静荷重下における岩石の破壊条件*

桜 井 春 輔**

Failure Criterion of Rock under Static Loading

by

Shunsuke SAKURAI

(Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe)

A new failure criterion of rocks and rock-like materials is hereunder proposed in this paper. The theoretical consideration of the criterion is presented as well as its experimental verification. In this study failure is defined as collapse of the material.

The criterion is based on the assumption that the ultimate strength of the material under a compressive state of stress depends on its shearing strength, while under the tensile stress it may be collapsed by the tensile fracture which is thought to be predictable in the Griffith theory.

It has already been verified that the shearing strength of the material can be utilized as the function of the mean stress instead of being concluded as peculiar to the material itself. Theoretically, however, the shearing strength of the material may be considered in effect as dependent on the quantity of the tensile fractures induced around the crack or discontinuity, and the said quantity of the tensile fractures is, according to the Griffith theory, the function of the minimum stress. Therefore it is proposed as condition for the criterion that the ultimate octahedral shearing stress represents the function of both the mean stress and the minimum principal stress. The proposed failure condition may also be expressed in this way that the maximum elastic strain energy of distortion stored in the material depends upon both the mean stress and the minimum principal stress.

Under an extremely high compressive stress state, failure may be caused by plastic flow, so that the failure criterion may also be proposed in this way that the maximum octahedral shearing stress is the function only of the mean stress.

As extended application of Coulomb's and Mohr's criteria to the three dimensional stress state will some of particular cases of the criterion be defined.

The experimental results obtained from rock salt, marble, sandstone, and concrete show fairly good agreement with the failure criterion proposed above.

(Received May 27, 1968)

1 は し が き

岩石の破壊条件はすでに種々提案されているが、その破壊のモードは非常に複雑であり、そのすべてを説明できる段階には至っていない。また、破壊の定義が各研究者によって異なっているため、岩石の破壊実験の結果を比較する場合には、その破壊条件はさらに複雑な様相を示すように思える。しかし、土木工学の立場から岩石の破壊を定義づける場合には岩石の最終強度、すなわち崩壊時の荷重強度が最も興味深い。

工学的立場において現在しばしば用いられるおもな破壊条件としては、次のようなものがある。(1) Mohr

の説、あるいはその特殊な場合と考えられるCoulombの式、(2) 最大せん断応力説 (Tresca の理論)、(3) せん断ひずみエネルギー説 (von Mises, Henckyら)、(4) 正八面体せん断応力説 (Nadai の理論)、(5) Griffithの理論、あるいは McClintock と Walsh による修正 Griffith 理論。このうち、(1)は崩壊時の応力状態を与えるものと考えられるが、(2)、(3)および(4)は弾性破壊に対するものであり、したがって、降伏条件と考えるべきである。また(5)は、微視的なき裂先端に引張破壊の生ずるときの応力状態を与えるものであり、崩壊時の応力状態とは必ずしも一致しない。

Mohr の破壊説は一般に岩石の崩壊条件として用いられるが、この説では中間主応力の影響が無視されて

* 原稿受理 昭和43年5月27日

** 正 会 員 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町

いる。したがって、ここでは岩石の崩壊時の種々の異なったモードに対する応力状態を中間主応力をも含めて統一的に説明し、その崩壊条件式を得ることを目的とする。一般に、破壊や崩壊に対する条件は応力とひずみによって表現すべきであるが、応力とひずみが1対1で対応していると仮定し、ここでは主応力の三次元空間での表示を試みる。なお載荷前の材料は等質等方性を示すと仮定する。また、ここで破壊とは材料内部にき裂やすべりなどが発生した状態を表わし材料全体の崩壊と区別して取り扱う。

2 圧縮応力状態での崩壊

岩石に外力として圧縮応力が作用する場合でも、内部に存在する微視的なき裂（おもに結晶粒界に存在すると考えられる）の周辺には引張応力が発生し、それが材料固有の引張強度より大きくなるときのき裂の周辺から引張破壊が発生すると考えられる。¹²²⁾ この条件から定量的に導かれたのが Griffith の理論であり、次の式で表わされる。

$$(a) \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 \leq 0; \sigma_3 = -K \quad (1)$$

$$(b) \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 > 0; (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 8K(\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (1')$$

ここで、 σ_1 および σ_3 はそれぞれ最大および最小主応力を、 K は材料固有の単軸引張強度 ($K > 0$) を表わす。ただし圧縮応力を正とする。この条件式には中間主応力は考慮されていないが、三次元への拡張を行なった Sack³⁾ の理論計算によれば、最も危険なき裂は中間主応力の方向に平行な面上にあり、き裂周辺の引張破壊は中間主応力には無関係であると考えられる。これは Griffith の理論が三次元応力状態においても成立することを示すものである。Jaeger, Handin⁴⁾ らは、岩石の破壊実験の結果から中間主応力の崩壊への影響は無視できないと指摘した。これは Sack の結果と矛盾するように思えるが、Sack および Griffith の結果は、き裂周辺の引張破壊の発生時の応力状態を与えるものであり、実験より得られる岩石の崩壊時の応力とは当然異なるものである。

筆者の行った、ぜい性材料としてのせっこう-砂混合材料の圧縮実験の結果は、き裂周辺に引張破壊が発生しても外力としての荷重は増加し、最終的にはせん断によって崩壊に至ることを示している。しかしこの場合、初期の引張破壊が崩壊時の応力状態に影響を及ぼすことは言うまでもない。

圧縮応力状態では、岩石内部の微視的なき裂は閉じて、その表面には摩擦力が作用するであろうことは容易に想像がつく。Griffith の理論では、このき裂面の摩擦力を無視しているが、McClintock と Walsh⁵⁾ はこの影響を考慮して次の条件式を得ている。ただし、き裂は非常に幅の狭いものであると仮定する。

$$\mu(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{1 + \mu^2} = -4K \quad (2)$$

ここに μ はき裂面の摩擦係数を表わす。(2)式はまた次のように書き表わすことができる。

$$\sigma_1 - \sigma_3 = A\sigma_3 + B \quad (3)$$

ここで A および B は定数である。

(3)式を、直線 PQ として Fig. 1 に図示する。この直線上の応力状態ではき裂周辺に引張破壊が生ずるが、さきにも述べたように全体として崩壊するに至らず、さらに主応力差 $\sigma_1 - \sigma_3$ が増加して、その最終値 P'Q' に達して初めて崩壊する。したがって、いま求めようとする崩壊条件は P'Q' で表わされる応力状態である。

Fig. 1. Relation between differential stress and minimum principal stress.

Fig. 1 より明らかなように、最小主応力が増加するにつれて岩石の見掛けの強度は大きくなる。このことから最小主応力は岩石の強度を支配する要因と考えられる。しかし、Fig. 1 の横軸を平均応力 $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ にとっても、上に述べたと同様の傾向を得ることができ、したがって、平均応力も強度を支配する要因として取りうるように思えるが、これは次のような考察によって適当でないことがわかる。すなわち、岩石の圧縮実験において、注意深く供試体を観察すれば、内部に生ずる引張破壊は Fig. 2 に示すように、中間主応力と最大主応力の両者に平行な面に沿って発生することが明らかである。これは軸方向分離破壊と呼ばれ、微視的には Fig. 3 に示すように種々の傾きを持つき裂の周辺から常に最大主応力に平行にき裂が発生すると考えられる。これは Brace⁶⁾ によって指摘されていることであり、また筆者の実験によっても明らかである。このように、圧縮応力状態における岩石の引張破壊は、中間主応力と最大主応力によって決定される

Fig. 2. Cleavage fracture perpendicular to minimum principal stress.

Fig. 3. Three different types of axial cleavage fracture.

面に沿って生ずると考えられるので、この面に垂直に圧縮応力が作用すると破壊発生は困難となる。したがって、この面に垂直な応力、すなわち、最小主応力が軸方向分離破壊を支配する要因と考えるのが妥当であり、Fig. 2 より明らかなように平均応力は、その作用する方向を考慮すれば適当ではない。

さきにも述べたように、岩石の崩壊はせん断によって生ずるものであり、静水圧がいくら増大しても崩壊しないことを考慮すれば、岩石は作用するせん断応力がある値に達したときに崩壊すると考えるべきである。したがって、せん断応力としては静水圧成分に対応した正八面体せん断応力をとるのが適当であろう。すなわち

$$\tau_{oct} = F \quad (4)$$

ここに

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はそれぞれ最大、中間、最小主応力を示し、 F は岩石のせん断強度を表わす。岩石が崩壊するときには、さきにも述べたように、すでに内部に多くの引張破壊が発生している。言い替えれば、崩壊時には材料はもはや初期のものとは異なり、その程度は最小主応力によって左右される。したがって、岩石のせん断強度も最小主応力の関数となるはずであり、(4)式は次のように表わされる。

$$\tau_{oct} = F(\sigma_3) \quad (5)$$

砂のような粒状体については、そのすべり面上の摩擦が崩壊に対して大きく影響を及ぼすが、岩石の場合もその崩壊時には結晶および結晶粒が互いに分離し、すべり面付近では粒状体に近くなっていると考えられるので、この摩擦の影響は無視できないものとなろう。

いまこのすべり面において Coulomb の式

$$\tau = \mu\sigma + C \quad (6)$$

が成立すると仮定すれば、崩壊時のせん断応力 τ に対するこの摩擦の影響は右辺第一項で表わされ、その大きさは垂直応力 σ に比例することがわかる。(6)式中 μ は摩擦係数、 C は粘着力を表わす。ここではせん断応力として正八面体せん断応力を考慮しているので、すべり面の摩擦の影響はその面に対する垂直応力としての平均応力 σ_m を用いるべきであり、したがって、崩壊条件式は摩擦の影響だけについて考えれば、一般に次のように表わされる。

$$\tau_{oct} = F(\sigma_m) \quad (7)$$

ここで

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

この(7)式によって示される条件式は、Nadai⁹⁾によって提案されたものであるが、材料内部のき裂周辺に生ずる引張破壊の影響は考慮されていない。

以上の考察から、岩石のせん断強度は最小主応力と平均応力によって左右され、材料固有のものではない。したがって、岩石の崩壊条件として、(5)式と(7)式から次式が得られる。

$$\tau_{oct} = F(\sigma_m, \sigma_3) \quad (8)$$

この条件式は次のようにも解釈することができる。すなわち、岩石にたくわえられるせん断ひずみエネルギーのレベルは平均応力と最小主応力によって定められる。いま、 τ_{oct} が σ_m と σ_3 の一次の関係式で表わされると仮定すれば、(8)式は次のようになる。

$$\tau_{oct} = \alpha\sigma_m + (\beta\sigma_3 + \gamma) \quad (9)$$

ここに、 α, β, γ は岩石の種類によって決まる定数であり、右辺の第一項は岩石の内部摩擦による影響を示し、第二項括弧内は崩壊時の岩石の粘着力と考えることができる。(9)式を τ_{oct} と σ_m の座標で表わすと直線関係になり、Fig. 4 (a) のようになる。この崩壊条件を三次元に拡張した Coulomb の式と名づける。また、 τ_{oct} が σ_m と σ_3 によって次のように表わされる場合、

$$\tau_{oct} = \sqrt{\alpha'\sigma_m + (\beta'\sigma_3 + \gamma')} \quad (10)$$

(10)式を τ_{oct} と σ_m の座標で表わすと、Fig. 4 (b) のようになりこれを三次元に拡張した Mohr の式と呼ぶことにする。

Fig. 4 (a) Extended Coulomb's criterion (b) Extended Mohr's criterion.

3 引張応力状態での崩壊

少なくとも一つの主応力が引張応力であるときも、岩石内部に存在する微小なき裂の周辺から引張破壊が発生することは圧縮応力を受ける場合と同様である。いま、最小主応力としての引張応力の絶対値が十分に大きい場合には、き裂周辺から発生する引張破壊の伝搬は瞬間的であり、引張破壊の発生はそのまま材料の崩壊を意味するであろう。また、引張応力のもとでは、き裂は閉じることなく、したがってこの場合、崩壊条件として(1)式に示す Griffith の理論が適用できる。しかし、最小主応力として引張応力が作用するときでも、その絶対値が充分大きくない場合には、き裂周辺に発生する引張破壊がそのまま崩壊につながるかは明らかでなく、よって(1)' 式に示す Griffith の理論の適用性は確かでない。

いま、さきに提案した τ_{oct} と σ_m の座標で表わされた崩壊条件式との比較を容易にするために、(1)式を τ_{oct} と σ_m で表わすと次のようになる。

$$\sigma_2 = \sigma_3; \tau_{oct} = \sqrt{2}(\sigma_m + K) \quad (11)$$

$$\sigma_2 = \sigma_1; \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_m + K) \quad (11')$$

これは、それぞれ中間主応力が最小主応力に等しい場合と、最大主応力に等しい場合の両極端に対する条件式であり、その他の一般的な崩壊時の応力状態は、これらの2直線の間の範囲で示される。なお、この条件式は正八面体せん断応力が次の範囲にある場合に成立するものである。すなわち、

$$\tau_{oct} \leq 4\sqrt{2}K/3 \quad (12)$$

いま、最小主応力が岩石固有の引張強度に達していないときでも、引張応力であるかぎり(1)' 式で示す Griffith の理論が成立すると仮定すれば、さきと同じようにして(1)' 式を τ_{oct} と σ_m で表わして次の条件式を得る。

$$\sigma_2 = \sigma_3; \sigma_m = \tau_{oct}(9\tau_{oct}/32K - 1/2\sqrt{2}) \quad (13)$$

$$\sigma_2 = \sigma_1; \sigma_m = \tau_{oct}(9\tau_{oct}/32K + 1/2\sqrt{2}) \quad (13')$$

なお、この条件式は次の範囲において成立するものである。

$$\tau_{oct} \geq 4\sqrt{2}K/3 \quad \text{ただし} \quad \sigma_3 < 0 \quad (14)$$

4 非常に大きな圧縮応力状態での崩壊

三主応力が、ともに大きな圧縮応力である場合にも(1)' 式に示す条件式を満足する応力状態において、理論的には岩石内部の微視的なき裂の周辺に引張破壊が発生するはずである。しかし非常に高圧下においては、岩石は塑性流動を起こすことが知られており、したがって、多結晶体としての岩石は結晶粒界に存在する微小なき裂から引張破壊が発生する以前に、結晶粒内にすべりが生ずるものと考えられる。したがって、この場合の崩壊条件としては岩石内部に引張破壊が生じな

いので、崩壊（塑性流動）時の正八面体せん断応力は最小主応力に無関係となり、(7)式が適用されるはずである。また、塑性流動は結晶のすべりによることを考慮すれば、それは von Mises の条件式に近いものになる。

以上述べた崩壊条件式を図示すると Fig. 5 のようになる。

Fig. 5. Proposed failure criterion.

5 崩壊条件のII面上での表示

Fig. 5 に示す崩壊条件は、三主応力を軸とする直角交座座標系において曲面として表わすことができる。この曲面は、Drucker の物質の安定性の解釈によれば凸曲面でなければならない。そして、等質等方性を示す材料に対しては静水圧線 ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) を軸とし、主応力相互間に交換性のあるような凸曲面となる。いま、この曲面を静水圧線に垂直な平面 (II-面) 上で静水圧 (平均応力) の関数として表わすことにすれば、Fig. 5 に示す崩壊条件は Fig. 6 のようになる。すなわち、平均応力の増加につれて正三角形からしだいに円に近づき、もし最終的に von Mises の条件式が成立すると仮定すれば、その半径は $\sqrt{3}K_0$ に収束する。ただし K_0 は岩石の正八面体せん断強度を表わす。

Fig. 6. Proposed failure criterion expressed on II-plane.

6 実験結果による崩壊条件式の確証

ここで得られた崩壊条件式を実験的に確かめるためには、岩石を種々の三軸応力状態で試験しなければならない。しかも、慣例的な二主応力が常に等しい三軸

試験機ではなく、三主応力を独立に変化させる実験装置が必要となる。この装置は非常に複雑であり、また高価なためあまりその実験例をみない。筆者は鉛直方向 100 t、水平二方向 50 t の油圧シャッキを互いに直交させた試験機を試作し、岩塩の三軸圧縮試験を行なって、荷重がもはやそれ以上増加できなくなったときの応力を記録した。この実験結果を Fig. 7 に示す。また von Karman と Boker が行なった大理石に対する三軸試験の結果をプロットすると Fig. 8 のようになる。さらに、Fig. 9 は和泉砂岩に対して赤井が行なった三軸圧縮試験の結果である。これらの結果から、

Fig. 7. Failure criterion of rock salt.

Fig. 8. Failure criterion of white Carrara marble. (After Murrell)

(a) Relation between octahedral shearing stress and mean stress

Fig. 9. Failure criterion of Izumi-sandstone. (After Akai).

岩石の崩壊時における正八面体せん断応力は、平均応力の関数であるとともに最小主応力の関数であることが明らかであり、したがって(8)式で示す崩壊条件が成立することがわかる。また、Fig. 9 の結果から和泉砂岩に対しては、最小主応力が与えられるとその正八面体せん断強度は平均応力にはほぼ無関係に定まるようである。一方、大理石の正八面体せん断強度は、平均応力および最小主応力の両者の関数として表わされるが、近似的には最小主応力のみの関数と考えてよいであろう。

丹羽、小林¹⁵⁾は、岩石と比較的類似の力学的性質を示すセメントモルタル、コンクリート、人工軽量コンクリートなどについて一連の三軸圧縮試験を行なっている。Fig. 10 に人工軽量コンクリートに対するその実験結果を示す。これは、 σ_2 を σ_1 と等しくした Case 1 から、 σ_2 を σ_3 と等しくした Case 5 までの間を 4 等分した载荷状態での結果である。Fig. 10 (a) は崩壊時の応力状態を τ_{oct} と σ_m の座標で表わしたものであり、Fig. 10 (b) は τ_{oct} と σ_3 の関係を示したものである。この結果から人工軽量コンクリートの正八面体せん断強度は、最小主応力によってほぼ一意的に定まることが明らかである。

(b) Relation between octahedral shearing stress and minimum principal stress

Fig. 10. Failure criterion of lightweight concrete (After Niwa et al.).

7 む す び

Fig. 5 に示す崩壊条件は数少ない実験 データーからではあるが、岩石の崩壊に対してかなりよくあてはまるようである。すなわち、岩石の正八面体せん断強度は平均応力と最小主応力の関数として定まり、また、近似的には最小主応力のみの関数と考えてもさしつかえないであろう。

なお、ここで提案した崩壊条件式を完全に確証するためには三軸引張実験や超高压下における三軸圧縮実験を行なわなければならないが、これらは今後の研究課題である。最後に貴重な実験データーの使用を許可していただいた京大赤井浩一教授、丹羽義次教授ならびに小林昭一助教授に感謝の意を表します。

(昭和42年11月28日 第2回岩の力学国内シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) Griffith, A. A., Phil. Trans. Roy. Soc., A, **221**, 163 (1920).
- 2) Griffith, A. A., Proc. 1st Intern. Cong. Appl. Mech., Delft, 55 (1924).
- 3) Sack, R. A., Proc. Phys. Soc. London, **58**, 729 (1946).
- 4) Jaeger, J. C., and E. R. Hoskins, J. Geophy. Res.,

71, 2 651 (1966).

- 5) Handin, J., *et al*, J. Geophy. Res., **72**, 611 (1967).
- 6) Sakurai, S., and Y. Abe, Proc. 11th Japan Congr. Mat. Res., 167 (1968).
- 7) McClintock, F. A., and J. B. Walsh, 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1 015 (1962).
- 8) Brace, W. F., *et al*, J. Geophy. Res., **71**, 3 939 (1966).
- 9) Nadai, A., "Theory of Flow and Fracture of Solids", **1**, 225 (1950) McGraw-Hill, New York.
- 10) Drucker, D. C., "Structural Mechanics", Ed. by J. N. Goodier and N. J. Hoff, 407 (1960) Pergamon Press.
- 11) Hill, R., "The Mathematical Theory of Plasticity", 17 (1950) Oxford at the Clearendon Press.
- 12) Sakurai, S., Ph. D Thesis submitted to Michigan State University (1966).
- 13) Murrell, S. A. F., "Rock Mechanics", Ed. by C. Fairhurst, 563 (1963) Pergamon Press.
- 14) 赤井浩一, 森 寛昭, 土木学会論文集, No. 147, 11 (1967).
- 15) 丹羽義次, 小柳 治, 小林昭一, 土木学会論文集, No. 143, 28 (1967).