一般的連続体の基礎的熱弾性理論の考察*

竹内 洋一郎** 野田 直剛**

Investigation on Fundamental Thermo-Elasticity in Continuous Solid

by

Yoitiro TAKEUTI and Naotake NODA

(Faculty of Engineering, Shizuoka University, Hamamatsu)

1 ま え が き

戦後、原子動力の開発、ロケット、人工衛星などの高速宇宙飛行の実現、電子工学応用機器の進歩、その他あらゆる機械の高性能、高出力化に伴い、しばしば機械、構造物に高温や不等温度分布を誘起している。この結果材料の寿命に関し熱応力に関与し、ときには設計の第一義的役割を占める場合も多くなった。われわれはこのようすう勢に応じて、これまで多くの熱応力問題を検討してきたが、従来の微小温度変化と微小変形を基本とした線形熱弾性理論が工業材料の多様化と熱衝撃などの高速熱変形等の新しい問題を生じた結果、再検討の段階にきているようである。そこで、一般的弾性体に対する熱弾性理論の基礎的考察をなし、弾性変形の熱力学的考察、非等方性体を含めた一般的連続体の熱弾性ポテンシャルの誘導、連成熱弾性問題、断熱弾性問題などの検討を行なった。この種の研究は古くは Voigt¹⁾, Kappus³⁾, また戦後には著者⁴⁾, Biot⁵⁾の研究があり、最近では Green⁶⁾ 以下多くの発表がなされている。なお説明には Green^{7~18)} の周知の記号方式を用いた。

2 ひずみテンソルおよび応力テンソルに関する基礎式

変形前の基本ベクトルおよび計量テンソルを共変、反変に応じてそれぞれ $\mathbf{g}_i$, $\mathbf{g}^i$ および $\mathbf{g}_{ij}$, $\mathbf{g}^{ij}$ とし、変形後のそれらを $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{G}^i$ および $\mathbf{G}_{ij}$, $\mathbf{G}^{ij}$ とする。いま変形前の直交座標を x_i , 変形後の直交座標を y_i とし, θ_i を変形する物体を追跡する一般曲線座標とすれば次の関係が存在する。^{*1}

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \frac{\partial y^m}{\partial \theta^i} \cdot \frac{\partial y^m}{\partial \theta^j} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j, \\ g_{ij} &= \frac{\partial x^m}{\partial \theta^i} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \theta^j} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \end{aligned} \quad (1)$$

Green¹⁹⁾ の記号方式にならって、次の記号を導入する。

$$G = |\mathbf{G}_{ij}|, \quad g = |\mathbf{g}_{ij}|, \quad I_3 = G/g \quad (2)$$

これよりひずみテンソル γ_{ij} を次式で定義する。

$$2\gamma_{ij} = G_{ij} - g_{ij} \quad (3)$$

上式を変形前の座標系 ($\mathbf{g}_i$, $\mathbf{g}^i$) に関する変位ベクトル成分について表わすと

$$2\gamma_{ij} = u_{i|j} + u_{j|i} + u^r_{i|} \cdot u_{r|j} \quad (4)$$

ただし, $|$ は共変微分を表わし, 次記を意味する。

$$u_{m|i} = u_{m,i} - (\Gamma^r_{mi})_0 u_r \quad (m, r = 1, 2, 3) \quad (5)$$

Γ^r_{mi} は第2種のクリストフェルの記号を意味する。^{*2}

変形後の物体中の微小4面体において基本ベクトルを含む3面 (θ_i 面), および基本ベクトルの頂点に対応する面 (法線成分 n_i) の, 各面上の応力ベクトルをそれぞれ $\mathbf{t}_i$ および $\mathbf{t}$ とするとき, 応力テンソル τ^{ij} および s^{ij} を次式で定義する。

$$\mathbf{t}_i \sqrt{G^{(ii)}} = \tau^{ij} \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{t} = \tau^{ij} n_i \mathbf{G}_j \quad (6)$$

$$s^{ij} = \sqrt{I_3} \tau^{ij} \quad (7)$$

ここに s^{ij} は変形後の物体の θ_i 座標に関する応力テンソル成分であるが, 変形前の物体中の θ_i 面の単位面積当たりの大きさになる。なお, また次のように σ_{ij} をおくとときは

$$\sigma_{ij} = \sqrt{G_{(jj)}/G^{(ii)}} \tau^{ij} \quad (8)$$

σ_{ij} は $\mathbf{G}_j$ に沿う斜め軸に関する応力テンソルの物理成分になるが, σ_{ij} は非対称であり, かつテンソルの定義に関する変換則を満足しないからテンソル成分ではない。

いま直角座標を採用してこれまでの各式を整理すれば

$$2\gamma_{ij} = G_{ij} - \delta_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{r,i} \cdot u_{r,j} \quad (9)$$

$$s^{ij} = \sqrt{G \tau^{ij}} \quad (10)$$

$$\sigma^{ij} = (\sqrt{1 + 2\gamma_{(ii)}/\sqrt{G^{(ii)}}}) \tau^{ij} \quad (11)$$

このときつり合方程式は, 単位質量についての物体力および加速度のベクトル成分をそれぞれ F_λ , および f_λ とすれば

*1 繰返しの添字は和を表わす。また, $|$ は θ_i に関する偏微分を表わす。なお, かつこの繰返し添字の場合には和をとらない。

*2 添字 0 は変形前の計量テンソルに対するものである。

* 原稿受理 昭和44年11月8日

** 正会員 静岡大学工学部 浜松市城北

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ s^{ij} \left(\delta_{\lambda j} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_j} \right) \right\} + \rho_0 F_\lambda = \rho_0 f_\lambda \quad (12)$$

ただし, ρ_0 , ρ はそれぞれ変形前, および変形後の密度であり, $\delta_{\lambda j}$ はクロネッカーのデルタである.

3 弾性変形の熱力学

運動のエネルギー, 内部エネルギー, 仕事, 熱量の変形前の単位体積を基準として測った量をそれぞれ k , e , a , q で表わすと, 熱力学の第1法則より

$$\frac{\partial}{\partial t} (k + e) = d'a + d'q \quad (13)$$

ゆえに変形前の体積 V , 面積 S に添字 0 をつけると, 変形後に上の第1法則を適用すれば, Q^i を変形後の単位面積に関する熱量とすると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} \rho dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V e \rho dV \\ = \int_V \rho F_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \int_S P_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dS - \int_S Q^i n_i dS \end{aligned} \quad (14)$$

上式の右辺第1項および左辺の第1, 2項をまとめると, 結局上式は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V e \rho dV = \int_V s^{ij} \frac{\partial r_{ij}}{\partial t} dV_0 - \int_S Q^i n_i dS \quad (15)$$

$\rho_0 dV_0 = \rho dV$ の関係を用いて Q^i を変形前の単位面積に関する熱量 q^i に直し, 上式に Green の定理を適用すれば

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} e dV_0 = \int_{V_0} s^{ij} \frac{\partial r_{ij}}{\partial t} dV_0 - \int_{V_0} \frac{\partial q^i}{\partial x_i} dV_0 \quad (16)$$

上式は任意の体積 V_0 について成立するものであるから

$$\frac{\partial e}{\partial t} = s^{ij} \frac{\partial r_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial q^i}{\partial x_i} \quad (17)$$

簡単のため $\partial/\partial t$ を d で表わすと

$$de = s^{ij} dr_{ij} + d'q \quad (18)$$

ただし $d'q = -q^i_{,i}$ (19)

弾性変形は考える物体についてのみ考えると可逆変化であるので, 熱力学の第2法則よりエントロピーを s とすれば

$$d'q = Tds \quad (20)$$

ただし T は現在温度で, 基準温度を T_0 とするときの温度変化を生じるものとする.

$$\tau = T - T_0 \quad (21)$$

ゆえに(18)式は次のようになる.

$$s^{ij} dr_{ij} = de - Tds \quad (22)$$

いま弾性体の状態が9個のひずみテンソル r_{ij} と温度変化 τ の状態変数により一義的に定められるものとすれば, 状態関数 e , s は次式で表わすことができる.

$$de = \frac{\partial e}{\partial r_{ij}} dr_{ij} + \frac{\partial e}{\partial \tau} d\tau \quad (23)$$

*3 d' は完全微分でない単なる微小量を意味する記号.

*4 9個の r_{ij} は解析の段階においてたがいに独立なものとして処理する.

$$ds = \frac{\partial s}{\partial r_{ij}} dr_{ij} + \frac{\partial s}{\partial \tau} d\tau \quad (24)$$

$$\therefore de - Tds = \frac{\partial}{\partial r_{ij}} (e - Ts) dr_{ij} + \frac{\partial}{\partial \tau} (e - Ts) d\tau + s d\tau$$

次に次式で定義される Helmholtz の自由エネルギー f , すなわち

$$f = e - Ts \quad (25)$$

を導入すれば

$$\begin{aligned} s^{ij} dr_{ij} - s d\tau &= \frac{\partial f}{\partial r_{ij}} dr_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau \\ \therefore s^{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial r_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial r_{ji}} \right), \quad s = -\frac{\partial f}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (26)$$

このことから Helmholtz の自由エネルギーを第1種の熱弾性ポテンシャルとよぶ. 次に次式で定義される Gibbs の自由エネルギー g , すなわち

$$g = f - s^{ij} r_{ij} \quad (27)$$

を導入すれば, 容易に次式が成立することがわかる.

$$r_{ij} = -\partial g / \partial s^{ij}, \quad s = -\partial g / \partial \tau \quad (28)$$

このことから Gibbs 自由エネルギーを第2種の熱弾性ポテンシャルとよぶ.

次に比熱を考えると, その定義より状態変化の径路 γ のときの比熱 c_γ は

$$c_\gamma = d'q / \rho d\tau = Tds / \rho d\tau \quad (29)$$

上式に(24)式を代入すれば

$$c_\gamma \rho d\tau = T \left(\frac{\partial s}{\partial r_{ij}} dr_{ij} + \frac{\partial s}{\partial \tau} d\tau \right) \quad (30)$$

ゆえに $dr_{ij}=0$ (すなわちひずみ一定) の比熱を c_τ とすれば

$$c_\tau = \frac{T \partial s}{\rho \partial \tau} = -\frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \quad (31)$$

また

$$dr_{ij} = \frac{\partial r_{ij}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial r_{ij}}{\partial s^{kl}} ds^{kl} \quad (32)$$

(26)式より

$$\partial s^{ij} / \partial T = \partial^2 f / \partial r_{ij} \cdot \partial T = -\partial s / \partial r_{ij} \quad (33)$$

(31), (33)式を(24)式に代入すれば

$$ds = -\frac{\partial s^{ij}}{\partial T} dr_{ij} + \frac{c_\tau \rho}{T} d\tau \quad (34)$$

上式および(32)式を(30)式に代入し, $ds^{ij}=0$ (すなわち応力一定) の比熱 c_s とすれば

$$c_s - c_\tau = -\left(\frac{\partial s^{ij}}{\partial T} \cdot \frac{\partial r_{ij}}{\partial \tau} \right) \frac{T}{\rho} \quad (35)$$

4 熱弾性ポテンシャル

熱弾性ポテンシャル f の形は, これを r_{ij} と τ の2次の同時関数すなわち f を r_{ij} と τ について Taylor 展開して最初の2項をとって考えて線形法則を誘導してもよいが, 以下に筆者は線形法則を仮定して, これより f の形を決定する方法をとる. すなわちひずみおよび温度変化を微小として, これに対応する応力およびひずみテンソルをそれぞれ σ_{ij} , ϵ_{ij} とすれば, 一般

化したフックの法則として次式を採用する。

$$\varepsilon_{ij} = S_{ij}{}^{kl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \tau \quad (36)$$

あるいはこれを σ_{ij} について解いて

$$\sigma_{ij} = C_{ij}{}^{kl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \tau \quad (37)$$

($i, j, k, l = 1, 2, 3$)

α_{ij} , β_{ij} はいずれも温度に対する比例定数で、また $S_{ij}{}^{kl}$, $C_{ij}{}^{kl}$ は応力およびひずみに対する比例定数で弾性定数とよばれる。

$$\alpha_{ij} = \beta_{kl} S_{ij}{}^{kl}, \quad \beta_{ij} = \alpha_{kl} C_{ij}{}^{kl} \quad (38)$$

上の関係を用いると(37)式は

$$\sigma_{ij} = C_{kl}{}^{ij} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \tau) \quad (39)$$

(26), (37)式より

$$\partial f / \partial \varepsilon_{11} = \sigma_{11} = C_{11}{}^{kl} \varepsilon_{kl} - \beta_{11} \tau$$

上式を ε_{11} について積分すれば^{*5}

$$\begin{aligned} f = & (1/2) C_{11}{}^{11} \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11} (C_{11}{}^{22} \varepsilon_{22} + C_{11}{}^{33} \varepsilon_{33} + C_{11}{}^{23} \varepsilon_{23} \\ & + C_{11}{}^{31} \varepsilon_{31} + C_{11}{}^{12} \varepsilon_{12} + C_{11}{}^{32} \varepsilon_{32} + C_{11}{}^{13} \varepsilon_{13} + C_{11}{}^{21} \varepsilon_{21} \\ & - \beta_{11} \tau) + F_1(\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \tau) \end{aligned} \quad (40)$$

上式と(26), (37)式より

$$\partial f / \partial \varepsilon_{22} = \sigma_{22} = C_{22}{}^{kl} \varepsilon_{kl} - \beta_{22} \tau = C_{11}{}^{22} \varepsilon_{11} + \partial F_1 / \partial \varepsilon_{22}$$

上式の右辺の2式がひずみ成分の値のいかんにかかわらず一義的に成立するためには

$$\begin{aligned} C_{22}{}^{11} = & C_{11}{}^{22}, \quad \partial F_1 / \partial \varepsilon_{22} = C_{22}{}^{22} \varepsilon_{22} + C_{22}{}^{33} \varepsilon_{33} \\ & + C_{22}{}^{23} \varepsilon_{23} + C_{22}{}^{31} \varepsilon_{31} + C_{22}{}^{12} \varepsilon_{12} + C_{22}{}^{32} \varepsilon_{32} \\ & + C_{22}{}^{13} \varepsilon_{13} + C_{22}{}^{21} \varepsilon_{21} - \beta_{22} \tau \end{aligned} \quad (41)$$

上の第2式を積分すれば

$$\begin{aligned} F_1 = & (1/2) C_{22}{}^{22} \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{22} (C_{22}{}^{33} \varepsilon_{33} + C_{22}{}^{23} \varepsilon_{23} + C_{22}{}^{31} \varepsilon_{31} \\ & + C_{22}{}^{12} \varepsilon_{12} + C_{22}{}^{32} \varepsilon_{32} + C_{22}{}^{13} \varepsilon_{13} + C_{22}{}^{21} \varepsilon_{21} - \beta_{22} \tau) \\ & + F_2(\varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \tau) \end{aligned}$$

上式を(40)式に代入すれば

$$\begin{aligned} f = & (1/2) C_{11}{}^{11} \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11} (C_{11}{}^{22} \varepsilon_{22} + C_{11}{}^{33} \varepsilon_{33} + C_{11}{}^{23} \varepsilon_{23} \\ & + C_{11}{}^{31} \varepsilon_{31} + C_{11}{}^{12} \varepsilon_{12} + C_{11}{}^{32} \varepsilon_{32} + C_{11}{}^{13} \varepsilon_{13} + C_{11}{}^{21} \varepsilon_{21}) \\ & + (1/2) C_{22}{}^{22} \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{22} (C_{22}{}^{33} \varepsilon_{33} + C_{22}{}^{23} \varepsilon_{23} + C_{22}{}^{31} \varepsilon_{31} \\ & + C_{22}{}^{12} \varepsilon_{12} + C_{22}{}^{32} \varepsilon_{32} + C_{22}{}^{13} \varepsilon_{13} + C_{22}{}^{21} \varepsilon_{21}) - \beta_{11} \tau \varepsilon_{11} \\ & - \beta_{22} \tau \varepsilon_{22} + F_2(\varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \tau) \end{aligned}$$

以下上の手続きを繰り返し、 $F_2, F_3, F_4, \dots, F_9$ を求めていくと

$$F_8 = (1/2) C_{12}{}^{12} \varepsilon_{12}^2 - \beta_{12} \varepsilon_{12} \tau + F_9(\tau)$$

$$\therefore f = (1/2) C_{ij}{}^{kl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} - \tau \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + F_9(\tau) \quad (42)$$

最後に $F_9(\tau)$ を決定するには(26), (37)式より

$$\begin{aligned} -\beta_{ij} & = \partial \sigma_{ij} / \partial \tau = \partial^2 f / \partial \tau \partial \varepsilon_{ij} \\ & = \partial / \partial \varepsilon_{ij} \cdot (\partial f / \partial \tau) = -\partial s / \partial \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (43)$$

(31), (43)式を(24)式に代入すれば

$$ds = \beta_{ij} d\varepsilon_{ij} + (\rho c_\tau / T) d\tau \quad (44)$$

$\tau = 0$ で $\varepsilon_{ij} = s = 0$ として上式を積分すれば

$$s = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho c_\tau \ln(1 + \tau / T_0) \quad (45)$$

τ が T_0 に比べて小さいときには $\ln(1 + \tau / T_0) \approx \tau / T_0$

*5 積分のさい、 ε_{ij} は形式的にたがいに独立変数として積分する。

なることより

$$s = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + r_0 \tau \quad (46)$$

ただし

$$r_0 = \rho c_\tau / T_0 \quad (47)$$

(26), (42)式より

$$s = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - dF_9 / d\tau$$

上式と(46)式より

$$F_9 = -r_0 \tau^2 / 2$$

ただし $\tau = 0$ において $f = 0$ とする。結局熱弾性ポテンシャル f は次記となる。

$$f = (1/2) C_{ij}{}^{kl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} - \tau \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - r_0 \tau^2 / 2 \quad (48)$$

もし近似を用いずに(45)式のまま計算すれば

$$\begin{aligned} F_9(\tau) & = -\rho c_\tau \{ T_0 (1 + \tau / T_0) \ln(1 + \tau / T_0) - \tau \} \\ \therefore f & = (1/2) C_{ij}{}^{kl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} - \tau \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \\ & \quad - \rho c_\tau \{ T_0 (1 + \tau / T_0) \ln(1 + \tau / T_0) - \tau \} \end{aligned} \quad (49)$$

(48)式の方は Biot の導出した式、および Voigt の仮定した式と一致する。(48)および(49)式において右辺第1項は等温変化の際の弾性ポテンシャルである。すなわち温度変化のある際には、等温弾性ポテンシャルに比べて第2項および第3項が増加する。

また弾性体の内部エネルギー e は次のようになる。

$$e = (1/2) C_{ij}{}^{kl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + \rho c_\tau \tau + T_0 \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (50)$$

上記の熱弾性ポテンシャルと各係数間の関係および物理定数の意味を考えると

$$\begin{aligned} C_{kl}{}^{ij} & = \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}, \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} \\ \beta_{ij} & = -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \tau}, \quad r_0 = -\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (51)$$

すなわち α_{ij} は一定応力のもとにおける温度変化の際の変形量の増加であり、 β_{ij} は一定ひずみのもとにおける温度変化の際の応力の増加である。

次に各連続体について $C_{kl}{}^{ij}$, β_{ij} , α_{ij} , f がどのような関係にあるかを調べる。

(1) 3斜晶系

すべての弾性定数 β_{ij} , α_{ij} が存在するから f は前節のままの形になる。ただし $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $C_{ij}{}^{kl} = C_{ji}{}^{lk} = C_{kl}{}^{ij} = C_{lk}{}^{ji}$

(2) 単斜晶系

$C_{kl}{}^{ij}$ は13個、 β_{ij} は4個となる。 $C_{kl}{}^{ji}$ をマトリックス表示にすれば

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}{}^{11} & C_{11}{}^{22} & C_{11}{}^{33} & 0 & 0 & C_{11}{}^{12} \\ C_{22}{}^{11} & C_{22}{}^{22} & C_{22}{}^{33} & 0 & 0 & C_{22}{}^{12} \\ C_{33}{}^{11} & C_{33}{}^{22} & C_{33}{}^{33} & 0 & 0 & C_{33}{}^{12} \\ 0 & 0 & 0 & C_{23}{}^{23} & C_{23}{}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{13}{}^{23} & C_{13}{}^{13} & 0 \\ C_{12}{}^{11} & C_{12}{}^{22} & C_{12}{}^{33} & 0 & 0 & C_{12}{}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{33} \\ 0 \\ 0 \\ \beta_{12} \end{pmatrix}$$

$$\beta_{11} = \alpha_{11} C_{11}{}^{11} + \alpha_{22} C_{11}{}^{22} + \alpha_{33} C_{11}{}^{33} + 2\alpha_{12} C_{11}{}^{12}$$

*6 α_{ij} を熱変形係数、 β_{ij} を熱応力係数とよぶことにする。なお、 $C_{kl}{}^{ij} = C_{ij}{}^{kl}$, また古典ひずみ記号との対照は $\varepsilon_{(11)} = e_{11}$, $\varepsilon_{12} = e_{12}/2$ (ただし $i \neq j$)。

$$\begin{aligned}\beta_{22} &= \alpha_{11}C_{22}^{11} + \alpha_{22}C_{22}^{22} + \alpha_{33}C_{22}^{33} + 2\alpha_{12}C_{22}^{12} \\ \beta_{33} &= \alpha_{11}C_{33}^{11} + \alpha_{22}C_{33}^{22} + \alpha_{33}C_{33}^{33} + 2\alpha_{12}C_{33}^{12} \\ \beta_{12} &= 2\alpha_{11}C_{12}^{11} + 2\alpha_{22}C_{12}^{22} + 2\alpha_{33}C_{12}^{33} + 2\alpha_{12}C_{12}^{12} \\ \beta_{23} &= \beta_{31} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2f &= C_{11}^{11}\varepsilon_{11}^2 + 2C_{11}^{22}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2C_{11}^{33}\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + 4C_{11}^{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} \\ &+ C_{22}^{22}\varepsilon_{22}^2 + 2C_{22}^{33}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 4C_{22}^{12}\varepsilon_{22}\varepsilon_{12} + C_{33}^{33}\varepsilon_{33}^2 \\ &+ 4C_{33}^{12}\varepsilon_{33}\varepsilon_{12} + 4C_{23}^{23}\varepsilon_{23}^2 + 8C_{23}^{13}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31} + 4C_{13}^{13}\varepsilon_{31}^2 \\ &+ 4C_{12}^{12}\varepsilon_{12}^2 - 2\tau(\beta_{11}\varepsilon_{11} + \beta_{22}\varepsilon_{22} + \beta_{33}\varepsilon_{33} + 2\beta_{12}\varepsilon_{12}) \\ &- r_0\tau^2\end{aligned}\quad (52)$$

(3) 斜方晶系 (C_{kl}^{ij} は 9 個, β_{ij} , α_{ij} は 3 個)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{11}^{22} & C_{11}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{22}^{11} & C_{22}^{22} & C_{22}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{33}^{11} & C_{33}^{22} & C_{33}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{23}^{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{13}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \alpha_{11}C_{11}^{11} + \alpha_{22}C_{11}^{22} + \alpha_{33}C_{11}^{33} \\ \beta_{22} &= \alpha_{11}C_{11}^{22} + \alpha_{22}C_{22}^{22} + \alpha_{33}C_{22}^{33} \\ \beta_{33} &= \alpha_{11}C_{11}^{33} + \alpha_{22}C_{22}^{33} + \alpha_{33}C_{33}^{33} \\ 2f &= C_{11}^{11}\varepsilon_{11}^2 + 2C_{11}^{22}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2C_{11}^{33}\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + C_{22}^{22}\varepsilon_{22}^2 \\ &+ 2C_{22}^{33}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + C_{33}^{33}\varepsilon_{33}^2 + 4C_{23}^{23}\varepsilon_{23}^2 + 4C_{13}^{13}\varepsilon_{31}^2 \\ &+ 4C_{12}^{12}\varepsilon_{12}^2 - 2\tau(\beta_{11}\varepsilon_{11} + \beta_{22}\varepsilon_{22} + \beta_{33}\varepsilon_{33}) - r_0\tau^2\end{aligned}\quad (53)$$

(4) 6 方晶系 (C_{kl}^{ij} は 5 個, β_{ij} , α_{ij} は 2 個)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{11}^{22} & C_{11}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{22}^{11} & C_{11}^{11} & C_{11}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{33}^{11} & C_{33}^{11} & C_{33}^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{23}^{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{23}^{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}^{11} - C_{11}^{22})/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{11} \\ \beta_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \beta_{22} = \alpha_{11}(C_{11}^{11} + C_{11}^{22}) + \alpha_{33}C_{11}^{33} \\ \beta_{33} &= 2\alpha_{11}C_{11}^{33} + \alpha_{33}C_{33}^{33} \\ 2f &= C_{11}^{11}\varepsilon_{11}^2 + 2C_{11}^{22}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2C_{11}^{33}\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + C_{11}^{11}\varepsilon_{22}^2 \\ &+ 2C_{11}^{33}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + C_{33}^{33}\varepsilon_{33}^2 + 4C_{23}^{23}(\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) \\ &+ 2(C_{11}^{11} - C_{11}^{22})\varepsilon_{12}^2 \\ &- 2\tau\{\beta_{11}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \beta_{33}\varepsilon_{33}\} - r_0\tau^2\end{aligned}\quad (54)$$

(5) 等軸晶系 (C_{kl}^{ij} は 3 個, β_{ij} , α_{ij} は 1 個)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{11}^{22} & C_{11}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ C_{22}^{11} & C_{11}^{11} & C_{11}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11}^{22} & C_{11}^{22} & C_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{23}^{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{23}^{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{23}^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{11} \\ \beta_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \beta_{22} = \beta_{33} = \beta = \alpha(C_{11}^{11} + 2C_{11}^{22}) \\ \beta_{23} &= \beta_{31} = \beta_{12} = 0 \\ 2f &= C_{11}^{11}(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) \\ &+ 2C_{11}^{22}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}) \\ &+ 4C_{23}^{23}(\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{12}^2) - 2\tau\beta(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ &- r_0\tau^2\end{aligned}\quad (55)$$

(6) 等方性体 (C_{kl}^{ij} は 2 個, β_{ij} , α_{ij} は 1 個)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{11}^{22} & C_{11}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11}^{22} & C_{11}^{11} & C_{11}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11}^{22} & C_{11}^{22} & C_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11}^{11} - C_{11}^{22})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}^{11} - C_{11}^{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}^{11} - C_{11}^{22})/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{33} = \alpha E / (1 - 2\nu) = \alpha(3\lambda + 2\mu)$$

$$\alpha = \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33}, \quad C_{22}^{11} = \lambda, \quad (C_{11}^{11} - C_{11}^{22})/2 = \mu$$

$$C_{kl}^{ij} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

ただし, E は縦弾性係数, ν はポアソン比, λ , μ はラーメの定数である.

$$\begin{aligned}2f &= C_{11}^{11}(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) \\ &+ 2C_{11}^{22}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) + (C_{11}^{11} - C_{22}^{22}) \\ &\times (\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{12}^2) - 2\beta\tau(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - r_0\tau^2\end{aligned}\quad (56)$$

5 弾性体の熱伝導式と連成問題

従来より熱応力の計算に使用されているフーリエの熱伝導式は, 体積要素は剛体として処理されているので, 一般的な弾性体の熱伝導式を考える. まず熱力学の第 1 法則の式を次のように変形する.

$$de - (d'a - dk) = d'q \quad (57)$$

(25), (26), (43)式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} + T \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} + T\beta_{ij}, \\ \frac{\partial e}{\partial \tau} &= \frac{\partial f}{\partial \tau} + T \frac{\partial s}{\partial \tau} = s + T \frac{\partial s}{\partial \tau}\end{aligned}$$

上の両式を(23)式に代入し(31)式を考慮すれば

$$de = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + T\beta_{ij}d\varepsilon_{ij} + \rho c_r d\tau$$

上式と(22)式を(20)式に代入すれば

$$\begin{aligned}d'q &= \rho c_r d\tau + T_0\beta_{ij}d\varepsilon_{ij} + \tau\beta_{ij}d\varepsilon_{ij} \\ &= \rho c_r \tau + T_0\left(1 + \frac{\tau}{T_0}\right)\beta_{ij}d\varepsilon_{ij} \\ &\cong \rho c_r d\tau + T_0\beta_{ij}d\varepsilon_{ij}\end{aligned}\quad (58)$$

(19)式より

$$d'q = -q_{j,j} \quad (j=x, y, z) \quad (59)$$

いま一般の連続体について次のように熱伝導率テンソル λ_{ij} を用いて

$$-q_i = \lambda_{ij}\tau_{,j} \quad (60)$$

60式を59式に代入し58式と比較することにより, 次のような一般連続体についての修正されたフーリエの熱伝導式を得る.

$$\rho c_r \frac{\partial \tau}{\partial t} = (\lambda_{ij}\tau_{,j})_{,i} - T_0 \frac{\partial}{\partial t}(\beta_{ij}\varepsilon_{ij}) \quad (61)$$

フーリエの熱伝導式は内部エネルギーは温度のみならず弾性体のひずみ成分にも関係することを無視し, 同時に変形仕事も無視してできているが, 本節の61式はこれらを考慮して誘導されたものである. 結果から見れば

ば右辺の最後の項が変形仕事による付加項である。換言すれば弾性体に与えられた熱は単に温度上昇を起こすだけでなく、変形仕事に変わる部分があることを示している。この付加項のことを温度場とひずみ場の連成項 (Coupling term) とよんでいる。すなわち熱弾性問題では上式と運動方程式は独立して解くことができないのであって、変位成分と温度変化を連成問題として解くのが厳密には正しいことになる。⑥1式を修正されたフーリエの熱伝導式とよぶ。上記の熱伝導の式と連成する一般連続体の運動方程式は、ひずみ成分を変位成分に直してつり合方程式に代入すれば得られる。すなわち $i, j, k, l = (x, y, z)$ として

$$\begin{aligned} & 1/2 \cdot C_{kl}^{ij} (u_{k,l} + u_{l,k})_{,j} - \beta_{ij} \tau_{,j} + F_i \\ & = \rho (\partial^2 u_i / \partial t^2) \end{aligned} \quad (62)$$

等方性体の場合には、 $\lambda_{ij} = \lambda_t$, $c_r = c_v$ とおいて

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\lambda_t}{c_v \rho} \Delta \tau - \frac{T_0 \beta}{c_v \rho} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \quad (63)$$

上式と⑥2式の等方性体の場合の式、すなわち

$$\begin{aligned} \Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ = \frac{2(1+\nu)}{E} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i=x, y, z) \end{aligned} \quad (64)$$

両式の未知数は u_x, u_y, u_z と τ の4個であるから、この4式を連成して解く。最近工業材料の多様化と熱衝撃等の高速変形の重要性から、この温度場とひずみ場の連成問題はようやく注目されるに至った。⑥1式より、⑥3式は次のようになる。

$$c_s - c_r = T_0 \alpha_{ij} \beta_{ij} / \rho \quad (65)$$

ゆえに等方性体に対しては

$$c_p - c_v = 3 \alpha \beta T_0 / \rho \quad (66)$$

ゆえに上式を⑥3式に代入すれば

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\lambda_t}{c_v \rho} \Delta \tau - \frac{c_p - c_v}{c_v} \frac{1}{3\alpha} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \quad (67)$$

ただし c_p は等圧比熱、 c_v は等積比熱である。上述の修正されたフーリエの熱伝導式は、熱応力理論の世界最初の文献である Duhamel やそれに続く Neumann の報告にすでに現われているものであるが、たとえば Neumann の表記である⑥7式で説明すると、通常金属の場合には $c_p - c_v$ はきわめて小さい値をもつから、この項を無視して非連成の問題として処理しても大きい誤差は出なかったのである。これが最近まで連成問題が注目されなかった大きな理由である。しかし、最近になって注目されるに至ったのは、結局連成項は次のように⑥3式を変形することによって材料と変形速度の両面の問題であることをみれば理解される。すなわ

ち⑥3式は

$$\begin{aligned} \lambda_t \Delta \tau &= \beta T_0 \partial \varepsilon_{kk} / \partial t + \rho c_v \partial \tau / \partial t \\ &= \rho c_v \frac{\partial \tau}{\partial t} \left(1 + \frac{\beta T_0}{\rho c_v} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} / \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Boley は次の $\bar{\delta}$ なる記号を用い上式を変形した。

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= \frac{(3\lambda + 2G)^2 \alpha^2 T_0}{\rho^2 c_v v_e^2}, \quad v_e = \sqrt{(\lambda + 2G) / \rho} \\ \therefore \lambda_t \Delta \tau &= \rho c_v \frac{\partial \tau}{\partial t} \left[1 + \bar{\delta} \cdot \frac{\lambda + 2G}{3\lambda + 2G} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} / \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \right] \end{aligned} \quad (68)$$

この $\bar{\delta}$ は無次元パラメータで、これを連成係数という。この値を基準温度 T_0 を約 93.3°C としたとき、アルミニウムおよび鉄について計算してみると、それぞれ Al は 0.0087、鉄は 0.0042 となり、上式かこ内の第2項は1に比べて無視できる場合が多い。しかし $\bar{\delta} = 1$ の場合にはかなり連成項の影響があるという報告もある²⁰⁾。また⑥8式を変形すると

$$\begin{aligned} \lambda_t \Delta \tau &= \rho c_v \frac{\partial \tau}{\partial t} \left[1 + \bar{\delta} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} / \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \right] \\ \delta' &= \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \bar{\delta}, \quad \eta = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} / \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

とおくと

$$\lambda_t \Delta \tau = \rho c_v \frac{\partial \tau}{\partial t} (1 + \delta' \eta) \quad (70)$$

Table I. Values of δ' .

Material	δ'
Quartz glass	1.720×10^{-6}
Pyro-ceramics	3.262×10^{-6}
Aluminium	4.498×10^{-3}
Duralumin	3.262×10^{-3}
Lead	8.927×10^{-3}
Tungsten steel	2.600×10^{-3}
Copper	2.870×10^{-3}
Silver	4.524×10^{-3}
Tungsten	3.157×10^{-4}
Concrete	3.296×10^{-4}
Constantan	2.895×10^{-3}

上式の δ' は材料に関する係数であり、 η は変形速度に関する項であるから、連成の影響は δ' の大きい材料の使用、または熱衝撃など高速変形の両者に関係してくる。いずれにせよ連成問題は動的問題として処理するとき、始めてその考慮したことの価値が大きい¹⁰⁾。

6 断熱変化の熱弾性論

著者の1人は先に金属の弾性定数の温度依存性を超音波反射法によって測定した²¹⁾が、通常動的な弾性定数

*7 直交異方性体の場合には λ_{ij} は $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$ だけとなるから $c_r \rho \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda_{11} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \lambda_{33} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - T_0 \left(\beta_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} + \beta_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t} + \beta_{33} \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial t} \right)$ 。

*8 Debye の導いた著名の式と一致する。

*9 Boley & Weiner, Theory of Thermal Stresses, J. Wiley (1960) の P 43 の $\bar{\delta}$ の値は計算がちがっている。

*10 δ' の値を表 I に示す。

測定法による値は静的測定に対し少し大きい値となる。これは急速な引張りや、高い振動数の弾性体の振動の場合は断熱変化となるためである。そこで、断熱変化の熱弾性問題を考える。(44)式より断熱変化に対して

$$d\tau = -\frac{\beta_{kl}T_0}{\rho c_\tau} d\varepsilon_{kl}, \quad \therefore \tau = -\frac{\beta_{kl}T_0}{\rho c_\tau} \varepsilon_{kl}$$

上式を(37)式に代入すれば、断熱弾性定数 $C_{ij}{}^{kl}$, が次式より求まる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ij}{}^{kl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \frac{\beta_{kl}T_0}{\rho c_\tau} \varepsilon_{kl} \\ &= \left(C_{ij}{}^{kl} + \frac{T_0}{\rho c_\tau} \beta_{ij} \beta_{kl} \right) \varepsilon_{kl} \equiv C_{ij}{}^{kl'} \varepsilon_{kl} \end{aligned}$$

$$\text{ただし} \quad C_{ij}{}^{kl'} = C_{ij}{}^{kl} + (T_0/\rho c_\tau) \beta_{ij} \beta_{kl} \quad (71)$$

同様にして、 $\tau = -(T_0/\rho c_s) \alpha_{kl} \sigma_{kl}$ より断熱弾性定数 $S_{ij}{}^{kl'}$, は次のようになる。

$$S_{ij}{}^{kl'} = S_{ij}{}^{kl} - (T_0/\rho c_s) \alpha_{ij} \alpha_{kl} \quad (72)$$

ゆえに実用弾性定数の等方性体の場合には

$$\lambda' = \lambda + \frac{\beta^2 T_0}{\rho c_v} \quad \text{あるいは} \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \frac{T_0 \beta^2}{\lambda \rho c_v} \quad (73)$$

また β を α にすれば

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} - \frac{\alpha^2 T_0}{\rho c_p} \quad (74)$$

(昭和44年10月22日 第9回高温強度シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) Voigt, W., Nach. Ges. Wiss., Göttingen, 14, 359, (1888).
- 2) Voigt, W., Kompendium der Theoretischen Physik,

Leipzig, (1895).

- 3) Kappus, R., Z. A. M. M., 19-5, 271, (1939).
- 4) 竹内洋一郎, 日立造船技報, 18-3, 14, (1957).
- 5) Biot, M. A., J. App. Phys., 27-3, 240, (1956).
- 6) Green, A. E., Proc. Roy. Soc., A 266, 1, (1962).
- 7) Hemp, W. S., Aeronau Quart. 7, 184, (1956).
- 8) Nowacki, W., Ball. Polon. Sci., 14-3, 273, (1966).
- 9) 竹内洋一郎, 熱応力研究の動向について, その1 (1961 ~ 2) 日本機械学会関西支部熱応力研究会
- 10) 竹内洋一郎, 熱応力の新しい研究, (1967) 日本機械学会関西支部熱応力研究分科会
- 11) 竹内洋一郎, 徳大工報, 12, 53, (1967).
- 12) Bland, D. R., Thermal Stress (Benham & Hoyle), Chap. 7, Pitman, 124, (1964).
- 13) Callen, H. B., Thermodynamics, J. Wiley (1960).
- 14) Ziegler, H., Proc. 11 Int. Cong. App. Mech., Munich, 99, (1964).
- 15) Herrmann, G., ZAMP, 15, 253 (1964).
- 16) Zhong-heng, G., Arch. Mech. Stos., 15-4, 475, (1963).
- 17) Stojanovitch, R., et al. 2, Arch. Mech. Stos., 16-1, 103 (1964).
- 18) Parkus, H., High Temp. Structure & Materials, Pergamon, 317 (1964).
- 19) Green, A. E., and W. Zerna, Theoretical Elasticity, 2nd Ed., Oxford (1968).
- 20) Dillon, O. W., J. App. Mech., 32, 378, (1965).
- 21) 太田友弥, 土田幸雄, 竹内洋一郎, 日本機械学会誌, 71-598, 1496 (1968).