Poiseuille 流中における円弧状粒子の Radial Migration*

西 村 二 郎** 岡 小 天***

Radial Migration of Rod-Like Particles Deformed in Circular Arc in Poiseuille Flow

by

Jiro NISHIMURA

(Central Research Laboratory, Showa Denko K. K., Tokyo)

and Syoten OKA

(Faculty of Science, Tokyo Metropolitan University, Tokyo)

A supplementary calculation is hereunder presented which was made to the preceding investigations^{5)~7)} treating the hydrodynamic behaviour of rod-like particles in Poiseuille flow by using the Oseen-Burgers formula.

It has been theoretically shown that the particles are to migrate radially from the tube axis to the wall, due to its bending deformability. There remain some problems, however, that must be made clear in these treatments. The two outstanding problems are as follows:

(1) An approximation used to solve the Burgers-type integral equation is mathematically too rough.

(2) The direction of the migration is against what is observed in the laboratory.

The first problem can be overcome by regarding the particles as prolate spheroid instead of cylinder. In this case the integral equation is to be solved to the extent of the error of the square of the short-/long-axis ratio of the spheroid.

For the second problem, a study has been made on the effect which may have been caused when the curvature becomes large for an infinitely thin rod. It seems to be more important, however, to take the deformation velocity of the particles into account.

(Received Jan. 6, 1970)

1 ま え が き

Poiseuille 流中に存在する粒子が、一般に流れと垂直なる方向に移動すること (Radial migration) は良く知られた事実である。しかしその現われ方は条件によって異なる。粒子が剛体で、Tube Reynolds 数が有限の場合には、粒子は壁と中心軸の中間に集まってくる。いわゆる Tubular pinch 効果である。液滴や fiber のように変形体粒子の場合には、Reynolds 数が無限小であっても、管壁から中心軸に向う migration が起こる。^{3,4)}

⁵⁾ さきにわれわれは、radial migration に対する粒子の変形性の効果について調べるため、わずかな曲げ弾性を有する細長い棒状粒子の場合について考えてみた。

そして radial migration が起こり得ることを指摘した。しかし、その移動方向は、中心軸から壁に向う方向であり、通常観測される事実とは逆であった。また解析の途上特に“Burgers 型”の積分方程式の解法において数学的に問題のある近似法を用いていた。

この報告では、これらの問題点を明らかにするため (1) 粒子と円筒ではなく偏長回転だ円体と見なした場合の解法、(2) 曲げ変形が大きくなったときの効果、について考えてみた。

2 取扱いの概要

いま、静止座標系: $O-XYZ$ において (1) 式で表わされるような Poiseuille の流れを考える。

$$U = \{w_0(R_0^2 - R^2), 0, 0\}^T \quad (1)$$

ただし、 $R^2 = Y^2 + Z^2$ 、および R_0 は管の半径である。この流れの中に、円弧状に変形した細長い偏長回転だ円体粒子が存在するとき、流体力学的挙動を調べる

* 原稿受理 昭和45年1月6日

** 正 会 員 昭和電工(株)中央研究所 東京都大田区多摩川

*** 正 会 員 東京都立大学理学部 東京都世田谷区深沢

のが、われわれの意図するところである。

偏長回転円体粒子の中心軸は Bouguet の公式を用いて一般に次のように表わされる。

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - \frac{1}{6}\kappa_1 s^3 + \dots \\ \frac{1}{2}\kappa_1 \left(s^2 - \frac{2}{15}a^2 \right) + \dots \\ \frac{1}{6}\kappa_1 \kappa_2 s^3 + \dots \end{pmatrix} \quad (2)$$

ただし粒子座標系： $o-\xi\eta\zeta$ の原点は粒子の重心にあり 3 軸の方向は曲線の中点 M における切線、法線および従方線方向に取ってある。 s は M 点から測った弧長、 $2a$ は粒子の長さ； κ_1, κ_2 は M 点における曲線の曲率およびもどり率である。次に粒子座標系と静止座標系との関係を明らかにするため、粒子の重心に原点をおき静止座標系と平行移動の関係にある座標系： $o-xyz$ を導入する。これら 3 つの座標系の間には次のような関係式がなりたつ。

$$[x, y, z]^T = [X, Y, Z]^T - [X_G, Y_G, Z_G]^T \quad (3)$$

$$[\xi, \eta, \zeta]^T = A \cdot [x, y, z]^T \quad (4)$$

$$A = [\alpha_{ij}]$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \phi & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi \\ & -\cos \phi \sin \theta \\ & \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi \\ & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix} \quad (5)$$

ただし (ϕ, θ, ψ) は $o-xyz$ 系と $o-\xi\eta\zeta$ 系との間の Euler の角、 $[X_G, Y_G, Z_G]^T$ は重心の座標である。

ここで Oseen の方法を適用すれば次式が得られる。

$$\frac{1}{8\pi\mu} \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 - b_0^2} & \frac{2}{r_0} - \frac{b^2}{r_0^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{r_0^3} & 0 & \\ -\sqrt{a^2 - b_0^2} & 0 & 0 & \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{r_0^3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{F}^{(k)}(s) ds = -\mathbf{G}^{(k)}(s_0; \boldsymbol{\omega}^{(k)}, \mathbf{U}_G^{(k)}) \quad (6)$$

ただし μ は流体の粘度である。円体の軸上に作用する力の分布 $\mathbf{F}$ 、粒子の回転速度 $\boldsymbol{\omega}$ 、重心の移動速度 $\mathbf{U}_G$ などには次のような展開形を仮定した。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(0)} + \kappa_1 \mathbf{F}^{(1)} + \kappa_1^2 \mathbf{F}^{(2)} + \kappa_1^3 \mathbf{F}^{(3)} + \dots \quad (7)$$

また、 $r_0 = \sqrt{(s-s_0)^2 + b^2}$ である。粒子を円筒と考えるか、偏長回転円体と考えるかによる本質的な相違は b の取り方にある。すなわち $b = \text{一定}$ と考えれば円筒、 $b = b_0 \sqrt{1 - s_0^2/a^2}$ と取れば回転円体に対する式となる。後者の場合、 $2b_0$ は円体の短径を意味する。パラメータ $\boldsymbol{\omega}$ および $\mathbf{U}_G$ を決定するには、(6)式のほかに力のつりあいの式、力のモーメントのつりあいの式：

$$\int_{-\sqrt{a^2 - b_0^2}}^{\sqrt{a^2 - b_0^2}} \mathbf{F}(s) ds = 0; \quad \int_{-\sqrt{a^2 - b_0^2}}^{\sqrt{a^2 - b_0^2}} \mathbf{F}(s) \times \mathbf{r}(s) ds = 0 \quad (8)$$

が必要となってくる。

3 積分方程式の解法

積分方程式(6)の右辺は s_0 の有限べき級数で表わされる。一方左辺の積分変換は次のような性質を有している。すなわち、

$$P[f] = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{a^2 - b_0^2}}^{\sqrt{a^2 - b_0^2}} \frac{1}{r_0} f(s) ds; \quad Q[f] = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{a^2 - b_0^2}}^{\sqrt{a^2 - b_0^2}} \frac{b^2}{r_0^3} f(s) ds \quad (9)$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} P[1] &= \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b_0^2}}{a - \sqrt{a^2 - b_0^2}} = \sigma_0, \\ P[s] &= (\sigma_0 - 1)s_0 + o(\epsilon_0^2), \\ P[s^2] &= \left(\sigma_0 - \frac{3}{2} \right) s_0^2 + \frac{1}{2} a^2 + o(\epsilon_0^2), \\ Q[s^n] &= s_0^n + o(\epsilon_0^2), \quad (n \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。この結果は、(6)式が相対誤差 $\epsilon_0^2 = b_0^2/a^2$ の精度で解けることを意味している。

4 Radial migration

さきに行なった計算によれば、粒子の重心の移動速度の中、管の半径方向の成分は次式で与えられる。

$$\left[\begin{matrix} V_G \\ W_G \end{matrix} \right] = \frac{1}{3} (k_1 a) \cdot (w_0 a) \cdot \frac{\sigma - 2.30}{\sigma - 1.80} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot \left[\begin{matrix} \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & \cos^2 \phi \end{matrix} \right] \cdot \left[\begin{matrix} Y_G \\ Z_G \end{matrix} \right], \quad (11)$$

ただし、 $\sigma = \log 2a/b$ である。曲率は、粒子がわずかな曲げ弾性を有する場合、次式で与えられる。

$$k_1 = \frac{1}{\sigma - 0.80} \cdot \frac{\pi\mu}{3EI} \cdot (w_0 a^4) \cdot \sin^3 \theta, \quad (12)$$

ただし E は曲げ弾性、 I は断面 2 次モーメントである。(11)、(12)式で考える限り粒子は中心軸から管壁に向かって移動する。ただし σ の値は十分に大きいものと考えている。粒子の変形が坐屈によって起こると考えた場合も事情は同じである。また粒子を円筒と考えるか偏長回転円体と考えるかによる差も(11)式に関する限りあまり本質的なものではない。これは実験室の結果と矛盾する。この辺の事情を明らかにするため、大変形の場合について考えてみたい。

5 大変形の場合

曲率が大きい場合は κ_1 の高次の項まで考慮に入れてやる必要がある。しかし $b/a \ll 1$ なる場合には、逐次近似ではなく、閉じた形で解を求めることが可能である。導出の過程は Appendix に譲ずり結果だけ記すと円弧状粒子の場合、次式が得られる。

$$U_G = \begin{pmatrix} qY_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - A^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{4}\sin 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{4}\sin 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u_G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

ただし,

$$v_G = \frac{1}{2}\rho q \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sin \gamma}{\gamma} \left(3\gamma + \frac{1}{2}\sin 2\gamma \right) + 2 \sin \gamma - \frac{2}{3} \sin^3 \gamma \right\} \quad (14)$$

である。また ρ を円弧の半径として, $\gamma = a/\rho$; q は速度こう配である。一例として ($\phi = \pi/2$, $\theta = \pi/4$, $\psi = -\pi/2$) なる場合について, $V_G(U_G$ の Y -成分) の値を(13)式から評価してみよう。結果は Fig. 1 に示すとおりである。なおこの場合, 粒子の位置は Poiseuille 流中では Fig. 2 のように表わされる。グラフから明らかなように, $a/\rho = 1.93$ のとき, radial migration の方向は逆転する。換言すれば, 変形によって円弧状になった無限に細長い棒状粒子は, この変形を境として, 管壁から中心軸に向う移動に転ずる。

Fig. 1. Migration velocity.

Fig. 2. Particle position at ($\phi = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\psi = -\frac{\pi}{2}$).

6 考 察

以上の計算から2つの推論が得られた。一つは積分方程式の解法に関するものであり, “手続き” 上の問題として非常に興味深い。Burgers⁸⁾ 自身の用いた解法

の数学的弱点もこれで補われるものと思われる。

いま一つは変形が大きくなったときの, migration の方向の逆転である。しかしこの情報はわれわれの取り扱いを補強するのに余り有効ではない。というのは, 逆転時の変形が大変形すぎるからである。これでは明らかに実験事実を説明し得ない。また取扱い方法だけに的をしぼってみても, あのような大変形に至るまで, 変形のパターンを円弧と見なすことには問題がある。また変形してしまった状態での力学的つりあいだけを考えることにも問題があるように思われる。

(昭和44年10月20日 第17回レオロジー討論会にて講演)

Appendix. 大変形の場合

円弧状に変形した円筒状粒子を表わすには, 下記のように弧 $u = s/\rho$ を用いるのが便利である。ただし ρ は円弧の半径である。

$$\mathbf{r}(u) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin u \\ \rho \left\{ \frac{\sin(a/\rho)}{(a/\rho)} - \cos u \right\} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A \cdot 1)$$

この粒子が十分に細長いものとして Oseen の方法を適用する。このとき leading term のみ拾って式を簡略化すれば結局次のような形の式が得られる。

$$\frac{1}{8\pi\mu} \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 u_0 & \frac{1}{2} \sin 2u_0 & 0 \\ * & 1 + \sin^2 u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \int_{-\frac{a}{\rho}}^{\frac{a}{\rho}} \frac{\mathbf{F}(u) du}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{(u-u_0)}{2} + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2}} = -\mathbf{V}_r(u_0) \quad (A \cdot 2)$$

この式は, 積分変換を

$$\int_{-\frac{a}{\rho}}^{\frac{a}{\rho}} \frac{\mathbf{F}(u) du}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{(u-u_0)}{2} + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2}} = 2\sigma_1 \cdot \mathbf{F}(u_0); \quad \sigma_1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{\rho}}^{\frac{a}{\rho}} \frac{du}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{(u-u_0)}{2} + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2}}, \quad (A \cdot 3)$$

とおくことにより次のようにとける。

$$\mathbf{F}(u_0) = -\frac{4\pi\mu}{\sigma_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sin^2 u_0) & -\frac{1}{4} \sin 2u_0 & 0 \\ * & \frac{1}{2}(1 + \cos^2 u_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V}_r(u_0) \quad (A \cdot 4)$$

一方粒子に対する流れの相対速度は, 元のズリ速度場を,

$$\mathbf{U}^{(0)} = [qY, 0, 0]^T, \quad (A \cdot 5)$$

とすれば,

$$\mathbf{V}_r = qB \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + A \cdot (\mathbf{U}^{(0)} - \mathbf{U}_G) \quad (A \cdot 6)$$

で表わされる。ただし, $B = [\alpha_{j1} \alpha_{j2}]$ とおいた。

(A・4)~(A・6) を考慮に入れ, (8)式で表わされる力および力のモーメントのつり合いの条件を考えれば, $\mathbf{U}_G$ と $\boldsymbol{\omega}$ を求めることができる。

参 考 文 献

- 1) Segré, G., and A. Siblerberg, *Nature*, **189**, 209 (1961).
- 2) Karnis, A., H. L. Goldsmith, and S. G. Mason, *Canadian J. Chem. Eng.*, **44**, 181 (1966).
- 3) Karnis, A., and S. G. Mason, *J. Colloid and Interface Sci.*, **24**, 164 (1967).
- 4) Goldsmith, H. L., and S. G. Mason, *J. Colloid Sci.*, **17**, 448 (1962).
- 5) Nishimura, J., and S. Oka, *Proc. Fifth Intern. Congr. on Rheology*, (In Press).
- 6) Nishimura, J., and S. Oka, *J. Soc. Materials Sci., Japan*, **16**, 534 (1967).
- 7) Nishimura, J., and S. Oka, *Rep. Progr. Polymer Phys., Japan*, **12**, 101 (1969).
- 8) Burgers, J. M., "Second Report on Viscosity and Plasticity", Chap. 3 (1938) Amsterdam

(287頁より)

8. Behavior of Elastic Networks of Various Degrees of Orientation in the Kinetic Theory of Fracture, H. H. Kausch-blecken von Schmeling, C. C. Hsiao, 4915.
9. Tensile Deformation of Oriented Polyethylene, T. Hinton, J. G. Rider, 4932.
10. Energy Contribution to Rubber Elasticity, M. Shen, P. J. Blatz, 4937.
11. Molecular Motion in 2-Chlorostyrene-Styrene Copolymers from Dielectric Measurements, J. Leffingwell, F. Bueche, 5910.

Journal of Applied polymer Science, Vol. 12

12. Stress Relaxation of Anhydrous Gelatin Rubbers, I. V. Yannas, A. V. Tobolsky, 1.
13. Viscosity of Concentrated Styrene Solution of Polystyrene, M. Hirose, E. O'Shima, H. Inoue, 9.
14. Intrinsic Viscosity of Polymer Solutions at High Shear Rates, A. Ram, A. Siegman, 59.
15. Transient Behavior of Viscoelastic Fluid in an Extruder, R. K. S. Chan, C. W. M. Lee, R. D. Biggs, 115.
16. Flow Properties of Molten Ethylene-Vinyl Acetate Copolymer and Melt Fracture, T. Fujiki, M. Uemura, Y. Kosaka, 267.
17. Abrasion, Fatigue, and Smearing of Rubber, A. Schallmach, 281.
18. Correlation of Capillary Entrance Pressure Drops with Normal Stress Data, H. L. LaNieve, D. C. Bogue, 353.
19. Studies on the Stretching of Polypropylene Film. II. Polyaxial Stretching, S. Okajima, K. Homma, 411.
20. Effect of Processing on Flow Properties of Some Linear Polyethylene Resins, R. W. Ford, R. A. Scott, R. J. B. Wilson, 547.
21. Effects of Molecular Weight and Strain Rate on the Flexural Properties of Polycarbonate, J. H. Golden, B. L. Hanmant, E. A. Hazell, 557.
22. Dynamic Mechanical Behavior of a Polyamide, G. A. Bernier, D. E. Kline, 593.
23. The Effect of Strain Rate on the Stress-Strain Curve of Oriented Polymers, I. Presentation of Experimental Results, I. H. Hall, 731.
24. The Effect of Strain Rate on the Stress-Strain Curve of Oriented Polymers. II. The Influence of Heat Developed during Extension, I. H. Hall, 739.
25. A Dynamic Mechanical Study of the Effect of Chemical Variations on the Initial Mobility of Linear Epoxy Resins (Polyhydroxyethers), H. Van Hoorn, 871.
26. Hysteresis and Strength of Rubbers, J. A. C. Harwood, A. R. Payne, 889.

(295頁へ)