有限要素法による線形粘弾性体の数値的応力解析*

田 中 豊 喜** 大井光四郎**

A Numerical Analysis of Stress in Viscoelastic Materials
Using the Finite Element Method

by

Toyoki TANAKA and Koshiro OI

(Institute of Industrial Science University of Tokyo, Tokyo)

In recent years the finite element method is more and more frequently being used in the analysis of elasticity, of plasticity, of elastoplasticity and of structure. In the analysis of viscoelasticity, however, the time required for the purpose and temperature dependency make it difficult to use the method. It is the purpose of this paper to show that the correspondence principle can be applied to the solution of problems concerning linear viscoelasticity by using the finite element method. But there are many problems in connection with solution of elasticity that are algebraically too complicated to be readily inverted by the formal inversion method. R. Bellman proposed a method for approximate inversion of the Laplace transform which involves the idea of dynamic programming. The method was partially adopted in this paper with necessary modification, and considerably accurate numerical solution has been achieved.

(Received Jan. 5, 1970)

1 ま え が き

近年、おもに欧米の航空宇宙工学の分野において、複雑な構造物を精密に解析する必要性が生じ、この要求を満たす手法の出現が望まれていたが、電子計算機の発達に伴い、マトリックス構造解析法、すなわち有限要素法が開発されてから一応の解決を見た。

この方法は近年非常に注目され、応用範囲は骨組構造の解析から連続体力学、熱伝導、流体力学まで広げ、工学のあらゆる分野に驚異的な速度で浸透しつつある。連続体に関しては、弾性学、弾塑性学の分野で有限要素法がさかんに使われているが、粘弾性力学においては、材料の時間依存性、温度依存性、履歴現象を考慮しなければならないので、有限要素法の適用例は少ない。有限要素法は、構造物を有限の要素に分割しモデル化して解析するため、複雑な形状、複雑な境界条件を有する構造物の解析が可能である。近年、各種高分子材料等粘弾性の挙動を示す材料が工業分野に進出してきたが、固体ロケット推進薬の例で明らかのように複雑な形状、特殊な条件で使用されることが多く解析がきわめて困難であったが、有限要素法を用いることによって数値的な解析が可能となった。

本報告では、有限要素法と数値的ラプラス逆変換法

を結びつけて任意形状、任意境界条件を有する2次元3次元線形粘弾性体の応力解析が可能となったので、ここに示すことにする。

なお、数値的ラプラス逆変換法としては、Bellman²⁾によって開発された Gauss の積分法と動的計画法とを結びつけた方法を一部分改良して、かなり精度の高い解を得ることができた。

2 基礎理論と有限要素法への適用

線形粘弾性力学の基礎式をテンソル記号で示し、変分原理から有限要素法に至るまでの諸関係式を導く。モーメントならびに力のつりあい式は

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2)$$

変位ひずみ間の関係式として微小変位理論では

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

応力とひずみの関係式は

$$\sigma_{ij} = \int_0^t E_{ijkl}(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \{ \epsilon_{kl}(t') - \alpha_{kl} \cdot \theta(t') \} dt' \quad (4)$$

境界条件式は

$$S_1 \text{ 上で } F_i = \bar{F}_i \quad (5)$$

$$F_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

$$S_2 \text{ 上で } u_i = \bar{u}_i \quad (6)$$

初期条件は

* 原稿受理 昭和45年1月5日

** 東京大学生産技術研究所 東京都港区六本木

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} = u_i = 0, \quad t < 0 \quad (7)$$

ただし, $E_{ijkl}(t)$ は緩和弾性率, α_{kl} は線膨張係数, n_j は表面力が作用する面に対する法線ベクトルであるまた, $\theta(t)$ は温度差を表わす.

いま応力成分 σ_{ij} が(1), (2)および(5)式を満足するように選んでおくと, S_2 上で

$$\delta u(x_i, t) = 0 \quad (8)$$

時刻 t_1, t_2 で

$$\delta u(x_i, t_1) = \delta u(x_i, t_2) = 0 \quad (9)$$

であるような仮想変位 $\delta u^T = (\delta u, \delta v, \delta w)$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[- \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \bar{X}_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u \right. \\ \left. + (\dots) \delta v + (\dots) \delta w \right] dx \cdot dy \cdot dz \\ + \int_{s_1} [(F_x - \bar{F}_x) \delta u + (F_y - \bar{F}_y) \delta v \\ + (F_z - \bar{F}_z) \delta w] ds \Big] dt = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

が成立する. ペンギ上(10)式を単位ベクトル e を用いて次のように書き表わすと,

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \delta u^T \left[- \int_V (\sigma_{ij,j} e + \bar{X} - \rho \ddot{u}) dV + \int_{s_1} (\bar{F} - F) ds \right] \} dt = 0 \quad (11)$$

しかるに, Green の定理より(3)式を満たす ε_{ij} に対して

$$\int_V \delta \varepsilon^T \cdot \sigma dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \int_{s_1} \delta u^T F ds - \int_V \delta u^T \sigma_{ij,j} e dV \quad (12)$$

が成立するので(11)式に代入すると

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV - \int_V u^T \bar{X} dV - \int_{s_1} \delta u^T \bar{F} ds \right. \\ \left. + \int_V \delta u^T \cdot \rho \ddot{u} dV \right] dt = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

となる. ここで運動エネルギー T を導入すれば,

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}^T \dot{u} dV \quad (14)$$

(13)式の第4項は,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \delta u^T \rho \ddot{u} dV \right] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \quad (15)$$

となるので(13)式は

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta T - \left[\int_V \varepsilon^T \cdot \sigma dV - \int_V u^T \bar{X} dV - \int_{s_1} \delta u^T \cdot \bar{F} ds \right] \right] dt = 0 \quad (16)$$

(16)式は Hamilton の原理にほかならない.

上の証明を逆にたどると, (8), (9)式を満たす任意の仮想変位 δu に対して(16), または(13)式が成立するならば応力成分 σ_{ij} はつりあい式(1), (2)および(5)式を満足することが証明できる.

ここで(13)式にもどり, 応力ひずみ式(4)式をマトリックス表示して(13)式に代入すれば

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \delta \varepsilon^T \left\{ [E(t-t')] \frac{\partial}{\partial t'} \{ \varepsilon - \theta \cdot \alpha \} dt' \cdot dV \right. \right. \\ \left. \left. - \int_V \delta u^T \bar{X} dV - \int_{s_1} \delta u^T \bar{F} ds + \int_V \delta u^T \rho \ddot{u} dV \right\} dt = 0 \quad (17) \right. \end{aligned}$$

$$\text{ただし} \quad [E] = [E_{ijkl}] \quad (18)$$

いま構造物を微小要素の集合からなると考え, その中の任意の微小要素の体積を V_I , 表面力(節点力)のかかる面を S_I とする. いま変位関数を次式で表わせたとする.

$$u(x, t) = \Sigma \phi(x) \cdot A(t) \quad (19)$$

ベクトル表示して

$$\{u\} = [\phi(x)] \cdot \{A(t)\} \quad (20)$$

節点ベクトルを $\{U\}$ で表わすと.

$$\{U\} = [T] \{A\} \quad (21)$$

ただし $[T]$ は要素の節点座標の関数, $\{A\}$ は時間の関数(21), (20)式より, ベクトル表示で

$$\{e\} = [B] \{A\} \quad (22)$$

(22), (21)式より

$$\{e\} = [B] [T^{-1}] \{U\} = [N] \{U\} \quad (23)$$

ゆえに $\{e\}^T = \{U\}^T [N]^T$ 等を(17)式に代入し, (8), (9)式を満たす $\{\delta U(t)\}$ に無関係に(17)式が成立することから

$$\begin{aligned} \int_{S_I} (T^{-1})^T [\phi]^T \bar{F} ds + \int_{V_I} (T^{-1})^T [\phi]^T \bar{X} dV \\ + \int_{V_I} [N]^T \left\{ \int_0^t [E(t-t')] \frac{\partial}{\partial t'} \{ \theta \cdot \alpha \} dt' \right\} dV \\ - \int_{V_I} [T^{-1}]^T [\phi]^T \rho [\phi] [T^{-1}] \{ \dot{U}(t) \} dV \\ = \int_{V_I} [N]^T \left\{ \int_0^t [E(t-t')] [N] \frac{\partial}{\partial t'} \{ U(t') \} dt' \right\} dV \quad (24) \end{aligned}$$

ラプラス演算子を p で表わし, 初期条件(7)式を用いて(24)式を時間に関してラプラス変換すれば,

$$\begin{aligned} \int_{S_I} [T^{-1}]^T [\phi]^T \bar{F} (p) ds + \int_{V_I} [T^{-1}]^T [\phi]^T \bar{X} (p) dV \\ + \int_{V_I} [N]^T [pE(p)] [\theta \alpha (p)] dV \\ = \left[\int_{V_I} \{ [N]^T [pE(p)] [N] \right. \\ \left. + \rho [T^{-1}]^T [\phi]^T [\phi] [T^{-1}] \cdot p^2 \} dV \right] \cdot U(p) \quad (25) \end{aligned}$$

(25)式の左辺の第1項は表面力, 第2項は体積力, 第3項は熱荷重に相当し, 右辺の $[\dots]$ 内は, 慣性項を含む剛性マトリックスに相当する. (25)式は

$$f(p) = K(p) \cdot U(p) \quad (26)$$

と表わすことができ弾性問題のそれと形式的に一致する.

いうまでもなく(3), (4)式をマトリックス表示した式をラプラス変換すれば

$$\{e(p)\} = [N] \{U(p)\} \quad (27)$$

$$\{\sigma(p)\} = [pE(p)]\{\varepsilon(p) - \theta \cdot \alpha(p)\} \quad (28)$$

となり, (26), (27), (28)式などから明らかなように像空間において形式的な弾性問題を解く問題に一致する. (25)式から明らかなように数値的ラプラス逆変換が可能であれば, 動的問題も解析可能である.

ラプラス変換を使う以上の方法は, Lee⁴⁾らによって発達した, いわゆる対応原理 (Correspondence principle) に基づいた解析方法であるが, この原理を用いる際の仮定としては, 以下のことが満たされていなければならない. すなわち

- (1) 粘弾性挙動は線形かつボルツマンの重ね合わせの原理が成立すること.
- (2) 微小変位理論であること.
- (3) 粘弾性体が非定常温度場でないこと.
- (4) 移動境界値問題ではないこと. (すなわち, アブレーション問題は扱えない)
- (5) 初期条件が(7)式で与えられること.

である. 以上は1つの要素に関して述べたが, それらを重ね合わせることによって構造物全体に対して(20)式に相当する剛性方程式が得られ, 境界条件を与えれば解くことができる. 得られた解に数値的ラプラス逆変換をほどこせば線形粘弾性解が得られるが, 逆変換法は紙面の都合上文献^{2), 3)}にゆずることにする.

3 数 値 計 算 例

外側をケースで固定された固体ロケット推進薬が自重を受ける場合の計算例を Fig. 3 に示した. ただし Fig. 1 に推進薬の力学的物性, Fig. 2 に有限要素法で計算する際の要素分割を示した.

4 あ と が き

有限要素法とラプラス逆変換法を組み合わせ, 従来数値計算が困難とされていた任意境界条件, 任意形状を有する2次元, 3次元線形粘弾性体の応力解析が可能となった.

Specific gravity 1.67

Poisson ratio 0.485

$E_1 = 0.525 \text{ kg/mm}^2$, $E_2 = 0.477 \text{ kg/mm}^2$

$\lambda = \eta_2/E_2 = 1.5 \text{ hour}$

Fig. 1. Material properties.

Fig. 2. Finite element division.

Fig. 3. Creep by the self-gravity.

(昭和44年10月22日 第17回レオロジー討論会にて講演)

参 考 文 献

- 1) Zienkiewicz, O. C., and Y. K. Cheung, "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics" (1967) McGraw-Hill
- 2) Bellman, R., "Numerical Inversion of the Laplace Transform" (1966) American Elsevier Publications
- 3) 田中豊喜, 日本機械学会講演論文集, No. 212, 87 (1969).
- 4) Lee, E. H., Quart. Appl. Math., 8, 183 (1955).