粉体内の圧力分布の理論*

岡 小 天** 高 見 昭***

The Theory of Pressure Distribution in Powder

by

Syoten OKA

(Faculty of Science, Tokyo Metropolitan University, Tokyo)

and Akira TAKAMI

(Yamawaki Gakuen, Tokyo)

Hereunder is presented a consideration on the theory of distribution of vertical stress in powder piled in a cylindrical vessel in a state of equilibrium. The same problem was treated by Janssen, but his theory was based on the assumption that vertical stress was constant on a horizontal plane. On the other hand, experimental studies show that vertical stress in powder in equilibrium in a cylindrical vessel does not remain constant on a horizontal plane, but changes according to the distance from the axis of the cylinder. As far as we are informed, no theory has yet been developed dealing with the variation of vertical stress with the distance from the axis of the cylinder.

We have developed a theory on distribution of vertical stress, taking into account its variation with the distance from the axis of the cylinder. It is assumed that both the vertical stress and the horizontal stress are connected by Rankine's law. But in the theory proposed under this assumption the possible effect of compression is neglected. From the condition of powder in equilibrium an equation has been derived to determine the vertical stress as a function of both the distance h from the free surface of powder and the distance $\xi=r/R$ from the axis of the cylinder. A solution has been found in taking the vertical stress as expressed in Taylor's series in ξ . The boundary condition at the free surface is so chosen that the total pressure over the free surface is equal to zero. It is shown that our theory agrees fairly well with the experimental data by taking the product of Rankine's coefficient and the frictional coefficient of the wall as appropriate value.

(Received Jan. 5, 1970)

1 は し が き

崩雪、土砂くずれ、砂利穴への転落、地震による崩壊など自然界には人命が危険に直面することがよく見受けられるし、また各種粉体を貯蔵するサイロ、ホッパーなどの破壊も管理上重大な問題である。基本的にこれらに共通する一つとして粉体の物性が関与していることであって、気体、液体、固体とも異なる性質をもつ粉体の重要性が感じられるが、粉体の各種の性質の中で本報ではサイロ、ホッパーなどの貯蔵容器の粉体圧力の基礎的な問題をとりあげてみよう。

粉体を円筒容器内に充てんした場合の粉体の垂直圧力の解析として古くから Janssen の式が知られている。ところが、実際には容器内の粉体圧力はかなり複雑で

あって Janssen の式では説明されず、計算値ともかなり異なった値を示す場合がある。これは式を誘導するときのつぎのような仮定がかならずしも成立しないことを示している。すなわち、(1)容器内の粉体層のカサ密度が深さに無関係である。(2)垂直圧力は同一水平面上で一定である。(3)粉体中ではどこでも水平圧力と垂直圧力との比、Rankine 係数が一定である。

そこで、粉体の圧縮性を考慮した式³⁾も導かれているが、圧力分布を垂直分布だけで表示している。われわれはすでに粉体を円筒容器に充てんした静的な場合について、粉体の圧縮性を無視して、圧力分布を従来の垂直分布ばかりでなく水平方向をも同時に考慮した。すなわち、同一水平面上の半径方向の圧力分布をも考慮に入れた方程式をつくり、圧力を深さの関数を係数とする半径のべき級数によって与えられると仮定して導いた。なお、水平圧力と垂直圧力との比、Rankine

* 原稿受理 昭和45年1月5日

** 正 会 員 東京都立大学理学部 東京都世田谷区深沢

*** 山脇学園 東京都港区赤坂4丁目

係数は一定であるとして取り扱った。

さて、本報の大意は前回と同様であるが、前回では理論と実験との間にかなりのズレがあったが、実験から得られた Rankine 係数と壁面摩擦係数を用いずに、それらの積を含む因子をパラメータとして適当に選ぶことによって、理論が実験をかなりよく説明することがわかった。

2 基礎方程式

半径 R の円筒容器内の粉体層の深さ h における微小厚さ dh の層についての力のつりあいを考える。粉体層内の垂直圧力 P をとすれば (Fig. 1), A B 面での下向きの圧力は

Fig. 1. Powder filled in a cylindrical vessel.

$$\int_0^R P(r, h) 2\pi r dr,$$

C D 面での上向きの圧力は

$$\int_0^R P(r, h + dh) 2\pi r dr$$

となる。また Rankine の土圧論によれば、壁における摩擦力 F は

$$F = \mu k p(R, h) 2\pi R dh$$

で与えられる。ただし k は Rankine 係数, μ は壁面摩擦係数である。粉体の内部摩擦角を θ とすれば

$$k = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \quad (1)$$

である。

つぎに, A B C D なる層のつりあいを考えれば

$$\begin{aligned} & - \int_0^R P(r, h) 2\pi r dr + \int_0^R P(r, h + dh) 2\pi r dr \\ & - \int_0^R \rho(r, h) 2\pi g r dr dh + \mu k P(R, h) 2\pi R dh = 0 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} & \int_0^R \frac{\partial P}{\partial h} \frac{2r}{R^2} dr + \frac{2\mu k}{R} P(R, h) = \frac{2g}{R^2} \\ & \times \int_0^R \rho(r, h) r dr \quad (2) \end{aligned}$$

いま,

$$\xi = \frac{r}{R} \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (3)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\mu k}{R} \quad (4)$$

として, (2) 式へ代入すれば

$$2 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial h} \xi d\xi + \frac{1}{\lambda} P(1, h) = 2g \int_0^1 \rho(\xi, h) \xi d\xi \quad (5)$$

ρ は P の関数なので

$$\rho = f(P) \quad (6)$$

(5) 式と (6) 式とを連立させて圧力 P と ρ とが求められる。

3 圧力分布

厳密にはカサ密度の圧力依存性を考慮に入れなければならないが、以下簡単のために、 ρ を一定とする。そうすると, (5) 式は

$$2 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial h} \xi d\xi + \frac{1}{\lambda} P(1, h) = \rho g \quad (7)$$

となる。また, ξ は $0 \leq \xi \leq 1$ の範囲内にあるので, $P(\xi, h)$ は ξ のべき級数に展開できるとする。圧力分布は軸対称性を有するとしているので, ξ の奇数乗項をすてて,

$$P(\xi, h) = \rho g \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}(h) \xi^{2n} \quad (8)$$

(8) 式を (7) 式へ代入すれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} p'_{2n} + \frac{1}{\lambda} p_{2n} \right) = 1 \quad (9)$$

ここに p'_{2n} は p_{2n} を h について微分したものである。

いま, (9) 式から p_{2n} を求めるために, つぎのようにおいてみる。

$$p'_0 + \frac{1}{\lambda} p_0 = 1 \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} p'_2 + \frac{1}{\lambda} p_2 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{1}{3} p'_4 + \frac{1}{\lambda} p_4 = 0 \quad (12)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

(10) 式をとけば

$$p_0 = c_0 e^{-h/\lambda} + \lambda$$

$P(0, h) = \rho g p_0(h)$ であるから, $h \rightarrow 0$ のとき $p_0 \rightarrow 0$ のように c_0 をきめると,

$$p_0 = \lambda(1 - e^{-h/\lambda}) \quad (13)$$

また, (11) 式, (12) 式の解として

$$p_2 = c_2 e^{-2h/\lambda} \quad (14)$$

$$p_4 = c_4 e^{-3h/\lambda} \quad (15)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

ただし, ここに c_2, c_4 は積分定数である。

(13), (14), (15) 式を (8) 式へ代入すれば

$$\begin{aligned} P(\xi, h) = & \rho g \lambda (1 - e^{-h/\lambda}) + \rho g c_2 e^{-2h/\lambda} \xi^2 \\ & + \rho g c_4 e^{-3h/\lambda} \xi^4 + \dots \quad (16) \end{aligned}$$

表面での粉体層のつりあいを見ると, $P(\xi, 0)$ を

表面で積分したものは0でなければならない, すなわち

$$\int_0^1 P(\xi, 0) 2\pi \xi d\xi = \frac{\pi}{2} \rho g c_2 + \frac{\pi}{3} \rho g c_4 + \dots \quad (17)$$

(16)式で ξ^6 以上の項は小さいものとしてすてることにする。(17)式を0とおいて

$$c_4 = -\frac{3}{2} c_2 \quad (18)$$

したがって, (16)式と(18)式とから

$$P(\xi, h) = \rho g \lambda (1 - e^{-h/\lambda}) + \rho g c_2 e^{-2h/\lambda} \xi^2 - \rho g \frac{3}{2} c_2 e^{-3h/\lambda} \xi^4 \quad (19)$$

(19)式によって圧力分布が与えられる。

(9)式をとくために, (10), (11), (12)式のようにおくことは必ずしも必要ではないが, (19)式は(7)式を満足する。なお, 以上の計算では, 表面圧の積分を0とし, 表面圧そのものは0とおいていないが, これは二次元的加圧の場合, 加圧面に接している水平面では圧力が一様に分布していないという実験事実からも推測されると思われる。

(19)式における定数 c_2 は粉体の粒度, 配列のしかたなどできる未定の定数であって, このような未定定数 c_2 の存在することが粉体の特性であると思われる。

4 理論と実験との比較

すでに発表したように, k , μ の測定値を用いて圧力分布を計算すると, 理論曲線と実験曲線の間にズレを生じた⁴⁾。また, μk をパラメータとしても, k を深さ h によらない定数とするかぎり, 計算値と実測値とのズレを小さくすることができなかった。

以下今回の理論と吉岡氏らの実験結果とを比較する。半径 5.3 cm のガラス円筒容器に砂 ($\rho = 1.45 \text{ g/cm}^3$) を充てんした場合, 表面から 50 cm の深さの中心 ($\xi = 0$) における測定値に適するようにまず λ の値を求め ($\lambda = 16$), つぎに(19)式によって $\xi = 1.0$ における圧力の測定値から c_2 の値を求める ($c_2 = 2.2 \times 10^3$)。このようにして任意の ξ における P の値が計算される。

Fig. 2. Pressure distribution in sand at the depths $h=40 \text{ cm}$, $h=50 \text{ cm}$ and $h=60 \text{ cm}$. Circles represent observed values. Solid curves represent theoretical values.

$\lambda = 16$ ととって, 同様に $h=40 \text{ cm}$, $h=60 \text{ cm}$ の場合の P の値を計算して実験と比較した (Fig. 2).

本方法では圧力の測定値から λ の値, すなわち μk を定めたのであるが, Rankine の土圧論に従い粉体の内部摩擦角から k の値を定めた場合には, 実験とのズレを生じる⁴⁾。したがって本方法による方がよりよいと思われる。また, (19)式または(19)式において ξ^6 以上の項を無視したが, いまの場合 h/λ は1に比してかなり大きいので, $e^{-(n+1)h/\lambda}$ の値は n とともに急激に小さくなるので, この省略は許されるものと思われる。

(昭和44年10月20日 第17回レオロジー討論会にて講演)

参考文献

- 1) Janssen, H. A., V.D.I. **39**, 1045 (1895).
- 2) 吉岡直哉, 都築亀一郎, 山本欣一, 首藤昌義, 化工31年会講演要旨, p. 409 (1966); 田中達夫, 篠原邦夫, 別冊化学工業, **12**, 27 (1968).
- 3) 吉岡直哉, 都築亀一郎, 山本欣一, 化工30年会講演要旨, p. 249 (1965).
- 4) 岡 小天, 高見 昭, 第5回国際レオロジー会議(1968); 第1回日米窯業ゼミナール (1969).
- 5) 梅屋 薫ら, 第1回日米窯業ゼミナール (1969).