コンクリートの破壊条件と破壊過程*

岡 田 清** 小 柳 治**

Failure Criterion and Failure Process of Concrete

by

Kiyoshi OKADA and Wataru KOYANAGI

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

1 ま え が き

セメントコンクリートは、細粗骨材をセメントペーストで結合した複合材料あるいは多相材料であり、さらに細部にわたってみれば、セメントペーストの中には、セメント水和生成物、未水和のセメント粒子、毛細管や空隙、空隙中の水などが存在する。このような異質物質の結合体であるコンクリートの組織は非常に複雑であり、それに加えて結合材であるセメントペースト自身の構造が、水和反応により材令に従って、あるいは乾燥湿潤によっても変化する。このため、コンクリートの破壊あるいはそれと関連づけられる強度をコンクリートの組織と結びつけて解析することは容易ではない。

多相材料であるコンクリートの破壊あるいはそれと関連する強度に関する研究は、種々の方面から進められている。その一つは、コンクリートの組織を等方均質と仮定して、工学的あるいは巨視的現象的な立場から、破壊の瞬間に系に働いている平均化された応力あるいはひずみによって、組み合わせ応力下の一般的な破壊条件を明らかにすることを目的としたものである。また一方、一般的な破壊条件を明らかにすることを目的とするもので、等方均質な連続体の仮定に立脚するものの、コンクリート内に含まれる微小欠陥と破壊とを結びつけて考える微視的（あるいは準巨視的）な立場からの研究もなされている。

他方、コンクリートを、セメントペーストあるいはモルタルをマトリックスとして、インクルージョンとして骨材を含む多相材料であると考え、その破壊を微視的機構的にコンクリートの内部構造または組織の変化と結びつけ、あるいはモデル化して解釈する試みも盛んに行なわれている。さらに、もっと微視的に、セ

メント水和生成物の大きさ程度の立場から、コンクリートの物性を解明しようとする試みもある。

コンクリートの破壊に関するこれらのすべての研究が成功しているわけではなく、また各立場からなされた研究結果の総合化あるいは統一的な解釈は、現在では困難である。しかしこれらの研究は、コンクリート構造物の合理的な設計に対してのみならず、コンクリートの工学的性質の改良のためにも役立つものであろう。

本稿では、これらのコンクリートの破壊ないしそれと関連する強度および破壊過程についての最近の研究について、時間効果を考慮しない静的なものを対象として、概略を述べる。

コンクリートの破壊という語句の明確な定義はなされていないようであるが、一般には破壊を強度と関連づけて考えているため、単に破壊という場合には、強度破壊の意味で用いられている場合が多い。一方、破壊は、内部組織の連続的な変化の過程として考えることができ、強度破壊や崩壊などは、その破壊過程のある段階に対応するものであると考えることもできる。本文では、破壊について両者の考えをもとに述べることにする。

なお、本文では、コンクリート関係で用いられているように、応力、ひずみ等の記号は、圧縮を正、引張りを負として取り扱う。

2 コンクリートの破壊条件

コンクリートは、粒状物質をセメントペーストで結合したものであり、構成要素である骨材粒よりはるかに大きなマクロ的見地からは、等方均質材料であると考えられるが、構成要素レベルの見地からは極度に不均質な材料である。このような材料の破壊に関する研究には、前述のようにコンクリートを等方均質な連続体として取り扱うものと、非等方不均質かつ不連続性

* 原稿受理 昭和45年9月29日

** 正 会 員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

に注目したものとがあるが、後者の立場からこのような構造をもつ材料の一般的な破壊条件を定めることは非常に困難である。このため、前者の立場からのコンクリートの破壊あるいはそれと関連する強度について述べる。

2・1 巨視的破壊条件

コンクリートを等方均質かつ安定な材料と仮定して、巨視的現象的に破壊をとらえ、崩壊あるいは強度破壊の条件を、その瞬間に系に作用している応力またはひずみによって表わすという巨視的破壊条件（破壊仮説）には、応力説、ひずみ説、エネルギー説がある。このような仮説の妥当性または普遍性は、実験によって検証されなければならないものであるが、コンクリートに対して提案されたおもなものとしては次のようなものがある。

(1) 最大主ひずみ一定説、(2) Mohr 説、(3) 八面体応力説

各仮説の内容については他の文献 1), 2) などにゆずり、ここでは各仮説の問題点のみをとり上げる。

(1) 最大主ひずみ一定説

St. Venant により提案されたこの仮説は、材料の破壊が応力ではなく、ひずみによって規定されるとするものであり、系に生ずる最大引張り（または圧縮）ひずみが、限界ひずみに達したときに系の崩壊が生ずるとするものである。コンクリートにおけるひずみ計測の精度など技術上の問題は別として、コンクリートの破壊が本質的に引張破壊であり、破壊に対して引張限界ひずみがある役割を果たしているものと推察されるため、後述の二軸圧縮試験の結果などから、この仮説を直接コンクリートに適用することはできないとしても、この破壊仮説はある程度の妥当性を有するものと考えられる。

(2) Mohr の破壊説

破壊時の応力状態を表わすいわゆる Mohr の円群の包絡線が、破壊条件を表わすとする、この現象論的な破壊仮説は、コンクリートの破壊条件として採用されることも多い。この仮説は、一般に $\tau = f(\sigma)$ のように、直応力とせん断力との関係で表わされているが、これは主応力 σ_1, σ_3 の関係で、 $\sigma_3 = g(\sigma_1)$ と書きかえることが可能である。圧縮強度と引張強度との間に大きな差のあるコンクリートのような材料では、本質的にせん断破壊が生ずるものとは考えられず、この意味からも Mohr 説は、せん断応力と結びつけて考えるより、むしろ破壊時には現象的に最大主応力と最小主応力との間にある関係が存在すると解釈する方が妥当であろう。

(3) 八面体応力説³⁾

材料の破壊が、三主応力方向に対して等角をなす正

八面体の面上に働く八面体主応力 σ_{oet} と八面体せん断応力 τ_{oet} とのある関係によって決定されるとするもので、エネルギー説の一種であるが、後述のように特殊な応力場においてのみ成立するものであり、一般的なものではない。なお有効応力と平均応力との関係で破壊条件を決定しようとする有効応力説⁴⁾なども、考える面が正八面体と異なるため式の形は異なるが、本質的には八面体応力説と同等である。

2・2 微視的破壊条件

均一で欠陥を全く含まない弾性体の理想強度は、原子間の結合力によって定まるものと考えられるが、実在の材料では潜在的に材料内部に微細な欠陥が散在するため、この理想強度よりもはるかに小さい。これは材料内部に散在する微細な欠陥の周辺の応力集中による引張応力が、材料の理想強度に等しくなったときに破壊が生ずるためであると考えることができる。このような解釈の下に導かれたいわゆる微視的破壊条件として、Griffith および修正 Griffith の破壊仮説があげられる。これらの詳細は他の文献にゆずり（たとえば文献 2））、ここではコンクリートへの適用性の観点から、それらの概略のみを示す。

Griffith⁵⁾ は、ぜい性材料の強度が材料内部に存在する微小ひびわれなどの欠陥の安定性によって定まるものと考え、エネルギーの考察をもとに破壊の説明づけを行なっている。すなわち Griffith は、完全弾性体の中に、相互干渉のない範囲に任意に散在している長径 $2c$ のきわめて扁平な円形のひびわれを含む二次元板を考え、材料の破壊は最も危険なひびわれの発生によって生じ、ひびわれが発達を始める瞬間に材料が破壊すると考えた。

Griffith の考えた材料では、材料内部のポテンシャルエネルギー (P) は、ひびわれ発生による表面エネルギー (W) の増加と、その時に解放されるひずみエネルギー (U) によって支配されるから、この平衡状態はポテンシャルエネルギー ($P = W - U$) が極値をとる状態 ($\partial P / \partial c = 0$, または $\partial W / \partial c = \partial U / \partial c$) で与えられる。平面応力状態であれば、 $U = \pi c^2 \sigma^2 / E$, また $W = 4c\gamma$ であるから、引張破壊を生ずる限界応力は

$$\sigma = -\sqrt{2E\gamma/\pi c} \quad (1)$$

ここに、 c : ひびわれの長半径、 E : ヤング係数、 γ : 表面エネルギーである。

Sack⁶⁾ は、この Griffith の条件を、扁平な長半径 c の微小円形の潜在ひびわれを考えて、三次元に拡張し、限界応力として次式を与えている。

$$\sigma = -\sqrt{\pi\gamma E/2c(1-\nu^2)} \quad (2)$$

ここに、 ν : ポアソン比

Griffith⁷⁾ はさらに、潜在ひびわれからの引張破壊の概念を、二次元応力状態 ($\sigma_1 \geq \sigma_3$) にある材料の破壊

図1 Griffith の破壊説

に拡張し、次式を得ている。

$$(a) \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 \leq 0 \text{ の場合} \quad \sigma_3 = \sigma_t \quad (3)$$

$$(b) \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 > 0 \text{ の場合} \\ (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_t(\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (4)$$

ここに、 σ_t は材料の単軸引張強度である。

(3), (4)式の関係を、図1に示す。

Griffith の仮説では、扁平な円形の潜在ひびわれから、さらにひびわれが進展するまでは、もとの潜在ひびわれは変形しないものと仮定している。潜在ひびわれ周辺の応力が圧縮応力であれば、上記のひびわれ進展までに潜在ひびわれが閉じてしまう可能性がある。このひびわれ閉塞の考えから、McClintock⁸⁾は、Griffith の破壊仮説の修正を行なった。すなわち、ひびわれに垂直方向に働く応力により、ひびわれが閉じる限界応力を σ_c とし、ひびわれ面の摩擦係数を μ とすれば、Griffith の示す(4)式は、

$$\mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_c) - (\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{1 + \mu^2} \\ = 4\sigma_t\sqrt{1 - (\sigma_c/\sigma_t)} \quad (5)$$

またひびわれが非常に扁平であれば、 $\sigma_c \approx 0$ であり、(5)式は、

$$\mu(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{1 + \mu^2} = 4\sigma_t \quad (6)$$

一方、このような修正 Griffith の理論に対し、この修正によっては、圧縮強度と引張強度との比を実際の材料の実験値とあわせることは可能であるが、そのためには摩擦係数 μ の値は非常に高くなりすぎる。すなわち、この修正理論は Griffith の微視的破壊条件を、巨視的な破壊条件に拡大し、実験値をあわせるための一つのパラメータの追加でしかなく、物理的意味をもつものではないとの解釈がされている。⁹⁾

Griffith の示す微視的破壊条件と、巨視的破壊条件である Mohr の仮説は、等価の関係にあり、微視的破壊条件と巨視的破壊条件との間には、数式の形の上で容易に関連つけられることが知られている。²⁾ しかしながら微視的破壊の条件は、巨視的破壊である系全体の破壊あるいは強度破壊に対応するものではなく、むしろ

潜在ひびわれからの新しいひびわれ発達の条件のみを示すものであると解釈される。すなわち初期ひびわれの発生から、巨視的破壊に至る間には、安定なひびわれの発生、発達や停止、ひびわれの閉塞、不安定ひびわれの発生と成長、それらに伴う内部応力状態の変化、ひびわれの相互干渉など、複雑な過程が存在する。このため、内部構造の変化に対応する各種の破壊の段階に対応する破壊条件と、系の最終的な段階である崩壊あるいは強度破壊に対する巨視的破壊条件とは必ずしも同一ではなく、対象とする破壊の段階により区別されるべきであろう。この内部構造の変化に注目した取り扱い、3節において述べる。

2・3 破壊曲面

材料およびその系の巨視的破壊条件を表わすにあたり、最も一般的なものが破壊曲面である。²⁾¹⁰⁾

いま、コンクリートが巨視的に等方均質とみなせる応力ならびに環境条件の下で、かつ履歴および時間効果が無視できる場合には、その破壊を応力のみの関数として表わすことができ、コンクリートの巨視的破壊条件としての破壊曲面は、三主応力を軸とする三次元直交座標空間内の一凸曲面として一義的に定められる。¹⁰⁾¹¹⁾

この破壊曲面は、図2に示すように、三主応力軸に等角の傾きをもつ静水圧線 (Space diagonal, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) を軸として、主応力相互間に互換性のあるような凸曲面である。破壊曲面の形状を知るには、一つの主応力軸と静水圧線とを含む平面 (Rendulic の応力面) による破壊曲線の切口曲線 (図3参照) と、静水圧線に垂直な平面 (直截面, Right section, $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{一定}$ 平面) による破壊曲線の切口曲線 (図4参照) との形が求められればよい。

等方均質な材料であれば、破壊曲面は図4の $-30^\circ \leq \theta \leq +30^\circ$ の範囲のみの破壊時の応力状態 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ とする) がわかれば、つぎのようにして決定される。すなわち、図3、4のような、 $I_1 = \text{一定}$ の直截面

図2 破壊曲面の概形

図3 Rendulic の応力曲線の概形

図4 破壊面の直断面の概形

を含む平面上での、静水圧線から破壊曲面に至るまでの距離 r およびその方向 θ は、それぞれ

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} / 3} \\ &= \sqrt{3} \cdot \tau_{\text{oct}} \\ &= \sqrt{2(I_1^2 - 3I_2)} / 3 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{および } \theta = \tan^{-1}\{2(\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) / \sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)\} \quad (8)$$

ここに、 $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ：応力の第一次不変量

$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$ ：応力の第二次不変量

で与えられる。Rendulic の応力曲線は、それぞれ圧縮試験 (Compression test) および伸長試験 (Extension test) ととも呼ばれる、二つの応力状態 ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ および $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$) における試験から求められる。一方、二次元応力状態での破壊について中間主応力の影響が問題にされることもあるが、破壊曲線を二主応力軸を含む平面で切断した切口曲線が、二次元応力状態での破壊条件 (破壊曲線) である。このため、安定な領域での材料およびその系の破壊の状態は、破壊曲面を求めることによりすべて定められる。ゆえに、この破壊曲面表示は、巨視的破壊条件の最も一般的なものであり、また前述の種々の破壊仮説は、すべて破壊曲面でもって表示することができる。²⁾

2・4 巨視的破壊条件に関する実験

コンクリートの強度破壊あるいは崩壊までの破壊過程における内部構造変化を追跡する試みは、後述のよ

うに種々なされているが、これらを定量的に明確化して説明するまでには至っていない。

コンクリートが等方均質とみなせる領域において、巨視的現象的に破壊をとらえ、一般化された破壊条件を求める、いわゆる巨視的破壊条件に関する実験は、数多く行なわれている。これらの研究は主として、組合せ応力を受けるコンクリートの破壊を強度面からとりあげたものであり、組合せ応力の種類も、二軸、三軸系の圧縮-圧縮、圧縮-引張り、圧縮-曲げ、圧縮-ねじり、圧縮-せん断、曲げ-ねじり、曲げ-曲げ、引張り-引張りなどがある。

コンクリートは多相材料であり、巨視的に一様応力場とみられる範囲内においても、Dantu の光弾性実験の結果などからわかるように、内部応力は均一ではない。このため、巨視的破壊条件を求める場合でも、応力場が一様な状態に遠ければ、特定の载荷状態の下での破壊条件が得られるのみであり、その結果を強度破壊の観点から一般化することは困難となる。この理由から、現在までに行なわれている上記の組合せ応力に関する各種試験の中で、一般化しうる結論が得られていると考えられるものは、二軸、三軸圧縮の応力場でのもののみであろう。

2・4・1 二軸圧縮強度 現在までに行なわれている二軸圧縮試験は、主として立方体または直方体供試体の二対辺に荷重をかけ、供試体破壊時最大荷重をもとに二軸圧縮強度を求めるものである。この方法によれば、一般に供試体の高さとの比が1のものが多いため、载荷板面と供試体端面との間の摩擦による端面拘束が問題となる。すなわち、端面摩擦による拘束があれば、供試体については等方均質の仮定がなりたつとしても、供試体内応力分布は三次元的となるため、^{10)11)13)15)~23)24)}正しい二軸圧縮強度は求められない。

一方、円柱供試体を用いて軸方向を解放し、周方向の水圧により二軸圧縮強度を求める方法もある。¹⁴⁾この場合は、端面拘束の影響はないが、軸方向変位を拘束しないことが重要であり、また二方向の主応力比は等しく、これを変化させることはできない (前述の伸長試験に相当する)。

現在までに行なわれたおもな二軸圧縮強度試験の結果の概要をまとめて表Iに示す。また、図5に、各試験の二軸圧縮強度 (σ_1, σ_2) の単軸圧縮強度 (σ_0) に対する比をとり、 $\sigma_1/\sigma_0 \sim \sigma_2/\sigma_0$ 平面上で示す。^{10)11)13)~23)}

これらの二軸圧縮試験 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$) では、 σ_1 は σ_2 の増大につれて増加し、 $\sigma_2/\sigma_1 = 0.4 \sim 0.6$ で見かけの強度 σ_1 が頂点に達し、以後 $\sigma_1 = \sigma_2$ までは低下し、さらに $\sigma_1 = \sigma_2$ における二軸圧縮強度の単軸圧縮強度に対する比は、1.1~1.2 のものが多い。このように、二軸圧縮応力状態では見かけの強度が単軸圧縮強度に

表 I 二軸圧縮強度試験結果

研究者	年代	減摩材	二軸強度 単軸強度	備 考***
Föppl*	1900	なし ステアリンと脂	1.87** 0.90**	モルタル 7 cm 立方体
Millard*	1912	グリース	1.00	コンクリート 立方体
Richart ⁽¹⁴⁾ Brandzaeg, Brown	1928	(水 圧)	0.91~1.25	コンクリート, モルタル $\phi 4 \times 22$ インチ 円柱体 $\sigma_c = 30 \sim 300 \text{ kg/cm}^2$
Wastlund ⁽¹⁵⁾	1937	ゴムノボド	1.15	モルタル, 15 cm 立方体
Glomb ⁽¹⁶⁾	1958	パラフィンワックス	1.25~1.50**	コンクリート, 10 cm, 20 cm 立方体, 等方軸圧縮 ($\sigma_1 = \sigma_2$) のみ $\sigma_k = 165 \sim 235 \text{ kg/cm}^2$
Bellamy ⁽¹⁷⁾	1961	なし	1.9~4.9	モルタル, $\phi 6 \times 12$ インチ円筒 (内径 2.95 インチ) $\sigma_c = 300 \sim 340 \text{ kg/cm}^2$
Weigler, Becker ⁽¹⁸⁾	1963	(ローラー)	1.0~1.3**	ペーストを含む 7 配合, $10 \times 10 \times 2.5 \text{ cm}$ スラブ $\sigma_k = 330 \sim 1060 \text{ kg/cm}^2$
Robinson ⁽¹⁹⁾	1964	Febcure	1.10	モルタル, $10 \times 10 \times 4$ (インチ)
Iyenger <i>et al</i> ⁽²⁰⁾	1965	不 定	3.5** 3.1**	コンクリート } モルタル } 4, 6 インチ立方体 $\sigma_c = 30 \sim 500 \text{ kg/cm}^2$
Vile ⁽¹³⁾	1965	Febcure	1.30** 1.25~1.45**	モルタル, 軽量骨材コンクリート } 天然骨材コンクリート } $10 \times 10 \times 4$ インチスラブ
Berg ⁽²¹⁾ Смирнов	1965	なし ジュラルミン (5 mm) とゴム (4 mm)	1.21** 1.00**	コンクリート, $40 \times 40 \times 96 \text{ cm}$ 角柱 $\sigma_k = 360 \sim 600 \text{ kg/cm}^2$
丹羽, 小柳, 小林 ⁽¹⁰⁾	1967	シリコングリスとゴム (0.23 mm)	1.14**	軽量骨材コンクリート 10.5 cm 立方体, $\sigma_c = 300 \text{ kg/cm}^2$
小林, 小柳 ⁽¹¹⁾	1967	同 上	1.08~1.13**	天然骨材コンクリート 10.5 cm 立方体, $\sigma_k = 150, 430 \text{ kg/cm}^2$
Schroder ⁽²²⁾ Opitz	1968	Federmessing 箔 (5 mm) と PTFE 板	1.07~1.13**	コンクリート $20 \times 20 \times 5 \text{ cm}$ スラブ, $\sigma_k = 225, 300, 450 \text{ kg/cm}^2$
Kupfer ⁽²³⁾ Hilsdorf Rusch	1969	(ブラシ載荷板)	1.14~1.18**	コンクリート $20 \times 20 \times 5 \text{ cm}$ スラブ, $\sigma_k = 190, 315, 590 \text{ kg/cm}^2$

注 * G. W. D. Vile (文献13) による

** 等方軸圧縮 ($\sigma_1 = \sigma_2$) の場合

*** σ_c : 単軸圧縮強度 (円柱), σ_k : 同 (立方体)

図5 二軸圧縮試験結果

比してわずかながら増大するとする試験結果も多いが、一方二軸圧縮強度が増加するのは端面摩擦の影響であ

り、本質的には単軸圧縮強度と変わらないものであるとして、それを検証した実験もある⁽²¹⁾。

いずれにせよ、端面摩擦を完全になくすることは非常に困難であり、減摩材料が不適当なものであれば、たとえ見かけの摩擦係数がゼロとなっても、供試体に局部破壊を生ぜしめるため、正しい二軸圧縮強度が求まらない。それゆえ上記の問題は、空気圧または水圧による载荷のように、完全に端面摩擦の影響のない試験条件において確かめることが必要であろう。なお、二軸圧縮強度について中間主応力をもとにした解釈もなされているが、図5が一般的な破壊条件である破壊曲面の二主応力軸を含む平面での切口曲線であることから、とくに二軸圧縮強度に関して中間主応力をもとに解釈を行なう必要はない。

2・4・2 三軸圧縮強度 三軸圧縮強度試験は、円柱供試体を用いて側方静水圧と軸圧とを载荷し、破壊強度を求めるものが多い^{(14)(25)~(27)}。これらは側方拘束圧が等しく、 $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ なる応力状態下の試験であり、 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ なる任意の応力状態下の三軸圧縮試験の特別のものである。

一般的に三方向の応力を変化させて三軸圧縮強度試

験を行なった例はあまり多くはない。これらはいずれも立方供試体を用いて、三軸の荷重を独立にかけものであるが、この載荷方法によれば一般的な破壊条件としての破壊曲面を求めることができる。破壊曲面の性質は、2・3に述べたように、静水圧線 ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) を軸として静水圧の増加とともに増大する。この形状を上記の $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ の試験をもとにして回転対称形と考える説もあるが、応力状態 $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ (いわゆる圧縮試験) と、応力状態 $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ (いわゆる伸長試験) においては、破壊曲面の母線の形状は明らかに異なり、破壊曲面を σ_{oct} または $I_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ 一定面で切断した破壊曲面の切口曲線は図6のようであり、静水圧線 (図6では中心点) から切口曲線に至る距離は、前者の場合に最も長く、後者の場合は最も小さく、 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ の応力状態では両者の中間にある。この静水圧線から切口曲線に至る距離 r は $\sqrt{3}\sigma_{oct}$ であり、これからわかるように、応力状態により σ_{oct} または I_1 に対応する τ_{oct} が異なることとなり、 σ_{oct} と τ_{oct} との一義的な関係により破壊条件を定めようと仮定する八面体せん断応力説は、コンクリートに対する一般的な破壊条件としてはなりたない。一方、破壊曲面の概形を知るには、各 I_1 (または σ_{oct}) に対する切口曲線および Rendulic の応力曲線を求めればよいことを述べたが、Rendulic の応力曲線の例を図7に示す。

三軸圧縮試験の結果は、見かけ上最大および最小主応力の和と差との関係で近似的に表わされることも報告されているが、これはあくまで見かけのものであり、これより破壊をせん断と結びつけて考えることは誤りである。

2・4・3 引張り域を含む二軸強度 引張応力を含む領域では、純粋な引張応力場を作りだすことが困難であるという実験技術上の問題に加えて、圧縮応力のみの領域に比して破壊過程が異なるものと考えられ、その破壊条件に関しては種々の問題点を含んでいる。

図6 破壊曲面の直断面¹⁰⁾¹¹⁾

図7 Rendulic の応力曲線¹⁰⁾¹¹⁾

すなわち概念的には、2・3で述べた破壊曲面が巨視的破壊条件を表わすものとして有効であるが、引張り域では、内部構造の変化の過程が短かく、局部的な欠陥が系全体の崩壊に直接結びつく可能性がより大きく、得られた強度値を系の材料特性として意味づける上で問題が残る。

圧縮と引張りの組合せ応力を受けるコンクリートの強度に関する実験は、二軸圧縮に関する実験と同様数多くなされている。これらの引張応力を生じさせる方法には、種々のものがあるが、これらの実験をまとめて表Ⅱに示す。

以下各試験方法に関して概略の考察を行なう。

(1) 圧縮-軸引張り

角柱供試体を用いて、軸方向引張りと部分圧縮とを組み合わせる二軸試験を行なう方法は、部分圧縮による供試体内の圧縮応力分布が均一でなく、破壊時の供試体の破壊点の応力を明確に算定することが困難である。このため Kupfer らの、スラブ供試体の二方向から圧縮と引張りとを加える方法は、圧縮-引張りの組合せ応力状態での強度を求める方法として最も適切であると考えられる。この場合二軸圧縮と同様、供試体端面の載荷板による拘束が問題となるが、Kupfer らはブラシ状載荷板を用いてそれを解決している。

Kupfer らは、引張り-引張りの組合せ応力に対する実験を同時に行なっているが、それらの結果を図8に示す。図5と図8とを組み合わせれば、破壊曲面の二主応力面での切口曲線の形状が知られよう。

(2) 圧縮-曲げ引張り

角柱供試体を用いて、側方部分圧縮を加えたはりの曲げ試験を行なう方法は、部分圧縮を受ける領域の応力算定が困難なほか、曲げ引張強度と単軸引張強度との関係が正確に求められないため、これらの試験結果からは一般的な結論を得ることはできない。

(3) 圧縮-周引張り

円筒供試体に、内圧を加えた時に生ずる円周方向の引張応力と軸方向圧縮の組み合わせた試験方法は、供

表Ⅱ 引張り域を含む二軸強度試験結果

応力系	研究者	年代	備考
圧縮-軸引張り	西沢 ³¹⁾	1961	コンクリート, 15×15×50 cm 角柱 軸引張り-部分圧縮 (15 cm), $\sigma_c=250\sim450$ kg/cm ²
	Vile ¹³⁾	1965	コンクリート, モルタル, 4×4×15 インチ角柱 軸引張り-部分圧縮 (3 インチ)
	Kupfer, Hilsdorf Rusch ²³⁾	1969	コンクリート 20×20×5 cm スラブ $\sigma_c=190, 315, 590$ kg/cm ² (引張り-引張りを含む)
圧縮-曲げ引張り	Smith ³²⁾	1953	コンクリート, 3×4×12 インチ角柱 $\sigma_c=240$ kg/cm ²
	畑野, 関, 西沢 ³³⁾	1964	コンクリート, 15×15×50 cm 角柱 $\sigma_c=250, 450$ kg/cm ²
圧縮-周引張り	McHenry, Kani ³⁴⁾	1958	コンクリート, $\phi 14 \times 24$ インチ円筒 (内径10インチ) $\sigma_c=210\sim450$ kg/cm ²
	畑野, 関, 西沢 ³³⁾	1964	コンクリート, $\phi 15 \times 30$ cm 円筒 (内径 5 cm) $\phi 25 \times 25$ cm 円筒 (内径 20 cm)
圧縮-ねじり	Bresler, Pister ³⁶⁾	1958	コンクリート, $\phi 9 \times 30$ インチ円筒 (内径 6 インチ) $\sigma_c=210\sim420$ kg/cm ²
	Goode, Helmy ³⁷⁾	1967	コンクリート, $\phi 8 \times 36$ インチ円筒 (内径 6 インチ) $\sigma_c=150\sim380$ kg/cm ²
圧縮-割裂	丹羽, 小林, 小柳, 平島 ³⁹⁾	1967	モルタル, 10.5×10.5×(1~3)cm スラブ $\phi 7.5 \times 15$ cm 円柱
圧縮-せん断	たとえば Hager ⁴⁰⁾ 畑野 ⁴¹⁾ 丹羽, 小林, 下河内 ⁴²⁾	1931

図8 二軸圧縮-引張試験結果²³⁾ (引張りを正)

試体が薄肉円筒であれば、円周方向の応力が一様に近くかつ内圧の大きさも大きくないため、かなりの精度で破壊時の応力状態を算定することが可能である。³⁵⁾しかし、供試体が厚肉となれば、円周方向ならびに半径方向に応力こう配があるため、破壊点の応力を明確に算定することができなくなる。

(4) 圧縮-ねじり

円筒供試体を用いて中心軸まわりのねじりを加えると同時に軸圧をかける方法もしばしば用いられている。これはねじりによるせん断力を変換すれば、ねじり試験が主引張応力と主圧縮応力との組み合わせの試験であることを利用したものであるが、(2)と同様に薄肉円筒の試験でなければ一様応力場と考えられない。なお、長方形あるいはT形の形状の供試体にねじりを加えた試験もよく行なわれているが、³⁸⁾これらは試験の目的が異なり、また破壊点の応力算定そのものが問題であるため、ここではこれらを除外する。

(5) 圧縮-割裂

通常コンクリートの引張強度は、円柱供試体の割裂強度より求められており、これを圧縮と組み合わせて、圧縮-引張り域での破壊条件について検討したものもある。割裂試験においては、供試体内応力は圧縮-引張りの組み合わせの応力状態であり、またその応力分布も一様ではなく、実際に働く引張応力は断面をつうじて一定のものではない。このため、割裂試験における破壊点は、組合せ応力の影響により中心点からはずれることが予想され、上記の各方法と同様破壊点の応力算定が問題となる。このことは、通常の割裂試験から求められるコンクリートの引張強度がいかなる意味をもつかを、あらためて検討することを必要とするものと考えられる。

(6) 圧縮-せん断

直接せん断と圧縮との組み合わせにより、試験を行なう方法もいくつか報告されている。^{40), 41)}

直接せん断試験におけるコンクリート内のせん断応力分布は非常に複雑であり、この試験は単に見かけの破壊耐力を求めるもので、結果を破壊条件の一般形に拡張できるものではない。

以上述べたように、引張り-圧縮の組合せ応力を対象としたものは、各試験ともに試験結果が試験条件によって規定されるものが多く、特定の試験条件の下で

のみの破壊条件を示すもので、一般化しうるものとは考えられないものが多い。また結果を八面体応力との関係で整理したものもあるが、試験時の応力状態を考えると、破壊曲面の母線に沿わない試験結果を一つの面に投影しており、この意味からも引張り域を含む破壊条件には信頼される資料は少ない。

上記の他に、破壊をひずみによって示す方法もとられている。⁴³⁾しかし、強度破壊時のひずみをもって破壊時ひずみと考えるならば、その間に対応関係があり、形の複雑さを問わなければ、ひずみ説も応力説も同一であると考えられる。

3 破壊過程

前節においては、コンクリートの巨視的破壊条件について論じたが、これと対称的にコンクリート内部の微視的破壊であるひびわれの進展から、系の崩壊に至るまでの機構を明確にしようとする試みにも注目されるものがあり、コンクリートの破壊を明らかにする上での重要なアプローチの一つであろう。

3・1 破壊過程

コンクリートの破壊を考えると、外荷重の増大につれて、潜在する気ほう、骨材周囲の水隙や空隙などの内部欠陥からのひびわれが発生、成長したのち、複雑なひびわれ伝ばの過程をへて系の崩壊に至る。この過程を破壊過程と名付けると、破壊過程は概念的に次のような段階に分けられる。

破壊の発生——安定な破壊の伝ば——不安定な破壊の伝ば——強度破壊——崩壊⁴⁴⁾
あるいはひびわれの伝ばを中心として

初期ひびわれの発生——安定したゆっくりした成長——限界状態——不安定な速い伝ば——ひびわれ拘束

破壊には、上記のように種々の段階があるが、この過程を説明する Griffith およびそれを拡張した Griffith-Irwin の理論は、コンクリートの破壊を考える上で参考になるであろう。

3・2 限界ひずみエネルギー解放率

Griffith の仮説は、2・2に述べたように、ひびわれが進展するときには、ひずみエネルギーがひびわれの表面エネルギーに変換されると考え、エネルギーのつりあいから(1)式で定められる応力レベルにおいて、材料内の潜在欠陥からひびわれが成長、伝ばし、破壊に至るものである。Irwin と Orowan は、完全ぜい性材料でなく延性を示す材料に対しては、Griffith のひびわれ伝ばの概念に塑性流れによるひずみエネルギー消散の影響を考慮しなければならないことを指摘し、(1)式の表面エネルギー γ の項を、ひびわれの伝ば過程でなされる全仕事(表面エネルギー+塑性仕事)におきかえることを考えた。⁴⁸⁾すなわち Irwin は、(1)式を修正した次式を提案した。

$$\sigma = -\sqrt{GE/\pi c} \quad (9)$$

ここに、 E はヤング係数、 c はひびわれの長半径、 G はひびわれ単位面積あたりのひずみエネルギー解放率である。

このひずみエネルギー解放率 G は、実験的に定められるパラメータであり、材料とひびわれ生成の程度によって定まるものと考えられる。

一方、ひびわれの伝ばは、初期はゆっくりした安定な状態であるが、あるところから不安定な過程へと移行する。その限界における G を G_0 とし、これを限界ひずみエネルギー解放率あるいはフラクチュアタフネスと名付けている。この G_0 をこえると、ひびわれは不安定で急速な伝ばを示し、応力 σ とひびわれ長さ c との間には、もはや(9)式のような対応関係は存在しない。また限界ひずみエネルギー解放率 G_0 は、ヤング係数 E のように材料固有の値であるとされている。⁴⁹⁾

Irwin はまた、二次元応力状態での弾性体内のひびわれ先端部分の応力を求め、⁵⁰⁾応力強度係数(Stress intensity factor) K を次の形で定義している。

$$K^2 = EG \quad (\text{平面応力状態}) \quad (10)$$

限界状態での K の値 K_0 は、限界ひずみエネルギー解放率と次式で関係づけられる。

$$K_0^2 = EG_0 \quad (11)$$

3・3 内部組織変化

コンクリートの破壊過程を現象的にとらえることは、ひびわれの進展あるいはそれに伴う内部構造の変化をとらえることになるが、実験室的には、荷重を受ける供試体に対して種々の方法でなされている。これらは大別すれば、(1)応力ひずみ曲線の形状変化をもとに、内部構造の変化と結びつけて解釈したもの(Richart⁵²⁾ら、Shar⁵³⁾らなど)、(2)超音波を用いて、その速度あるいは減衰をもとに組織変化を求めたもの(Jones⁵⁴⁾、Kaplan⁵⁵⁾、Robinson⁵¹⁾など)、(3)ひびわれ発生時の弾性波の測定から組織変化を求めるもの(Rüsch⁵⁶⁾、横道⁵⁷⁾など)、(4)X線写真あるいは顕微鏡による視察から直接ひびわれを観測し、荷重レベルによるひびわれの進展を明らかにする直接測定(Slate⁵⁸⁾ら、Hsu⁵⁹⁾らなど)などがある。

これらの各試験結果はほぼ一致しており、単軸圧縮試験の結果をまとめると、圧縮強度 σ_0 に対する応力レベルと、これらの方法で測定された内部構造変化との関係は、

(a) σ/σ_0 が 0.25~0.3 では、(i)応力~縦ひずみ曲線は直線であり、(ii)超音波の伝ば速度は一定である。

(b) σ/σ_0 が 0.3~0.4 において、(i)応力~縦ひずみ曲線は直線から離脱しはじめるが、応力~体積ひずみ曲線は直線である、(ii)超音波の伝ば速度が低減しはじめる、(iii)弾性波の測定が可能となる、(iv)これは載荷以

前から存在した骨材とマトリックス間のボントひびわれが、数、幅、長さともに成長をはじめる応力レベルである。

(c) σ/σ_0 が 0.8~0.9 において、(i)横ひずみが急激に増大し、応力～体積ひずみ曲線は直線から離れ、こう配の符号も変化する。すなわち見かけの体積は減少から増大の方向に向かう。(ii)超音波の減衰が急激に生ずる。(iii)弾性波測定におけるクラックノイズが急増する。(iv)この段階において、ボンドひびわれからマトリックスであるモルタル中へひびわれが進展し、ボンドひびわれを連結し、連続したひびわれパターンが形成され、崩壊へとつながる。

Popovics は、これらの関係を図9のように示している。⁶⁰⁾

図9 荷重レベルと組織変化

内部組織の変化に対し、マトリックス強度よりも低い骨材—マトリックス界面のボンドが大きく影響を与えるため、上記の関係はマトリックスの配合ならびに構成要素である骨材の量や性質によって変化するが、⁶¹⁾インクルージョンである骨材は、潜在ひびわれおよび弱点である界面を増加させ、ひびわれ伝ばを助ける一方、発生したのちのひびわれの伝ばを拘束する働きをするものと考えられる。

このような、破壊過程としての内部組織の変化のいわば現象的な追跡に対し、拡張された Griffith の概念をもとにしたエネルギー的考察をもとに、破壊過程を説明づける試みもなされている。

3.4 コンクリートの破壊過程

コンクリートでは、破壊過程で解放されるひずみエネルギーは、Irwin や Orowan の考えた金属材料のよ

うに主として塑性仕事に費やされると考えるよりも、ガラスやセラミックのように、主として表面エネルギーに変換されるものと考えられる。すなわち、コンクリートの応力ひずみ曲線にみられる見かけの塑性流れは、金属材料などの塑性とは全く異なった機構、すなわち内部ひびわれの増大によるものである。しかし、コンクリートがガラスやセラミックと異なる点は、コンクリートの場合には生ずるひびわれが一つに限定されず、⁶²⁾応力集中の領域に多数のひびわれを生ずることである。

Glucklich によれば、コンクリートでは破壊過程において多数のひびわれが生ずることから、ひびわれとエネルギーとの関係は、Griffith の示す図10のようではなく、図11(引張応力正)のようになるとしている。すなわち、コンクリートではひびわれが発達するにつれて応力集中の領域が増大し、その領域に多数のひびわれが生ずることにより、表面エネルギーに関連する等価なエネルギー吸収率 (W) は、図10のように直線ではなく、ひびわれ長により増加するこう配をもつ曲線で表わされる。ここで、 c_0 の初期ひびわれは、応力 σ_0 で発達を始めるが、 W の増加により長さ c_1 で拘束されてしまう。さらに応力が σ_1 となると、ひびわれは c_2 まで成長する。このようにして応力の増大につれてひびわれは成長し、 W のこう配が一定となった応力レベルでひびわれは急激に成長する。Glucklich は、

図10 Griffith 説

図11 Glucklich 説

この限界を G_c 、すなわち限界ひずみエネルギー解放率としている。ここで注意すべきことは、Glucklich の考えるコンクリートに対する G_c は、単一ひびわれの伝ばに対して考えられた Griffith-Irwin の定義とは異なり、多数のひびわれを含む領域を対象としているため、 G_c を定量的に直接エネルギーと結びつけることが可能かどうか問題がある。

圧縮応力域では、破壊がポアソン効果による水平引張ひびわれによるもので、引張破壊とある程度類似の関係にあるものと考えられるが、伝ばするひびわれの拘束が引張り域の試験に比してはるかに大となり、ひびわれ伝ばから崩壊に至るまでの応力再分配の過程が長くなる。

Griffith-Irwin の概念をコンクリートに適用しようとする試みとして、切欠きをもつ供試体の曲げ試験あるいは直接引張試験などから、Glucklich の考えた限界ひずみエネルギー解放率 G_c あるいは限界の応力強度係数 K_c を求めたものもある。

Kaplan⁶³⁾ は、種々の切欠きをもつ供試体の曲げ試験を行ない、 G_c を求めている。これによると G_c は、はり高さに対する切欠き深さ比にはあまり関係せず、ほぼ $0.06 \sim 0.16 \text{ lb/in}$ である。またこれらの値は、一つのひびわれが伝ばするとして、トベルモライトゲルおよび骨材の表面エネルギーをもとに算定した値の10倍以上となる、ことなどを述べている。

Romualdi⁶⁴⁾ らは、中央に軸直角方向のスリットをもつスラブの引張試験から G_c を求め、ばらついてはいるが $0.03 \sim 0.07 \text{ lb/in}$ であり、Kaplan の求めた値よりはるかに小さいことを述べている。

Naus⁶⁵⁾ らは、コンクリートの組成と G_c とを結びつけることを試み、セメントペースト、モルタル、コンクリートについて、切欠きをもつ供試体の曲げ試験から、応力強度係数 K_c を求めている。これによると、(1) K_c は水セメント比には関係せず、材令とともに増大する、(2) モルタルでは砂セメント比の増加につれて増大する、(3) コンクリートでは砂セメント比の増加よりも、むしろ最大骨材寸法の増加につれて、また粗骨材セメント比の増加につれて増大する、などの結論を報告している。

Moavenzadeh⁶⁶⁾ らは、セメントペースト、モルタルおよびコンクリートの曲げ試験をもとに、種々の方法で G_c を求め、(a) 得られた γ の値は、トベルモライトの γ から予想されるより1オーダー高いこと、(b) セメントペースト→モルタル→コンクリートと、インクルージョンが増加するにつれて破壊に必要なエネルギーすなわちタフネスは増加するが、真の表面エネルギーはほとんど変わらないことなどを報告している。

4 あとがき

コンクリートは、セメントペースト（あるいはモルタル）をマトリックスとし、インクルージョンとして（細）粗骨材を含む多相材料である。このコンクリートの破壊は、マトリックスの性質のみならず、定量化が困難なマトリックスとインクルージョンの界面の性質に支配されるため、それと関連する強度を、破壊機構から明確に定量化することは、非常に困難である。

本文は、前半に、時間効果の卓越しないと考えられる一般の静的試験の下でのコンクリートの破壊を、巨視的に取り扱った場合の破壊条件について述べ、またこのような巨視的破壊に関する現在までの研究の概略を示した。巨視的破壊条件としては、最も一般的なものが破壊曲面であるが、高静水圧のもとなどで時間効果を無視し得ない場合、あるいは履歴を考慮しなければならない場合には、破壊曲面は三主応力空間内で一義的には定め得ない。これらの場合については、今後さらに検討すべき問題である。また、引張りを含む領域では、破壊過程が圧縮域ほど安定ではないため、組合せ応力下の破壊曲面については、なお実験的な検討が必要であると考えられる。

また本文後半では、巨視的破壊条件と対照的に、機構的な立場からコンクリートの破壊を考えた研究のアプローチについての概略を示した。コンクリートでは、骨材—マトリックス間のボンドひびわれが進展して、マトリックス間に進展し、崩壊に至るわけであるが、この破壊の過程を定量的に明確にすることができれば、巨視的破壊条件を微視的破壊の観点から説明づけることが可能となる。このような試みは、規則配列のインクルージョンをもつ二相材料と考えたコンクリートのモデル化や、ボンド性状の検討など各方面から行なわれており、今後この方面での成果が期待される。

この微視的破壊から巨視的破壊への定量的な結びつけは、現在では困難であるが、コンクリートの崩壊に至るまでの破壊過程を量的には握することは、今後の大きな研究課題であろう。

参 考 文 献

- 1) 近藤泰夫, 坂 静雄 監修, “コンクリート工学ハンドブック”, p. 328 (1965) 朝倉書店
- 2) 丹羽義次, 小林昭一, 材料, **16**, 1 (1967).
- 3) Nadai, A., “Theory of Flow and Fracture of Solids, I” (1950) McGraw-Hill
- 4) Freudenthal, A. M., Proc. 1st U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 641 (1951).
- 5) Griffith, A. A., Phil. Trans. Roy. Soc., **A221**, 163 (1921).
- 6) Sack, R. A., Proc. Phys. Soc. London, **58**, 729 (1946).
- 7) Griffith, A. A., Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech., 55 (1924).
- 8) McClintock, F. A., and J. B. Walsh, Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1015 (1962).

- 9) 丹羽義次, 小林昭一, *ibid* 2).
- 10) 丹羽義次, 小柳 治, 小林昭一, 土木学会論文集, **143**, 28 (1967).
- 11) 小林昭一, 小柳 治, 材料, **16**, 897 (1967).
- 12) Dantu, P., Annales de l'Institut Technique de Bâtiment et des Travaux Publics, **11**, No.121, 55 (1958).
- 13) Vile, G.W.D., Proc. Int. Conf. Structure of Concrete, London 1965, p.275 (1968) Cement & Concrete Association
- 14) Richart, F.E., A. Brandzaeg, and R. Brown, Bull. 185, Eng. Exp. Sta., Univ. of Illinois (1928).
- 15) Wästlund, G., Särtryck ur Betong, **3**, 1 (1937).
- 16) Glomb, J., 3rd Congr. FIP, Berlin, p.3 (1958).
- 17) Bellamy, C.J., Jour. Am. Conc. Inst., Proc. **58**, No. 4, 367 (1961).
- 18) Weigler, H., und G.Becker, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ausschuss H. 157 (1963).
- 19) Robinson, G.S., Proc. ASCE, **91**, ST.1, 71 (1967).
- 20) Sundara Raja Iyenger, K. T., K Chandrashekhara, and K.T. Krishnaswamy, Jour. ACI, Proc. **62**, No. 2, 239 (1965).
- 21) Берг, О.Я. и Н.В. Смирнов, Ветон и железобетон, No.11, 34 (1965).
- 22) Schröder, S., und H. Opitz, Bauplanung-Bautechnik, **22**, H. 4, 190 (1968).
- 23) Kupfer, H., H. K. Hilsdorf, and H. Rusch, Jour. ACI Proc. **66**, No. 8, 656 (1969).
- 24) たとえば, Niwa, Y., S. Kobayashi, and K. Nakagawa, Memo. Facul. Eng, Kyoto Univ., **31**, Part 1, 1 (1969); 丹羽義次, 小林昭一, 中川浩二, 材料, **19**, 63 (1970).
- 25) Balmer, G.G., Bureau of Reclamation Rep. No. SP-23 (1949).
- 26) 伊藤茂富, 坂口治朗, 建設省土木研究所報告, **100**, 93 (1958).
- 27) Akroyd, T.N.W., Mag. Conc. Res., **13**, No.39, 111 (1961).
- 28) Krisbnaswamy, K.T., Jour. ACI, Proc., **65**, No.10, 856 (1968).
- 29) Newman, K., Proc. Int. Conf. Structure of Concrete, London 1965, p.xiii (1968) Cem. Conc. Ass.
- 30) 小林昭一, Private Communication.
- 31) 西沢紀昭, セメント技術年報, **15**, 242 (1961).
- 32) Smith, G.M., Jour. ACI, Proc. **50**, No.2, 137 (1953).
- 33) Hatano, T., S. Seki, and N. Nishizawa, 8th Int. Conf. Large Dams, Edinburgh, V.3, 95 (1964).
- 34) McHenry, D., and J. Karni, Jour. ACI, Proc. **54**, No.10, 829 (1958).
- 35) 小柳 治, 小林昭一, 井上義之, 山本和夫, セメント技術年報, **21**, 217 (1967).
- 36) Bresler, B., and K.S. Pister, Jour. ACI, Proc. **55**, No.3, 321 (1958).
- 37) Goode, C. D., and M.A. Helmy, Mag. Conc. Res., **19**, No.59, 105 (1967).
- 38) たとえば Cowan, H.J., Mag. Conc. Res., **5**, No.14, 75 (1953).
- 39) 丹羽義次, 小林昭一, 小柳 治, 平島健一, セメント技術年報, **21**, 225 (1967).
- 40) *ibid* 1) p.31.
- 41) 畑野 正, 土木学会論文集, **4**, 117 (1949); **6**, 1 (1951).
- 42) 丹羽義次, 小林昭一, 下河内 稔, セメント技術年報, **20**, 226 (1966).
- 43) 畑野 正, 土木学会論文集, **143**, 22 (1967); **153**, 31 (1968).
- 44) Bieniawski, Z.T., Int. Jour. Rock Mech. Min. Sci., **4**, 395 (1967).
- 45) Kenny, P., and J.D. Campbell, "Progress in Materials Science," **13**, No.3 (1967) Pergamon Press
- 46) Irwin, G. R., Am. Soc. Metals, Cleveland, p.147 (1948).
- 47) Orowan, E., MIT Symp. (1950); p.139 (1952) John Wiley & Sons
- 48) Irwin, G. R., "Structural Mechanics", Ed. J.N. Goodier, and N.T. Hoff, p.557 (1960) Pergamon Press
- 49) Kaplan, M.F., Proc. Int. Conf. Structure of Concrete, London 1965, p.169 (1968) Cem. Conc. Ass.
- 50) Irwin, G.R., Jour. Appl. Mech., **24**, No.3, 361 (1957).
- 51) Robinson, G. S., Proc. Int. Conf. Structure of Concrete, London 1965, p.131 (1968) Cem. Conc. Ass.
- 52) Richart, F., A. Brandzaeg, and R. Brown, Bull. No. 190, Eng. Exp. Sta., Univ. of Illinois (1929).
- 53) Shar, S.P., and S. Chandra, Jour. ACI, Proc. **65**, No.9, 770 (1968).
- 54) Jones, R., British Jour. Appl. Physics, **3**, No. 7, 229 (1952).
- 55) Jones, R., and M.F. Kaplan, Mag. Conc. Res., **9**, No.26, 89 (1957).
- 56) Rüsch, H., Zement-Kalk-Gips, **12**, No. 1, 1 (1959).
- 57) 横道英雄, 池田郁雄, 松岡健一, セメントコンクリート, **212**, 2 (1964).
- 58) Slate, F. O., and S. Olsefski, Jour. ACI, Proc., **60**, No.5, 575 (1963).
- 59) Hsu, T.T.C., F.O. Slate, G. M. Sturman, and G. Winter, Jour. ACI, Proc., **60**, No.2, 209 (1963).
- 60) Popovics, S., Proc. ASCE, **95**, EM 3, 531 (1969).
- 61) Alexander, K.M., Proc. 1st Tewksbury Symp., Univ. of Melbourne, p.141 (1965).
- 62) Glucklich, J., Proc. ASCE, **89**, EM 6, 127 (1963).
- 63) Kaplan, M.F., Jour. ACI, Proc., **58**, No.5, 591 (1961).
- 64) Romualdi, J.P., and J.A. Mandel, Jour. ACI, Proc., **61**, No.6, 657 (1964).
- 65) Naus, D.J., and J.A. Lott, Jour. ACI, Proc., **64**, No. 6, 481 (1967).
- 66) Moavenzadeh, F., and R. Kuguel, Jour. Materials, **4**, No.3, 492 (1969).