4 \cosh \frac{kH_0}{R} \right. \\ & \left. + k^2 c_1 D \right) \frac{X^2}{2} \end{aligned} \quad (35)$$

ここで, (30)式と比較すれば,

$$\begin{aligned} \Omega R &= -\frac{c_1 c_4}{k} \cosh \frac{kH_0}{R} - c_1 D \quad (36) \\ -\Omega &= -\frac{c_1 c_4}{R} \sinh \frac{kH_0}{R} + \frac{k c_1 c_4}{R} \cosh \frac{kH_0}{R} \\ &+ \frac{k^2 c_1 D}{R} \end{aligned} \quad (37)$$

(33)式を(10)式へ代入し,

$$v_y = -c_1 k \sinh k X \left(\frac{c_4 \sinh k Y}{k^2} + D Y \right) \quad (38)$$

(32)式を(33)式へ代入し, 近似的に整理すれば,

$$\begin{aligned} u_y &= -c_1 k \sinh k X \left\{ \frac{c_4}{k^2} \sinh k \left(\frac{H_0}{R} + \frac{X^2}{2} \right) \right. \\ &+ D \left(\frac{H_0}{R} + \frac{X^2}{2} \right) \Big\} \\ &\doteq -c_1 k^2 X \left\{ \frac{c_4}{k^2} \left(\sinh \frac{kH_0}{R} + \frac{k X^2}{2} \cosh \frac{kH_0}{R} \right) \right. \\ &+ \frac{D H_0}{R} + \frac{D X^2}{2} \Big\} \\ &\doteq -c_1 c_4 X \sinh \frac{kH_0}{R} - \frac{c_1 D}{R} k^2 H_0 X \end{aligned} \quad (39)$$

ここで, (31)式と比較すれば,

$$\Omega = -\frac{c_1 c_4}{R} \sinh \frac{kH_0}{R} - c_1 D H_0 \frac{k^2}{R^2} \quad (40)$$

ここで,

$$\frac{kH_0}{R} = \xi \quad (41)$$

$$c_1 c_4 = \alpha \quad (42)$$

$$c_1 D = \beta \quad (43)$$

とおけば, (36), (37), (40)式はそれぞれ,

$$\Omega R = -\frac{\alpha H_0}{R \xi} \cosh \xi - \beta \quad (44)$$

$$-\Omega = -\frac{\alpha}{R} \sinh \xi + \alpha \frac{\xi}{H_0} \cosh \xi + R \frac{\xi^2}{H_0^2} \beta \quad (45)$$

$$\Omega = -\frac{\alpha}{R} \sinh \xi - \beta \frac{\xi^2}{H_0} \quad (46)$$

(44), (45), (46)式から α, β, Ω を消去すれば,

$$\tanh \xi = \xi \frac{R^2 \xi - H_0^2}{R^2 \xi^2 + R \xi^2 H_0 - 2 H_0^2} \quad (47)$$

(47)式から $\xi_i (i=1, 2)$ が求まり, ξ_i に対応する α_i, β_i, k_i が得られる. したがって α_i, β_i, k_i の値を(42)式と(43)式を用いて, (33)式へ代入し,

$$\varphi = \sum_{i=1}^2 B_i \left(-\frac{\alpha_i \sinh k_i Y}{k_i^2} + \beta_i Y \right) \cos k_i X \quad (48)$$

ただし, ここに B_i は定数である. B_i は流量, 圧力から求められる. したがって, φ が知れるので v_x, v_y, p が求まる.

(昭和41年11月26日 第15回レオロジー討論会にて講演)

参 考 文 献

- 1) Gaskell, R.E., J. Appl. Mech., **17**, 334 (1950).

(513頁より)

Journal of Polymer Science, Vol. A4-1

73. Non-Newtonian Behavior of Polymers with Log-Normal Molecular Weight Distribution, W. Conti and I. Gigli, 1 093.

Journal of Polymer Science, Vol. A4-2

74. Mechanism of Fracture in Glassy Polymers II. Survey of Crazing Response Pureing Crack Propagation in Several Polymers, R.P. Kambour, 17.
75. Some Viscoelastic Properties of Siloxane Polymers Dureing Irradiation, R.K. Jenkins, 41.
76. Tensile Strength of Oriented Polymers below the Glass Transition Temperature, D.C. Prevorsek, 63.
77. Effect of Birefringence on Light Scattering from Oriented Systems, S.N. Stidham and R.S. Stein, 89.
78. Measurement of Relaxation Time of a Polyethylene Melt, C.T. Aloisio, S. Matsuoka and B. Maxwell, 113.
79. Rheological Properties of Polymer Melts, G.V. Vinogradov and A.Y. Malkin, 135.

(524頁へ)