異方性粘弾性体に対するレオロジー方程式とその応用*

桜 井 春 輔**

Rheological Equation of Anisotropic Viscoelastic Material and its Application to Problems Pertinent to Rock Mechanics

by

Shunsuke SAKURAI

(Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe)

It has been suggested that the rheological equation of anisotropic viscoelastic material should be expressed in the form of differential equation, and its differential operators can be determined by consideration of Biot's equation derived on the basis of irreversible thermodynamics. The differential equation is given in two different forms, one of which is applicable to the analysis of relaxation phenomenon, and the other is to the creep analysis. There exist some relations among the differential operators in the two different forms of the equation.

The correspondence principle proposed by Lee can be extended to the anisotropic case by introducing into it the suggested rheological equation. The extended correspondence principle has been adopted to making the analysis of the creep strain of orthotropic viscoelastic material under the plane strain condition, and its results may be applied to determining the viscoelastic constants of the material through experimental data. Discussion has also been made on the analysis of a circular tunnel subjected to uniformly distributed internal pressure in an orthotropic viscoelastic medium.

(Received Oct. 7, 1970)

1 緒 言

き裂や節理を含む基礎岩盤が異方性を示す場合のあることは良く知られており、その力学的解析には岩盤を異方性の弾性体として取扱うと都合がよい。異方性地盤内の応力解析は土質基礎を対象として古くから行なわれている¹⁾²⁾。また、ダム基礎地盤を直交異方性体と仮定し、二次元弾性論によって解析を行なった研究³⁾、さらには、直交異方性地山内のトンネル周辺の応力状態⁴⁾、または変位に関する研究⁵⁾⁶⁾なども発表されている。しかし、岩盤はクリープなどの時間に依存する力学特性を持っているのが普通であり、それを無視できない場合にしばしば出会う。特に粘土層を含む岩盤においては、それを巨視的にみた場合、直交異方性の粘弾性体として解析を行なうのが妥当であろう。しかし、地山を異方性の粘弾性体と考えた解析はまだ発表されていないように思われる。

したがって、本論文においては、まず、異方性粘弾性体に対するレオロジー方程式について考察を行ない、さらに、境界値問題の解を得るために Lee が提案した弾性解との対応原理 (Correspondence principle)

を異方性体に拡張し、その応用例として岩盤力学に関する二、三の問題について解析を行なう。

2 異方性粘弾性体に対するレオロジー方程式

一般に、線形粘弾性材料に対するレオロジー方程式は、Boltzmann の重ね合せの原理を用いて現象論的に、つぎのようなくみ積分 (Convolution integral) ⁸⁾によって表わすことができる。

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1)$$

ここで、 G_{ijkl} は 4 階のテンソルであって、材料の緩和関数テンソルと呼ばれるものである。 σ_{ij} 、 ϵ_{kl} はそれぞれ応力およびひずみテンソルを表わす。なお、積分の下限が $-\infty$ であるのは、積分を運動の開始以前からとることを意味している。また、ひずみを応力で表わせばつぎのようになる。

$$\epsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

ここで、 J_{ijkl} はクリープ関数テンソルと呼ばれるものである。

(1)、(2)式を Laplace 変換すればつぎのようになる。ただし $t < 0$ において $\sigma_{ij} = \epsilon_{ij} = 0$ とする。

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \bar{G}_{ijkl}(s) s \bar{\epsilon}_{kl}(s) \quad (3)$$

* 原稿受理 昭和45年10月7日

** 正 会 員 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(s) = \bar{J}_{ijkl}(s) s \bar{\sigma}_{kl}(s) \quad (4)$$

ここで、バーはそれぞれの関数に対する Laplace 変換を示す。すなわち、

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (5)$$

(3), (4)式から $\bar{G}_{ijkl}(s)$ と $\bar{J}_{ijkl}(s)$ の間にはつぎの関係が存在することが明らかである。

$$\bar{J}_{ijkl}(s) \bar{G}_{klpq}(s) = \begin{cases} 1/s^2 (ij=pq) \\ 0 (ij \neq pq) \end{cases} \quad (6)$$

あるいは次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) G_{klpq}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t G_{klpq}(t-\tau) J_{ijkl}(\tau) d\tau \\ &= \begin{cases} t (ij=pq) \\ 0 (ij \neq pq) \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

これは緩和関数テンソルとクリープ関数テンソルの間の関数式であり、それらが独立に決定できないことを示している。

一方、線形粘弾性材料に対するレオロジー方程式はつぎのような微分の形で表わすこともできる。すなわち、

$$P_{(ij)}(t) \sigma_{ij} = Q_{ijkl}(t) \varepsilon_{kl} \quad (8)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} P_{(ij)}(t) &= \sum_{k=0}^m a^{(k)}_{(ij)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \\ Q_{ijkl}(t) &= \sum_{k=0}^n b^{(k)}_{ijkl} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$a^{(k)}_{(ij)}$, $b^{(k)}_{ijkl}$ は材料によって定まる正の実数である。なお、添字に対する () は、その添字の繰返しが総和を意味しないことを示す。

(8)式の両辺に Laplace 変換を施せばつぎのようになる。

$$\begin{aligned} & \bar{P}_{(ij)}(s) \bar{\sigma}_{ij}(s) - \sum_{k=1}^m a^{(k)}_{(ij)} \left\{ s^{k-1} \sigma_{ij}(0) + s^{k-2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t}(0) \right. \\ & \quad \left. + \dots + \frac{\partial^{k-1} \sigma_{ij}}{\partial t^{k-1}}(0) \right\} \\ &= \bar{Q}_{ijkl}(s) \bar{\varepsilon}_{kl}(s) - \sum_{k=1}^n b^{(k)}_{ijkl} \left\{ s^{k-1} \varepsilon_{kl}(0) + s^{k-2} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}(0) \right. \\ & \quad \left. + \dots + \frac{\partial^{k-1} \varepsilon_{kl}}{\partial t^{k-1}}(0) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、

$$\bar{P}_{(ij)}(s) = \sum_{k=0}^m a^{(k)}_{(ij)} s^k, \quad \bar{Q}_{ijkl}(s) = \sum_{k=0}^n b^{(k)}_{ijkl} s^k \quad (11)$$

いま、初期条件の間に、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m a^{(k)}_{(ij)} \left\{ s^{k-1} \sigma_{ij}(0) + s^{k-2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t}(0) \right. \\ & \quad \left. + \dots + \frac{\partial^{k-1} \sigma_{ij}}{\partial t^{k-1}}(0) \right\} \\ & - \sum_{k=1}^n b^{(k)}_{ijkl} \left\{ s^{k-1} \varepsilon_{kl}(0) + s^{k-2} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}(0) \right\} \end{aligned}$$

$$+ \dots + \frac{\partial^{k-1} \varepsilon_{kl}}{\partial t^{k-1}}(0) \Big\} = 0 \quad (12)$$

なる関係があるときはつぎの式を得る。

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \frac{\bar{Q}_{ijkl}(s)}{\bar{P}_{(ij)}(s)} \bar{\varepsilon}_{kl}(s) \quad (13)$$

したがって、

$$\bar{G}_{ijkl}(s) = \bar{Q}_{ijkl}(s) / s \bar{P}_{(ij)}(s) \quad (14)$$

とすれば、(13)式はつぎのように表わされる。

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \bar{G}_{ijkl}(s) s \bar{\varepsilon}_{kl}(s) \quad (15)$$

なお、(13)式において Laplace の逆変換が常に存在するためには $m \geq n$ でなければならない。そして、(15)式を(3)式と比較することによって明らかのように、この場合にかぎり、(8)式に示す微分形式のレオロジー方程式は緩和関数テンソルを用いて(1)式のように表わすことができる。

(12)式の初期条件間の関係式は s の多項式による恒等式であり、したがって多項式の各係数は零でなければならない。いま $m=n$ ($m \neq n$ の場合は適当に $a^{(k)}_{(ij)}$ あるいは $b^{(k)}_{ijkl}$ を零と考える) であれば、

$$\begin{aligned} & a^{(n)}_{(ij)} \sigma_{ij}(0) = b^{(n)}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(0) \\ & a^{(n)}_{(ij)} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t}(0) + a^{(n-1)}_{(ij)} \sigma_{ij}(0) \\ &= b^{(n)}_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}(0) + b^{(n-1)}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(0) \\ & \dots \dots \dots \\ & a^{(n)}_{(ij)} \frac{\partial^{n-1} \sigma_{ij}}{\partial t^{n-1}}(0) + a^{(n-1)}_{(ij)} \frac{\partial^{n-2} \sigma_{ij}}{\partial t^{n-2}}(0) + \dots \dots \\ &+ a^{(1)}_{(ij)} \sigma_{ij}(0) \\ &= b^{(n)}_{ijkl} \frac{\partial^{n-1} \varepsilon_{kl}}{\partial t^{n-1}}(0) + b^{(n-1)}_{ijkl} \frac{\partial^{n-2} \varepsilon_{kl}}{\partial t^{n-2}}(0) + \dots \dots \\ &+ b^{(1)}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(0) \end{aligned} \quad (16)$$

もし、 $t=0$ において

$$\varepsilon_{kl} = \partial \varepsilon_{kl} / \partial t = \dots = \partial^{n-1} \varepsilon_{kl} / \partial t^{n-1} = 0 \quad (17)$$

であれば、(16)式は

$$\sigma_{ij} = \partial \sigma_{ij} / \partial t = \dots = \partial^{n-1} \sigma_{ij} / \partial t^{n-1} = 0 \quad (18)$$

を意味する。しかし、その逆は成立しない。すなわち、 $t=0$ において(18)式が成立する場合、必ずしも(17)式が満足される必要はなく、つぎの関係が存在すればよい。

$$\left. \begin{aligned} & b^{(n)}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(0) = 0 \\ & b^{(n)}_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}(0) + b^{(n-1)}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(0) = 0 \\ & \dots \dots \dots \\ & b^{(n)}_{ijkl} \frac{\partial^{n-1} \varepsilon_{kl}}{\partial t^{n-1}}(0) + b^{(n-1)}_{ijkl} \frac{\partial^{n-2} \varepsilon_{kl}}{\partial t^{n-2}}(0) + \dots \dots \\ &+ b^{(1)}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

(19)式は、 $\varepsilon_{kl}(0)$, $\partial \varepsilon_{kl} / \partial t(0)$, $\dots$, $\partial^{n-1} \varepsilon_{kl} / \partial t^{n-1}(0)$ に関する連立一次方程式であり、さらに斉次方程式であるため、係数行列の行列式が零のときに(17)式以外の解を持つことになる。

(8)式に示すレオロジー方程式はつぎのように表わすこともできる。

$$Q^*_{(ij)}(t)\varepsilon_{ij}=P^*_{ijkl}(t)\sigma_{kl} \quad (20)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} Q^*_{(ij)}(t) &= \sum_{k=0}^n c^{(k)}_{(ij)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \\ P^*_{ijkl}(t) &= \sum_{k=0}^m d^{(k)}_{ijkl} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$c^{(k)}_{(ij)}$, $d^{(k)}_{ijkl}$ は正の実数である. この場合も先に述べたと同様にして, (2)式に相当する初期条件のもとで

$$\bar{J}_{ijkl}(s) = \bar{P}^*_{ijkl}(s)/s\bar{Q}^*_{(ij)}(s) \quad (22)$$

とすれば, (20)式は

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(s) = \bar{J}_{ijkl}(s)s\bar{\sigma}_{kl}(s) \quad (23)$$

となる. ただし,

$$\bar{Q}^*_{(ij)}(s) = \sum_{k=0}^n c^{(k)}_{(ij)} s^k, \quad \bar{P}^*_{ijkl}(s) = \sum_{k=0}^m d^{(k)}_{ijkl} s^k \quad (24)$$

この場合も Laplace の逆変換が常に可能であるためには $n \geq m$ でなければならない. (23)式を(4)式と比較すれば明かなように, (20)式に示すレオロジー方程式はクリープ関数テンソルを用いて(2)式のように表わすことができる.

なお, (14), (22)式を(6)式に代入すれば

$$\frac{\bar{P}^*_{ijkl}(s)\bar{Q}^*_{klpq}(s)}{\bar{Q}^*_{(ij)}(s)\bar{P}^*_{(kl)}(s)} = \begin{cases} 1, & (ij=pq) \\ 0, & (ij \neq pq) \end{cases} \quad (25)$$

なる関係を得る.

以上の考察から明かなように, 線形粘弾性体のレオロジー方程式は一般に微分形で表わされ, そのうちある条件を満足するものは緩和形式あるいはクリープ形式によって(1)式または(2)式のような積分の形で表わされる. したがって, 一般的には, (8)式あるいは(20)式に示すような微分形で表わすのがよいであろう. なお, (8)式および(20)式に示すレオロジー方程式は表現が異なるが内容は同一であり, 実用上の都合によっていずれを用いるかを決定すればよい.

つぎに, (9)式および(24)式に示すオペレータについて考察を行なう. もちろん, これらは実験値と最も合うように定めればよいわけであるが, その場合はこれらのオペレータの物理的根拠は不明である.

Biot⁽¹⁰⁾ は材料内部の観測不可能な現象を表わす潜在変数 (Hidden variable) を考慮し, 非可逆熱力学によって必然的につぎのようなレオロジー方程式を誘導した.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (26)$$

ここで,

$$C_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{pD^{(\alpha)}_{ijkl}}{p + \lambda_{\alpha}} + D_{ijkl} + pD'_{ijkl}, \quad \left(p = \frac{\partial}{\partial t}\right) \quad (27)$$

$D^{(\alpha)}_{ijkl}$, D_{ijkl} , D'_{ijkl} , λ_{α} は材料によって定まる定数である. なお, n は潜在変数の数を表わす. この方程式は Fig. 1(a) に示すような n 個の Maxwell 模型と Kelvin 模型を並列につないだ一般化した Maxwell 模型によって表わされることを示している. いま, 潜

Fig. 1. The generalized Maxwell model (a) and the generalized Kelvin model (b).

変数が存在しないと仮定すれば, (27)式の右辺第1項は省略され, したがってレオロジー方程式は形式的に Kelvin 模型によって表わされることになる.

一方, 同材料に対するレオロジー方程式をクリープ形で表わせばつぎのようになる.

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (28)$$

ここで,

$$A_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{B^{(\alpha)}_{ijkl}}{p + \lambda'_{\alpha}} + B_{ijkl} + \frac{B'_{ijkl}}{p}, \quad \left(p = \frac{\partial}{\partial t}\right) \quad (29)$$

$B^{(\alpha)}_{ijkl}$, B_{ijkl} , B'_{ijkl} , λ'_{α} は定数である. (29)式の右辺第1項は潜在変数の影響を表わす. この場合, 応力-ひずみ関係は Fig. 1(b) に示すような n 個の Kelvin 模型と Maxwell 模型を直列につないだ一般化した Kelvin 模型によって表わされることがわかる. いま, 潜在変数を無視すれば, レオロジー方程式は形式的に Maxwell 模型によって表わされることが明らかである. なお, Bland⁽¹¹⁾ も材料の微視的構造に着目し, 力学的考察によって Biot と同じ結果を得ている.

したがって, Biot あるいは Bland の結果を考慮すれば, (8)式のレオロジー方程式において $P_{(ij)}(t)$ および $Q_{ijkl}(t)$ は最も簡単なつぎのように表わすことができる.

$$P_{(ij)}(t) = 1, \quad Q_{ijkl}(t) = b^{(1)}_{ijkl} \frac{\partial}{\partial t} + b^{(0)}_{ijkl} \quad (30)$$

また, 潜在変数1個を考慮すれば, 形式的につぎの式を得る.

$$P_{(ij)}(t) = \frac{\partial}{\partial t} + a^{(0)}_{(ij)},$$

$$Q_{ijkl}(t) = b^{(2)}_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b^{(1)}_{ijkl} \frac{\partial}{\partial t} + b^{(0)}_{ijkl} \quad (31)$$

一方, (20)式のクリープ形式のレオロジー方程式においては,

$$Q^*_{(ij)}(t) = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P^*_{ijkl}(t) = d^{(1)}_{ijkl} \frac{\partial}{\partial t} + d^{(0)}_{ijkl} \quad (32)$$

が最も簡単な場合であり, 潜在変数1個を考慮すれば

形式的に次式を得る.

$$Q^*_{(ij)}(t) = \partial^2/\partial t^2 + c^{(1)}_{(ij)}\partial/\partial t, \\ P^*_{ijkl}(t) = d^{(2)}_{ijkl}\partial^2/\partial t^2 + d^{(1)}_{ijkl}\partial/\partial t + d^{(0)}_{ijkl} \quad (33)$$

なお、さらに複雑なレオロジー方程式も容易に求めることができる。ただし $Q_{ijkl}(t)$ は 4 階のテンソルであり、81 の要素を有するが、応力およびひずみの対称性を考慮すれば結局 36 の異なる要素を有することがわかる。また、直交異方性体に対してその数は 12 となり、さらに等方性体については 2 となる。すなわち、等方性の場合にはつぎの関係がある。

$$\left. \begin{aligned} Q_{1122}(t) &= Q_{2211}(t) = Q_{1133}(t) = Q_{3311}(t) \\ &= Q_{2233}(t) = Q_{3322}(t) = c'(t) \\ Q_{1212}(t) &= Q_{2323}(t) = Q_{1313}(t) = c''(t) \\ Q_{1111}(t) &= Q_{2222}(t) = Q_{3333}(t) = c'(t) + 2c''(t) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

その他の $Q_{ijkl}(t)$ は零となる。

なお、等方性体に対するレオロジー方程式は形状変化と体積変化が互いに独立であるとし、つぎのように表わすと都合のよい場合がある。

$$\left. \begin{aligned} P(t)\sigma'_{ij} &= Q(t)\epsilon'_{ij} \\ P'(t)\sigma_{ii} &= Q'(t)\epsilon_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここで、 σ'_{ij} 、 ϵ'_{ij} はそれぞれ偏差応力と偏差ひずみを、また $P(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $P'(t)$ 、 $Q'(t)$ は時間に関するオペレータを表わす。いま、(35)式を(8)式のように表わすすれば、(34)式に示す $c'(t)$ 、 $c''(t)$ はつぎの値をとる。

$$\left. \begin{aligned} c'(t) &= -\{Q(t) - P(t)Q'(t)/P'(t)\}/3 \\ c''(t) &= Q(t)/2 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

一方、 P^*_{ijkl} についても上と同様の考察を行なうことができる。

(30)~(33)式に示すオペレータに含まれる各定数は材料内部に潜在する成分の性質に着目して直接測定する必要はなく、材料の巨視的な挙動から求めることができる。

岩盤を対象とする場合には、き裂などに起因する材料内部の測定不可能な現象を無視することができないであろう。したがって、ここで述べた Biot の潜在変数による考察結果の適用はそれほど無理のないものと思われる。

以上の考察によって、(8)式および(20)式に示すレオロジー方程式は物理的根拠を持って必然的に誘導されることになり、したがって、現象論的に導かれた(1)式および(2)式のレオロジー方程式より優れていることがわかる。

3 異方性弾性問題との対応原理

いま、対象とする問題を変形がゆるやかであり、したがって慣性の影響が無視できるような、いわゆる準静的問題 (Quasi-static problem) に限定する。この場合、粘弾性体に対する基礎方程式は、その式に含まれる変数をすべて Laplace 変換することによりつ

ぎのように表わすことができる。ただし、(8)式および(20)式に示すレオロジー方程式を考慮し、(8)式に対しては(12)式の初期条件、また、(20)式に対しても(12)式に相当する初期条件が成立するものとする。

$$\text{つりあい方程式} : \bar{\sigma}_{ij,j}(x_k, s) + \bar{X}_i = 0 \quad (37)$$

$$\text{ひずみ-変位関係式} : \bar{\epsilon}_{ij}(x_k, s) = (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})/2 \quad (38)$$

応力-ひずみ関係式 :

$$\bar{P}_{(ij)}(s)\bar{\sigma}_{ij}(x_k, s) = \bar{Q}_{ijkl}(s)\bar{\epsilon}_{kl}(x_k, s) \quad (39)$$

$$\text{あるいは、} \bar{Q}^*_{(ij)}(s)\bar{\epsilon}_{ij}(x_k, s) = \bar{P}^*_{ijkl}(s)\bar{\sigma}_{kl}(x_k, s) \quad (40)$$

$$\text{境界条件} : \bar{T}_i(x_k, s) = \bar{\sigma}_{ij}(x_k, s)n_j(x_k) \quad (41)$$

ここで、バーはそれぞれの関数に対する Laplace 変換を表わす。なお、 X_i は物体力、 $\bar{u}_i$ は変位、 n_i は境界面に立てた法線方向余弦であり、 T_i はその点の外力を示す。また、コンマのあとの指標 j は x_j に関する偏微分を意味する。

これらの式は弾性学における基礎方程式と同型のものである。ただし、応力-ひずみ関係式が異なっているが、(39)、(40)式を

$$\bar{\sigma}_{ij}(x_k, s) = \bar{Q}_{ijkl}(s)\bar{\epsilon}_{kl}(x_k, s)/\bar{P}_{(ij)}(s) \quad (42)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}(x_k, s) = \bar{P}^*_{ijkl}(s)\bar{\sigma}_{kl}(x_k, s)/\bar{Q}^*_{(ij)}(s) \quad (43)$$

のように変形し、一方、異方性弾性体に対する一般化した Hooke の法則が

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (E_{ijkl} : \text{定数}) \quad (44)$$

$$\epsilon_{ij} = Y_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (Y_{ijkl} : \text{定数}) \quad (45)$$

のように表わされるとすれば、これらの関係も同型のものであることがわかる。

結局、粘弾性問題は弾性問題に帰着できる。すなわち、まず弾性解を求め、それに Laplace 変換を施し、つぎにその解に含まれる弾性係数 E_{ijkl} あるいは Y_{ijkl} をそれぞれ $\bar{Q}_{ijkl}(s)/\bar{P}_{(ij)}(s)$ と $\bar{P}^*_{ijkl}(s)/\bar{Q}^*_{(ij)}(s)$ によって置換え、最後に Laplace の逆変換を行なえば粘弾性問題に対する解を得ることができる。この解法は Lee によって提案された対応原理を異方性体に拡張したものである。

つぎに、この解法によって二、三の問題を解き、レオロジー方程式に対する若干の考察を行なう。

4 応 用 例

4.1 平面ひずみ状態におけるクリープひずみ

平面ひずみ状態 ($\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$) においてつぎのような応力状態を考える。

$$\sigma_x = \sigma_{x0}u(t), \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (46)$$

ここで、 σ_x 、 σ_y はそれぞれ x および y 方向の垂直応力、 τ_{xy} はせん断応力を表わす。なお、 σ_{x0} は定数、 $u(t)$ は単位ステップ関数である。

いま、材料に対するレオロジー方程式は(8)式によって与えられるものと仮定する。ただし、 $P_{(ij)}(t)$ 、 $Q_{ijkl}(t)$ を

$$\left. \begin{aligned} P_{(ij)}(t) &= \partial/\partial t + a^{(0)}_{(ij)} \\ Q_{ijkl}(t) &= b^{(1)}_{ijkl} \partial/\partial t + b^{(0)}_{ijkl} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

とする。これは、時間に依存する材料特性が潜在変数のみに起因すると仮定し、(31)式において $b^{(2)}_{ijkl} = 0$ とした場合である。

さらに、材料は直交異方性体であるとし、その主軸が座標と一致するとすれば、二次元平面ひずみ状態に対するレオロジー方程式としてつぎの式を得る。

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + a^{(0)}_{(11)} \right) \sigma_x \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t} + a^{(0)}_{(22)} \right) \sigma_y \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t} + a^{(0)}_{(12)} \right) \tau_{xy} \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} b^{(1)}_{1111} \frac{\partial}{\partial t} + b^{(0)}_{1111} & b^{(1)}_{1122} \frac{\partial}{\partial t} + b^{(0)}_{1122} & 0 \\ b^{(1)}_{2211} \frac{\partial}{\partial t} + b^{(0)}_{2211} & b^{(1)}_{2222} \frac{\partial}{\partial t} + b^{(0)}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & b^{(1)}_{1212} \frac{\partial}{\partial t} + b^{(0)}_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

一方、(48)式に示す条件のもとでの、 x および y 軸方向のひずみの弾性解はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= c_{22} \sigma_{x0} u(t) / (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) \\ \varepsilon_y &= -c_{21} \sigma_{x0} u(t) / (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

ここで、 c_{11} , c_{22} , c_{12} , c_{21} はつぎに示す応力-ひずみ関係における弾性係数である。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

ここで対応原理を用いる。すなわち、(49)式の両辺に Laplace 変換を施し、弾性係数を $\bar{Q}_{ijkl}(s)/\bar{P}_{(ij)}(s)$ によって置き換える。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x(s) &= \frac{\bar{Q}_{2222}(s)}{\bar{P}_{(22)}(s)} \sigma_{x0} / \left(\frac{\bar{Q}_{1111}(s)}{\bar{P}_{(11)}(s)} \frac{\bar{Q}_{2222}(s)}{\bar{P}_{(22)}(s)} - \frac{\bar{Q}_{1122}(s)}{\bar{P}_{(11)}(s)} \frac{\bar{Q}_{2211}(s)}{\bar{P}_{(22)}(s)} \right) s \\ \bar{\varepsilon}_y(s) &= -\frac{\bar{Q}_{2211}(s)}{\bar{P}_{(22)}(s)} \sigma_{x0} / \left(\frac{\bar{Q}_{1111}(s)}{\bar{P}_{(11)}(s)} \frac{\bar{Q}_{2222}(s)}{\bar{P}_{(22)}(s)} - \frac{\bar{Q}_{1122}(s)}{\bar{P}_{(11)}(s)} \frac{\bar{Q}_{2211}(s)}{\bar{P}_{(22)}(s)} \right) s \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

ここで、 $\bar{Q}_{ijkl}(s)/\bar{P}_{(ij)}(s)$ は(49)式の両辺に Laplace 変換を施すことによりつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{1111}(s)/\bar{P}_{(11)}(s) &= (b^{(1)}_{1111}s + b^{(0)}_{1111}) / (s + a^{(0)}_{(11)}) \\ \bar{Q}_{2222}(s)/\bar{P}_{(22)}(s) &= (b^{(1)}_{2222}s + b^{(0)}_{2222}) / (s + a^{(0)}_{(22)}) \\ \bar{Q}_{1122}(s)/\bar{P}_{(11)}(s) &= (b^{(1)}_{1122}s + b^{(0)}_{1122}) / (s + a^{(0)}_{(11)}) \\ \bar{Q}_{2211}(s)/\bar{P}_{(22)}(s) &= (b^{(1)}_{2211}s + b^{(0)}_{2211}) / (s + a^{(0)}_{(22)}) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

(52)式を(51)式に代入し、Laplace の逆変換を行なえば、 ε_x および ε_y の経時の変化を求めることができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (A + Ce^{-\lambda_1 t} + Ee^{-\lambda_2 t}) \sigma_{x0} \\ \varepsilon_y &= -(F + Ge^{-\lambda_1 t} + He^{-\lambda_2 t}) \sigma_{x0} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2 &= \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \\ \alpha &= \frac{b^{(1)}_{2222} b^{(0)}_{1111} + b^{(0)}_{2222} b^{(1)}_{1111} - b^{(1)}_{1122} b^{(0)}_{2211}}{2(b^{(1)}_{2222} b^{(1)}_{1111} - b^{(0)}_{1122} b^{(0)}_{2211})} \\ \beta^2 &= \frac{b^{(0)}_{2222} b^{(0)}_{1111} - b^{(0)}_{1122} b^{(0)}_{2211}}{b^{(1)}_{2222} b^{(1)}_{1111} - b^{(1)}_{1122} b^{(1)}_{2211}} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

なお、 A , C , E , F , G , H も $a^{(0)}_{(ij)}$, $b^{(0)}_{ijkl}$, $b^{(1)}_{ijkl}$ によって定まる定数である。ここで、ひずみは一般に単調増加（または減少）するものと考えれば $\alpha > \beta$ でなければならない。

(53)式において $t=0$ とすれば载荷と同時に生ずる弾性ひずみが求まる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x|_{t=0} &= (A + C + E) \sigma_{x0} \\ &= b^{(1)}_{2222} \sigma_{x0} / (b^{(1)}_{2222} b^{(1)}_{1111} - b^{(1)}_{1122} b^{(1)}_{2211}) \\ \varepsilon_y|_{t=0} &= -(F + G + H) \sigma_{x0} \\ &= -b^{(1)}_{2211} \sigma_{x0} / (b^{(1)}_{2222} b^{(1)}_{1111} - b^{(1)}_{1122} b^{(1)}_{2211}) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

また、 $t=\infty$ においては、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x|_{t=\infty} &= A \sigma_{x0} = a^{(0)}_{(11)} b^{(0)}_{2222} \sigma_{x0} / (b^{(0)}_{2222} b^{(0)}_{1111} - b^{(0)}_{1122} b^{(0)}_{2211}) \\ \varepsilon_y|_{t=\infty} &= -F \sigma_{x0} \\ &= -a^{(0)}_{(11)} b^{(0)}_{2211} \sigma_{x0} / (b^{(0)}_{2222} b^{(0)}_{1111} - b^{(0)}_{1122} b^{(0)}_{2211}) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

(55), (56)式から明らかなように、弾性解($t=0$)は $b^{(0)}_{ijkl}$ に無関係に定まり、 $t=\infty$ における終局のひずみは $b^{(1)}_{ijkl}$ の影響を受けない。いま、ひずみは単調増加（または減少）すると考えるので、 $|\varepsilon_x|_{t=0}| < |\varepsilon_x|_{t=\infty}|$, $|\varepsilon_y|_{t=0}| < |\varepsilon_y|_{t=\infty}|$ なる関係から、各係数はまったく独立に定まるものではなく、それらの間にある条件の存在することがわかる。なお、(55)式を(49)式と比較することによりつぎの関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} b^{(1)}_{1111} &= c_{11}, \quad b^{(1)}_{2222} = c_{22}, \\ b^{(1)}_{1122} &= c_{12}, \quad b^{(1)}_{2211} = c_{21} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

いま、ポアソン比 ν_{yx} をつぎのように定義する。

$$\nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{F + Ge^{-\lambda_1 t} + He^{-\lambda_2 t}}{A + Ce^{-\lambda_1 t} + Ee^{-\lambda_2 t}} \quad (58)$$

この値は、 $b^{(1)}_{2211}/b^{(1)}_{2222} = b^{(0)}_{2211}/b^{(0)}_{2222}$ なる関係が

ある場合に、

$$\nu_{yx} = b^{(1)}_{2211}/b^{(1)}_{2222} = b^{(0)}_{2211}/b^{(0)}_{2222} = \text{const.} \quad (59)$$

となり、時間に無関係に一定値となる。

つぎに、同じ平面ひずみ状態において $\sigma_y = \sigma_{y0}u(t)$ (σ_{y0} : 一定) のみが作用する場合のクリープひずみは、先に求めた解の x と y および 1 と 2 を入れ換えることによって容易に求めることができる。

以上の考察は、材料の粘弾性定数が既知の場合のクリープひずみに対するものであるが、つぎの式によれば実験値から材料の粘弾性定数を決定することができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} b^{(1)}_{1111} &= \frac{1}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} \frac{\sigma_{x0}}{\varepsilon_x|_{t=0}} \\ b^{(1)}_{2222} &= \frac{1}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} \frac{\sigma_{y0}}{\varepsilon_y|_{t=0}} \\ b^{(1)}_{1122} &= \frac{\nu_{xy}^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} \frac{\sigma_{x0}}{\varepsilon_x|_{t=0}} \\ b^{(1)}_{2211} &= \frac{\nu_{yx}^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} \frac{\sigma_{y0}}{\varepsilon_y|_{t=0}} \\ b^{(0)}_{1111} &= \frac{1}{a^{(0)}_{(11)}} \frac{\sigma_{x0}}{\varepsilon_x|_{t=\infty}} \\ b^{(0)}_{2222} &= \frac{1}{a^{(0)}_{(22)}} \frac{\sigma_{y0}}{\varepsilon_y|_{t=\infty}} \\ b^{(0)}_{1122} &= \frac{\nu_{xy}^{\infty}}{1 - \nu_{xy}^{\infty} \nu_{yx}^{\infty}} \frac{\sigma_{x0}}{\varepsilon_x|_{t=\infty}} \\ b^{(0)}_{2211} &= \frac{\nu_{yx}^{\infty}}{1 - \nu_{xy}^{\infty} \nu_{yx}^{\infty}} \frac{\sigma_{y0}}{\varepsilon_y|_{t=\infty}} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \nu_{xy}^0 &= -\varepsilon'_x|_{t=0}/\varepsilon'_y|_{t=0}, \quad \nu_{yx}^0 = -\varepsilon_y|_{t=0}/\varepsilon_x|_{t=0} \\ \nu_{xy}^{\infty} &= -\varepsilon'_x|_{t=\infty}/\varepsilon'_y|_{t=\infty}, \quad \nu_{yx}^{\infty} = -\varepsilon_y|_{t=\infty}/\varepsilon_x|_{t=\infty} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

ただし、 ε'_x , ε'_y は $\sigma_y = \sigma_{y0}u(t)$ を作用させた場合の、 x および y 方向のひずみを表わす。なお、 $b^{(1)}_{1212}$ および $b^{(0)}_{1212}$ はせん断試験により、また $a^{(0)}_{(11)}$, $a^{(0)}_{(22)}$ および $a^{(0)}_{(12)}$ はクリープひずみの増加率からそれぞれ決定することができるがここでは省略する。

以上の考察から明らかなように、(49)式に示すレオロジー方程式は、単調変化でかつ $t \rightarrow \infty$ において一定値に収束するような材料の変形挙動を説明するのに用いることができる。したがって比較的小さい応力を受ける場合の一般的な材料のクリープ挙動を、この方程式によって近似的に表わすことができるであろう。また、岩盤を対象とするならば、ここで述べた方法を現地岩盤試験に適用することによって地山の異方性粘弾性定数を求めることも可能である。

4・2 一様な内圧を受ける円形トンネルの変形挙動

地山を直交異方性弾性体と考え、その内部の円形トンネルが一様な内圧を受ける場合のトンネルの変形状態はすでに川本によって解析されている。

その解によれば、トンネル直径の変化 ΔD は

$$\Delta D = 2pa(\cos^2\theta + e \sin^2\theta + \nu_{21})/E_1 \quad (62)$$

Fig. 2. Coordinates.

ここで、 p は内圧、 a はトンネル半径、 $e = E_1/E_2$, E_1 および E_2 はそれぞれ x , y 軸方向のヤング係数、 ν_{21} はポアソン比を表わす (Fig. 2 参照)。

つぎに、地山を直交異方性粘弾性体と考える。この場合、レオロジー方程式はクリープ形によって与えたと都合がよい。ここでは、(20)式において $Q^*_{(ij)}(t)$, $P^*_{ijkl}(t)$ を

$$\begin{aligned} Q^*_{(ij)}(t) &= \partial/\partial t + c^{(1)}_{(ij)} \\ P^*_{ijkl}(t) &= d^{(2)}_{ijkl} \partial/\partial t + d^{(1)}_{ijkl} \end{aligned} \quad (63)$$

とする。これは(63)式において $d^{(0)}_{ijkl} = 0$ とした場合に相当する。 $d^{(0)}_{ijkl}$ は現象論的には材料の定常クリープに関する定数であり、岩盤の変形が $t \rightarrow \infty$ において一定値に収束する場合には $d^{(0)}_{ijkl} = 0$ とすることができる。さらにここでは、二次元直交異方性を考えているため、結局、レオロジー方程式は次式のようなになる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c^{(1)}_{(11)} \right) \varepsilon_x \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c^{(1)}_{(22)} \right) \varepsilon_y \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c^{(1)}_{(12)} \right) \gamma_{xy} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d^{(2)}_{1111} \partial/\partial t + d^{(1)}_{1111} & d^{(2)}_{1122} \partial/\partial t + d^{(1)}_{1122} & 0 \\ d^{(2)}_{2211} \partial/\partial t + d^{(1)}_{2211} & d^{(2)}_{2222} \partial/\partial t + d^{(1)}_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & d^{(2)}_{1212} \partial/\partial t + d^{(1)}_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (64)$$

いま、(63)式の両辺に Laplace 変換を施し、式中の弾性係数を直交異方性体に対する Hooke の法則を考慮して $\bar{P}^*_{ijkl}(s)/\bar{Q}^*_{(ij)}(s)$ によって置き換えれば、

$$\Delta \bar{D}(s) = 2ap(\bar{s}) \left\{ \frac{\bar{P}^*_{1111}(s)}{\bar{Q}^*_{(11)}(s)} \cos^2\theta + \frac{\bar{P}^*_{2222}(s)}{\bar{Q}^*_{(22)}(s)} \sin^2\theta \right.$$

$$\left. \frac{\bar{P}^*_{2211}(s)}{\bar{Q}^*_{(22)}(s)} \right\} \quad (65)$$

となる. ここで, $\bar{P}^*_{i,jk}(s)/\bar{Q}^*_{(i,j)}(s)$ は64式の両辺に Laplace 変換を施しつぎのように求められる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}^*_{1111}(s)/\bar{Q}^*_{(11)}(s) &= (d^{(2)}_{1111}s + d^{(1)}_{1111})/(s + c^{(1)}_{(11)}) \\ \bar{P}^*_{2222}(s)/\bar{Q}^*_{(22)}(s) &= (d^{(2)}_{2222}s + d^{(1)}_{2222})/(s + c^{(1)}_{(22)}) \\ \bar{P}^*_{2211}(s)/\bar{Q}^*_{(22)}(s) &= (d^{(2)}_{2211}s + d^{(1)}_{2211})/(s + c^{(1)}_{(22)}) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

いま, 一様な内圧は時間に無関係に一定であるとすれば

$$p = p_0 u(t) \quad (p_0: \text{一定}) \quad (67)$$

したがって,

$$p(s) = p_0/s \quad (68)$$

となる. 66, 68式を65式に代入し, Laplace の逆変換を行なえば, 直交異方性粘弾性地山内のトンネル直径の経時変化を求めることができる. すなわち,

$$\begin{aligned} \Delta D = 2p_0 a \left\{ \left[\frac{d^{(1)}_{1111}}{c^{(1)}_{(11)}} + \left(d^{(2)}_{1111} - \frac{d^{(1)}_{1111}}{c^{(1)}_{(11)}} \right) e^{-c^{(1)}_{(11)} t} \right] \cos^2 \theta \right. \\ \left. + \left[\frac{d^{(1)}_{2222}}{c^{(1)}_{(22)}} + \left(d^{(2)}_{2222} - \frac{d^{(1)}_{2222}}{c^{(1)}_{(22)}} \right) e^{-c^{(1)}_{(22)} t} \right] \sin^2 \theta \right. \\ \left. - \frac{d^{(1)}_{2211}}{c^{(1)}_{(22)}} - \left(d^{(2)}_{2211} - \frac{d^{(1)}_{2211}}{c^{(1)}_{(22)}} \right) e^{-c^{(1)}_{(22)} t} \right\} \quad (69) \end{aligned}$$

内圧の作用と同時に生ずる弾性的変化は $t \rightarrow 0$ としてつぎのように求まる.

$$\left. \begin{aligned} \Delta D|_{t=0} &= 2p_0 a X_1 (\cos^2 \theta + \alpha_1 \sin^2 \theta + \beta_1) \\ \text{ここで, } X_1 &= d^{(2)}_{1111}, \quad \alpha_1 = d^{(2)}_{2222}/d^{(2)}_{1111}, \\ \beta_1 &= -d^{(2)}_{2211}/d^{(2)}_{1111} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

70式は弾性解であるから, 62式と比較することによりつぎの関係を得る.

$$d^{(2)}_{1111} = 1/E_1, \quad d^{(2)}_{2222} = 1/E_2, \quad d^{(2)}_{2211} = -\nu_{21}/E_1 \quad (71)$$

すなわち, $d^{(2)}_{1111}$, $d^{(2)}_{2222}$ はそれぞれ x , y 軸方向の compliance を表わす.

一方, 最終的に安定した状態における直径の変化量は $t \rightarrow \infty$ としてつぎのように求まる.

$$\left. \begin{aligned} \Delta D|_{t=\infty} &= 2p_0 a X_2 (\cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta + \beta_2) \\ \text{ここで, } X_2 &= d^{(1)}_{1111}/c^{(1)}_{(11)}, \\ \alpha_2 &= d^{(1)}_{2222}c^{(1)}_{(11)}/c^{(1)}_{(22)}d^{(1)}_{1111}, \\ \beta_2 &= -d^{(1)}_{2211}c^{(1)}_{(11)}/c^{(1)}_{(22)}d^{(1)}_{1111} \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

なお, これらの結果を用いて現場での実測値から地山の粘弾性定数を決定することができるが, その考察

はここでは省略する.

5 結 言

本論文においては, 異方性粘弾性体に対するレオロジー方程式について考察を行ない, それを微分方程式の形で与えることを提案した. そして, 非可逆熱力学的考察によって誘導された Biot の応力-ひずみ関係を拡張することによって, レオロジー方程式に含まれるオペレータを物理的根拠をもって決定できることを示した. さらに, 緩和形およびクリープ形によって与えられるレオロジー方程式の, それぞれのオペレータの間に互いにある関係が存在することを示した.

つぎに, Lee が提案した弾性解との対応原理を, ここで提案したレオロジー方程式を用いて異方性体に拡張し, その応用例として, 平面ひずみ状態におけるクリープひずみについて解析を行なった. そして, その結果を用いて実験値から材料の粘弾性定数を決定できることを示した. さらに, 直交異方性粘弾性地山内の円形トンネルの経時変化を解析した.

最後に, この研究を行なうにあたり, 終始変わらぬご支援を賜った名古屋大学成岡昌夫教授, ならびに, 直接ご指導いただいた名古屋大学川本眺万助教授に深く謝意を表します. また, 原稿を読んでいただき, ご批判, ご教示を賜った京都女子大学伊藤英文助教授に感謝します.

(昭和45年11月6日 土木学会第25回年次学術講演会および, 昭和45年11月27日 第3回岩の力学国内シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) Wolf, K., ZAMM, **15**, 249 (1935).
- 2) Barden, L., Géotechnique, **13**, 198 (1963).
- 3) 川本眺万, 発電水力, **68**, 1 (1964).
- 4) Sonntag, G., Der Bauingenieur, **33**, 287, 344 (1958).
- 5) 川本眺万, 土木学会論文集, No. 71, 20 (1960).
- 6) 川本眺万, 土木学会論文集, No. 118, 1 (1965).
- 7) Lee, E. H., Quart. Appl. Math., **13**, 183 (1955).
- 8) たとえば, Fung, Y. C., "Foundations of Solid Mechanics," Chap. 15 (1965) Prentice-Hall.
- 9) Sobotka, Z., "Contributions to Mechanics," ed. by D. Abir, 391 (1969) Pergamon Press.
- 10) Biot, M. A., J. Appl. Phys., **25**, 1385 (1954).
- 11) Bland, D. R., "The Theory of Viscoelasticity," Chap. 2 (1960) Pergamon Press.