単軸引張りによって前ひずみを与えた黄銅板の降伏条件*

白 鳥 英 亮** 池 上 皓 三***

The Yield Condition of the Brass Plate after its Uniaxial Prestraining

by

Eiryō SHIRATORI and Kozo Ikegami

(Tokyo Institute of Technology, Tokyo)

The applicability of Hill's anisotropic yield condition was studied experimentally for the anisotropic state given by uniaxial prestrain. The change of Hill's anisotropic constants with the increase of prestrain was investigated by the test of the small tensile specimens cut from the initially prestrained brass plate in various orientations to the initial prestraining direction. The subsequent yield surfaces after uniaxial prestraining and the necking angles of the small specimens were calculated by Hill's anisotropic constants and compared with the experimental results.

Hill's original expression of the anisotropic yield condition became a simpler form for the plate with the anisotropy given by the uniaxial prestrain. The calculated yield surfaces by this formula did not coincide well with the experimental values when the value of the subsequent yield stress in the initial prestraining direction was determined as that of the yield point in the reloading stress-strain diagram. But the coincidence between them became a little better when the applied stress value for the prestrain was adopted for the subsequent yield stress.

Hill's formula of the necking angle was found to be impertinent in instances where the amount of the prestrain was smaller than that of the strain at fracture, unless the change of the anisotropy due to the deformation was taken into consideration.

(Received May 29, 1968)

1 緒 言

異方性材料の降伏条件式については、Hill¹⁾、Dorn²⁾、Edelman³⁾ほか、吉村⁴⁾、および Svensson⁵⁾らが、それぞれ式を提案しているが、詳細な実験的検討は、ほとんど行なわれていない。そこで、本報告では、これらの式のうちで最も広く採用されている Hill¹⁾の異方性降伏条件式

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (1)$$

をとり上げ、その実験的検討を行なった。まず単軸方向に前ひずみを与えた黄銅板から、引張方向が前ひずみ方向と種々の角度をなす引張試験片を製作し、その実験結果から、Hillの異方性定数の前ひずみによる変化を調べた。次に、これらの異方性定数を用いて計算した降伏曲面を、二軸引張試験片による実験結果と比較した。また、単軸引張試験片に現われた「くびれ角」の測定値と Hillの理論による計算値との比較も行なった。

* 原稿受理 昭和43年5月29日

** 正 会 員 東京工業大学精密工学研究所 東京都目黒区大岡山

*** 正 会 員 東京工業大学大学院 東京都目黒区大岡山

2 実 験

2・1 異方性定数の決定

厚さ 1 mm の黄銅板 (BsP3-1/2H, 550°C 3 時間焼

Fig. 1. Tensile specimens.

なまし)を用いて, Fig. 1 の(a)の試験片 I を作り, その x 軸方向に種々の大きさ(1, 2, 10%)の前ひずみを与えた後, その試験片から, Fig. 1 の(b)に示すような板取りによって, 前ひずみ方向と引張方向とが, 角度 α ($\alpha = 0, 22.5, 45, 67.5, 90^\circ$) をなすような Fig. 1 の(c)の試験片 II を製作し, これらの試験片 II の引張試験結果から, Hill の異方性定数を決定した. これらの引張試験結果の一部を Fig. 2~4 に示してある. Fig. 2 は, 初めに与えた前ひずみの大きさが10%の場合について, 試験片 II の引張応力と引張ひずみの関係を示したものであり, Fig. 3 は, Fig. 2 から同じ大きさの永久ひずみに対応する応力と試験方向 α との関係を示したものである. また, Fig. 4 は, 試験方向 α とその方向の降伏応力^{*1}(すなわち, 試験片

Fig. 2. Typical stress strain diagrams.

Fig. 3. Tensile stress corresponding to the various amount of plastic strain.

*1 降伏点は, 0.02%の大きさの永久ひずみに対応する応力と定義した.

Fig. 4. Comparison of the uniaxial yield stress between the experimental and calculated values by Hill's theory.

II の降伏時の応力) $\sigma_{(\alpha)}$ との関係をそれぞれの大きさの前ひずみ ϵ_p について, 極座標方式によって示したものである.

いま, 試験片 I の単軸引張の方向に x 軸, それと直角に板幅方向に y 軸, 板厚方向に z 軸をとる. Fig. 1 の試験片 I の x 軸方向と角度 α をなす方向での降伏応力は $\sigma_{(\alpha)}$ であるから異方性の主軸 (すなわち, x 軸, y 軸, z 軸) に関する $\sigma_{(\alpha)}$ の成分は

$$\sigma_x = \sigma_{(\alpha)} \cos^2 \alpha, \sigma_y = \sigma_{(\alpha)} \sin^2 \alpha, \sigma_z = 0 \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{(\alpha)} \sin \alpha \cos \alpha, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

となる. (2)式を(1)式に代入すれば,

$$(F+H) \sin^4 \alpha + (G+H) \cos^4 \alpha + 2(N-H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sigma_{(\alpha)}^2 \quad (3)$$

が得られる. したがって, 3 方向の $\sigma_{(\alpha)}$ を測定すれば, (3)式から $(F+H)$, $(G+H)$, $(N-H)$ の値を定められるが, 本実験では, 精度向上のため, $\alpha = 0, 22.5, 45, 67.5, 90^\circ$ 方向の降伏応力の値を用いて, 最小自乗法により, $(F+H)$, $(G+H)$, $(N-H)$ の値を計算した. Table I は, その結果を示したものである. このようにして異方性定数の間の 3 個の関係

Table I. Relations between Hill's constants.

Prestrain (%)	$F+H$ ($\times 10^{-3}$)	$G+H$ ($\times 10^{-3}$)	$N-H$ ($\times 10^{-3}$)
1	10.88	8.14	15.79
2	11.47	7.77	7.47
10	5.75	2.83	3.74

式が得られる. 4 個の異方性定数 (F, G, H, N) の値を決定するのに必要な残り一つの関係式は, 次のようにして得られる. すなわち, 等方性材料では x 軸

*2 試験片 I の x 軸方向に 1%の前ひずみを与え応力を 0 まで除荷したときの, x 軸方向のひずみ ϵ_x に対する y 軸方向のひずみ ϵ_y および z 軸方向のひずみ ϵ_z の比すなわち ϵ_y/ϵ_x と ϵ_z/ϵ_x の値は, それぞれ -0.45, -0.55 であった. したがって, 実験に使用した材料は, 前ひずみを与える前の状態では, 等方性であるとみなした.

方向に単軸引張りの前ひずみを与えた場合には、異方性は x 軸の回りに回転対称となり、 y 軸方向と z 軸方向の前ひずみの大きさは等しくなるはずであるから、 y 軸方向の降伏応力と z 軸方向の降伏応力は等しくなければならない。したがって(1)式より

$$H = \frac{1}{2\sigma_{00}^2} (=G) \quad (4)$$

が与えられる。(4)式を用いて H の値を決め、Table Iの結果から F 、 G 、 H の値を計算した結果が、Table IIに示されている。Table IIに示すように、異方性が x 軸回りに回転対称であるための一つの必要条件 $H=G$ は、ほぼ満たされている。

Table II. Values of Hill's constants.

Prestrain (%)	F ($\times 10^{-3}$)	G ($\times 10^{-3}$)	H ($\times 10^{-3}$)	N ($\times 10^{-3}$)
1	6.52	3.78	4.36	20.15
2	7.66	3.96	3.81	11.29
10	4.33	1.41	1.42	5.16

2・2 異方性降伏曲面の測定

二軸引張状態で単軸方向の前ひずみを与えた後の降伏曲面は、次のようにして実験的に定めた。すなわち、Fig. 1の(a)の試験片Ⅰと同じ材料で製作した二軸引張試験片の x 軸方向に、まずある大きさの引張前ひずみ(1%)を与え除荷した後、応力比一定の経路($\sigma_y/\sigma_x=1/9, 1/4, 5/14, 1/2, 2/3, 1/1, 3/2, 2/1, 4/1, \infty$)に沿って負荷し、そのときの降伏点を決めた。次

Fig. 5. Comparison of the yield surface between the experimental and calculated values by Hill's theory.

に、 x 軸方向に前よりも大きな前ひずみ(2%)を与え、前と同様の方法で、そのときの降伏点を定めた。この実験方法については、すでに報告してある。得られた実験値を Fig. 5に示した。

3 実験結果の考察と Hill の理論の検討

3・1 異方性定数の変化

異方性降伏条件式(1)は、平面応力状態では、

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{F}{H}\sigma_y^2 + \frac{G}{H}\sigma_x^2 + 2\frac{N}{H}\tau_{xy}^2 = \frac{1}{H} \quad (5)$$

となる。いま

$$\frac{F}{H} = \frac{G}{H} = \frac{N}{3H} = 1 \quad (6)$$

が成立する場合には(5)式は、

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 + 6\tau_{xy}^2 = 2\sigma_{00}^2 \quad (7)$$

となり、等方性材料の降伏条件式の一つである Mises の式と一致する。したがって F/H 、 G/H 、および $N/(3H)$ の値を 1 と比較すれば、与えた前ひずみによる異方性定数の変化がわかる。Table IIIに F/H 、 G/H 、 $N/(3H)$ の値と与えた前ひずみの大きさとの

Table III. Change of Hill's constants by the amount of prestrain.

Prestrain (%)	$\frac{F}{H}$	$\frac{G}{H}$	$\frac{N}{3H}$
1	1.50	0.867	1.54
2	2.01	1.04	0.988
10	3.04	0.993	1.21

関係を示した。この結果から、異方性定数の比 F/H 、 G/H 、 $N/(3H)$ の値と前ひずみの大きさとの関係について次のことがわかる。すでに述べたように G/H の値はほぼ 1 に等しい。 $N/(3H)$ の値はほぼ 1.0 から 1.5 の間を変化している。 F/H の値は、与えた前ひずみの量が大きくなるにつれて増加する。したがって、

$$\frac{G}{H} = 1, \quad \frac{F}{H} = a, \quad \frac{N}{3H} = b \quad (8)$$

とおけば、単軸引張りによって前ひずみを与えた場合の降伏条件は、平面応力状態では二つの異方性定数 a および b を用いて

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + a\sigma_y^2 + \sigma_x^2 + 6b\tau_{xy}^2 = 2\sigma_{00}^2 \quad (9)$$

と書けることになる。ここで定数 a は前ひずみの量とともに増加するが、定数 b は与える前ひずみの大きさによって、約 0.98 から 1.54 の間を変化する。

3・2 試験片Ⅱの応力-ひずみ関係

Fig. 2に示した各試験方向の応力-ひずみ関係を比較すると、同一の大きさの引張応力に対する引張ひずみの大きさは、降伏後においては、引張方向と前ひずみ方向とのなす角度 α が大きくなるにつれて大きくなっている。すなわち、前ひずみに直角な方向のほうが伸びやすい。しかし、引張ひずみの大きさが約 3% 以

上になると各方向の応力-ひずみ線図は、一つの曲線に収束してくる傾向がある。

また、Fig. 3 に示すように、同一の大きさの永久ひずみに対応する応力の大きさは、永久ひずみの値が小さい範囲では、試験方向が $\alpha=90^\circ$ の場合より、 $\alpha=0^\circ$ の場合のほうが大きくなるが、永久ひずみの値が大きくなるにつれて対応する各方向の応力の大きさは、同一の値に近づく傾向がある。

これらの結果は、すでに報告した圧延材の引張試験結果と非常に異なっている。

Fig. 4 には、 $\sigma_{(\alpha)}$ の実験値のほかに、それらの計算値を(3)式と Table I から求め実線で示してある。試験片 I に与える前ひずみの大きさが、あまり大きくない場合は、与えた前ひずみと直角方向の降伏応力 $\sigma_{(90)}$ は、最初の降伏応力より小さくなり、いわゆる交差効果を示すが、与える前ひずみの大きさが大きくなると、 $\sigma_{(90)}$ は最初の降伏応力よりも大きくなり、交差効果は示さない。

3.3 Hill の降伏条件の検討

従来、Fig. 4 のような比較によって降伏条件の妥当性を論じたものがあるが、降伏条件は組合せ応力試験によって検討しなければならない。

さて、Table II の異方性定数の値を用いると、(5)式から Hill の降伏曲面が計算できる。Fig. 5 に、これらの計算値(図に実線で示した)と実験値との比較を示した。図から明らかなように、実験値と計算値の不一致の程度は、単軸方向に与えた前ひずみの大きさが大きくなるにつれて顕著になる。なお、前ひずみ方向の降伏応力 $\sigma_{(0)}$ の値としては前ひずみを与えたときの応力の値 $\sigma_{(0)}^P$ と前ひずみを与えた後、同じ経路に沿って除荷し再負荷したときの応力-ひずみ線図から定められる降伏点の値 $\sigma_{(0)}^R$ の二つが考えられる。前ひずみを与えた後の降伏曲面を決めるという点から考えれば、 $\sigma_{(0)}$ の値として、 $\sigma_{(0)}^R$ を用いるほうが合理的であるが、 $\sigma_{(0)}^P$ は与えた前ひずみの程度を表わすとも考えられるから、実用的には $\sigma_{(0)}^P$ を $\sigma_{(0)}$ とする場合もあろう。本実験の場合、与える前ひずみの大きさが大きくなるにつれて、Fig. 6 に示すように、 $\sigma_{(0)}^P$ と $\sigma_{(0)}^R$ の値は一致しなくなり、一般に $\sigma_{(0)}^P$ のほうが $\sigma_{(0)}^R$ より低くなった。試験片 II の結果を用いて異方性定数を定めたことは、 $\sigma_{(0)}$ の値として $\sigma_{(0)}^R$ の値を採用したことになるから、前ひずみを与えた点近傍では、降伏曲面の計算値が実験値より小さくなったと考えられる。もし $\sigma_{(0)}^P$ を $\sigma_{(0)}$ の値として異方性定数を定めた場合には、Fig. 5 に一点鎖線で示すような計算値が得られ、計算値は実験値にかなり近くなったが異方性定数は、回転異方性の一つの必要条件である(4)式を満足しないという矛盾を生じた。

Fig. 6. Yield point in the prestraining direction.

3.4 くびれ角の検討

Hill¹⁾によれば、異方性のある引張試験片に現われる「くびれ角」(β)は、

$$a \tan^2 \beta + b \tan \beta - c = 0 \quad (10)$$

で与えられる。ここで

$$a = H + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha [(N - F - 2H) + (N - G - 2H)]$$

$$b = 2 \sin \alpha \cos \alpha [(N - F - 2H) \sin^2 \alpha - (N - G - 2H) \cos^2 \alpha]$$

$$c = F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha + H$$

$$+ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha [(N - F - 2H) + (N - G - 2H)] \\ = \sigma_{(\alpha)}^2$$

である。

異方性定数の値に Table II の結果を用いて、(10)式から「くびれ角」(β)を計算し、試験片 II によって測定したそれらの実験値との比較を Fig. 7 に示した。これらは試験片 I に与えた前ひずみの大きさが、それぞれ 2% と 10% の場合のものである。(10)式から明らかなように、「くびれ角」には正負二つの値があるので、Fig. 7 には、これらを区別して示してある(「くびれ角」は Fig. 8 の矢印の方を正とする)。これらの図に示すように、各試験方向に関して、「くびれ角」の計算値は、かなり変化するが、実験値はほぼ一定の値(60~65°)を示している。この違いは、(10)式に用いた

Fig. 7. Comparison of the necking angle between the experimental and calculated values by Hill's theory.

Fig. 8. Necking angle.

異方性定数の値に関係があると考えられる。すなわち「くびれ角」の計算には、与えた前ひずみ状態における異方性定数を用いた。しかし試験片Ⅱに「くびれ」が発生するまでには、その試験片はさらに引張方向にかなりの変形（約30%）をしているから、「くびれ角」の計算には、「くびれ」発生直前の異方性定数を用いなければならない。ところが、Hillの理論では、ひずみ履歴による影響は考慮されていないので、くびれ発生直前の異方性定数を計算することができない。したがって、試験片が「くびれ」発生までに大きく変形する場合、(10)式からは正確に「くびれ角」を計算できない。また、すでに述べたように試験片は「くびれ」発生までに大きく変形しているので、試験片の最初の異方性は、単軸引張りによる異方性に比べて、無視できる程度になっているはずである。したがって、各試験方向の「くびれ」発生直前における異方性にはほとんど差がなく、「くびれ角」にも、その差が現われなかったものと考えられる。

4 結 言

単軸方向に前ひずみを与えた黄銅板から、前ひずみ方向と引張方向とが種々の角度をなす単軸引張試験片

を製作し、その試験結果から前ひずみによる Hill の異方性定数の変化を調べた。次に、これらの異方性定数を用いて計算した降伏曲面を、二軸引張試験片によるその実験値と比較し、実験に使用した材料については次のことがわかった。

(1) 単軸引張りによって異方性を与えた場合、Hill の異方性降伏条件式は、平面応力状態では近似的に次式

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + a\sigma_y^2 + \sigma_x^2 + 6b\tau_{xy}^2 = 2\sigma_{(0)}^2$$

で表わせた。ここで定数 a は前ひずみの量とともに増加し、定数 b は約0.98から1.54の間を変化した。また $\sigma_{(0)}$ は前ひずみを与えた方向の降伏応力である。

(2) Hill の異方性降伏曲面の計算値と実験値との間には、かなりの差があった。しかし、前ひずみを与えたときの応力の値を用いて異方性定数を定めると、その差は縮まった。

(3) Hill の「くびれ角」の計算式は、初めの異方性がきわめて大きく、くびれ発生までにあまり変形しない場合にしか適用できないようであった。

(昭和43年5月21日 日本材料学会第17期総会講演会にて講演)

参 考 文 献

- 1) Hill, R., Proc. Roy. Soc. London. Ser. A., **193**, 281 (1948).
- 2) Dorn, J. E., J. Appl. Phys., **20**, 15 (1949).
- 3) Edelman, F., and D. C. Drucker, J. Franklin Inst. **251**, 581 (1951).
- 4) Yoshimura, Y., Aero. Res. Inst. Univ. Tokyo Report No. 349 (1959).
- 5) Svensson, N. L., J. Mech. Engng. Sci., **8-2**, 162 (1966).
- 6) 白鳥英亮, 池上皓三, 材料, **16**, 433 (1967).
- 7) 白鳥英亮, 池上皓三, 風間慶一, 日本機械学会論文集, **35**, 271 (1969) 掲載予定。