Poiseuille 流 中 に お け る 円弧状粒子の Radial Migration (Ⅱ)*

西 村 二 郎** 岡 小 天***

Radial Migration of a Rod-Like Particle Deformed to a Circular Arc in Poiseuille Flow (Ⅱ)

by

Jiro NISHIMURA

(Central Research Laboratory, Showa Denko K.K., Tokyo)

and Syoten OKA

(Faculty of Science, Tokyo Metropolitan University, Tokyo)

A theoretical investigation has been made of the deformation of an elastic prolate spheroidal particle in Poiseuille flow by taking the deformation velocity into account. Although the elongational deformation is also considered, the leading deformation is the bending due to the buckling under the present condition in which the short-/long-axis ratio of the particle is considerably small.

It is well known that deformation due to the buckling is unstable. However, as long as the particle exists in the viscous fluid, the deflection can be determined as a function of time or of Eulerian angles. This is because resistant force is produced against buckling by the deformation velocity of the particle.

In this treatment, the deflection, which is here represented in terms of curvature, is given as a special case in which the particle is much shorter than the tube radius, since otherwise the numerical method of integration must be used to solve the differential equations.

The results obtained, however, are not capable of theoretical interpretation of the radial migration, which occurs from the wall toward the tube axis.

(Received Feb. 10, 1971)

1 ま え が き

Poiseuille 流中に存在する粒子が、どのように変形し、どのような運動をするかという問題は、血管中を流れる赤血球の radial migration や高分子溶液論と関連して興味深い。

われわれは最近、細長い棒状粒子対象として、その変形性の効果を調べ、それが radial migration と結びつくことを指摘した¹⁾。しかし、その方向は実験事実とは逆で、中心から壁に向かうものであった。この矛盾を解決するために、われわれは粒子の変形(この場合曲率)²⁾が大きい場合について考えた。そして前報において、われわれは、円弧状に変形した無限に細い棒状粒子は、ある曲率以上で、migration の方向が逆転する場合があることを示した。

しかし、以上の取り扱いにおいては、粒子の変形は

静的な力のつり合いによって決定されるものとし、粒子の変形速度の影響は考慮されていない。このようなやり方は、流れと粒子の変形との相互作用を考えると、不完全である。とくに粒子の変形が挫屈による場合には、これまでのやり方では、変形の大きさを決定することができない。

この報告では、変形速度を考慮に入れ、粒子の挫屈変形を定量化することを中心として解析を行なった。

2 取扱いの概要

例によって、3つの座標系： $O-XYZ$ (固定座標系) $o-xyz$ (重心座標系)、 $o-\xi\eta\zeta$ (粒子座標系) を考える。これらの間の変換はつぎのとおりである。

$$\{x, y, z\}^T = [X, Y, Z]^T - [X_G, Y_G, Z_G]^T, \quad (1)$$

$$\{\xi, \eta, \zeta\}^T = A \cdot \{x, y, z\}^T, \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \phi \cdot \sin \theta \\ \sin \theta \cdot \sin \phi & \cos \phi \cdot \cos \phi - \sin \phi \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \\ \sin \theta \cdot \cos \phi & -\cos \phi \cdot \sin \phi - \sin \phi \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi \end{bmatrix}$$

* 原稿受理 昭和46年2月10日

** 正 会 員 昭和電工(株)中央研究所 東京都大田区多摩川

*** 正 会 員 東京都立大学理学部 東京都世田谷区深沢

$$\left. \begin{aligned} & -\cos \phi \cdot \sin \theta \\ & \sin \phi \cdot \cos \psi + \cos \phi \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi \\ & -\sin \phi \cdot \sin \psi + \cos \phi \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

ただし, (ϕ, θ, ψ) は重心系と粒子系との間の Euler の角, $[X_G, Y_G, Z_G]^T$ は重心の座標である.

いま粒子を長径 $2a$, 短径 $2b$ なる偏長回転だ円体と見なし, その長軸を, 変形時つぎのような平面曲線 (円弧) で表わすことにする.

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \\ \zeta(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - \frac{1}{6}\kappa_1^2 s^3 + \dots \\ \frac{1}{2}\kappa_1 \left(s^2 - \frac{2}{15}a^2 \right) + \dots \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \mathbf{r}^{(0)} + \kappa_1 \mathbf{r}^{(1)} + \kappa_1^2 \mathbf{r}^{(2)} + \dots \quad (4)$$

ただし, s は中心から測った弧長, κ_1 は曲率である.

つぎに, 粒子が非常に細長いものとし, Burgers 流⁴⁾ に Oseen の方法を適用すれば, だ円体の長軸上の 2 つの焦点間に分布する力 $\mathbf{F}$ を決定する式として次式が得られる.

$$\frac{1}{8\pi\mu} \int_{-\sqrt{a^2-b^2}}^{\sqrt{a^2-b^2}} T(s, s_0) \cdot \mathbf{F}(s) ds = -\mathbf{V}_r(s_0), \quad (5)$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{r_0} - \frac{b_s^2}{r_0^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{b_s^2}{r_0^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{b_s^2}{r_0^3} \end{pmatrix} \\ + \kappa_1 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{1}{r_0^3} \{ (s-s_0)^2 (s+s_0) - b_s^2 s_0 \} & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + \dots, \quad (6)$$

ただし, $r_0 = \sqrt{(s-s_0)^2 + b_s^2}$; $b_s = b\sqrt{1-s_0^2/a^2}$ とおいた. また μ は流体の粘度である. $\mathbf{V}_r$ は粒子が存在しないとしたときの, 粒子表面における流体の相対速度である

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{A} - (\mathbf{U} - \mathbf{U}_G) - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - \frac{d^*\mathbf{r}}{dt^*} \quad (7)$$

ここで,

$$\left(\begin{aligned} & q \left(\cos 2\theta \cdot \cos \theta + \frac{4}{3} \frac{\sigma-29}{\sigma-3} \sin 2\theta \cdot \sin \theta \right) - \frac{1}{3} h \frac{\sigma+1}{\sigma-3} \sin \theta \\ & - \frac{1}{10} \kappa_1 a^2 \sin \phi \left\{ q \left(\cos 2\theta \cdot \sin \theta - \frac{4}{3} \frac{\sigma-29}{\sigma-3} \sin 2\theta \cdot \cos \theta \right) + \frac{1}{3} h \frac{\sigma+1}{\sigma-3} \cos \theta \right\} \\ & - \cos \phi \left\{ q \left(\cos 2\theta \cdot \sin \theta - \frac{4}{3} \frac{\sigma-29}{\sigma-3} \sin 2\theta \cdot \cos \theta \right) + \frac{1}{3} h \frac{\sigma+1}{\sigma-3} \cos \theta \right\} \end{aligned} \right) + \dots \quad (14)$$

$$\mathbf{U} = [w_0(R_0^3 - R^2), 0, 0]^T, \quad (R^2 = Y^2 + Z^2) \quad (8)$$

は, 半径 R_0 なる管の中を流れる Poiseuille の流れ, $\mathbf{U}_G$ は重心の移動速度, $\boldsymbol{\omega}$ は回転速度である. $d^*\mathbf{r}/dt^*$ は粒子系の基準ベクトルを定ベクトルと見なして微分したもので, 粒子の変形速度を意味している. 具体的にはつぎの式で与えられる.

$$\frac{d^*\mathbf{r}}{dt^*} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa_1 \begin{pmatrix} 0 \\ s\dot{s} - \frac{2}{15}a\dot{a} \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \dot{\kappa}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \left(s^2 - \frac{2}{15}a^2 \right) \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \quad (9)$$

この項は, これまでの取扱いでははいつてきていない. なおドットは時間微分を意味するものとする. 簡単のため, 粒子の長さ方向の変形について,

$$\dot{s} = h(t)s \quad (\therefore \dot{a} = ha) \quad (10)$$

を仮定すれば, (9)式はつぎのようになる.

$$\frac{d^*\mathbf{r}}{dt^*} = h\mathbf{r}^{(0)} + (2\kappa_1 h + \dot{\kappa}_1)\mathbf{r}^{(1)} + \dots \quad (11)$$

この式を(7)に代入し, さらに力および力のモーメントが, 時々刻々, つり合っていることを要求すれば, 積分方程式(6)はつぎのように解ける.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\pi\mu}{\sigma-2} (q \sin 2\theta + h)s \\ + \kappa_1 \frac{\pi\mu}{\sigma-2} q \cos 2\theta \left(s^2 - \frac{1}{3}a^2 \right) \\ \frac{2\pi\mu}{\sigma-1} \left\{ \kappa_1 - 2w_0 \sin^2 \theta \right. \\ \left. - \kappa_1 \left(\frac{\sigma-17}{8} q \sin 2\theta - \frac{\sigma-1}{4} h \right) \right\} \\ 0 \end{pmatrix} + \dots, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \left[0, 0, q \sin^2 \theta + \frac{1}{10} \kappa_1^2 a^2 q \cos 2\theta \right]^T + \dots, \quad (13)$$

$$\mathbf{U}_G = \begin{pmatrix} w_0(R_0^3 - R_G^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \kappa_1 a^2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \sin \phi \cdot \cos \theta \\ -\cos \phi \cdot \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{ただし, } \sigma = \frac{1}{2} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \log \frac{2a}{b} \quad (15)$$

$$q = 2w_0(Y_0 \sin \phi - Z_0 \cos \phi) \quad (16)$$

ここで, 力のモーメントのつり合いの条件から,

$$\psi = -\frac{\pi}{2} \quad \left(\text{または } \frac{\pi}{2} \right) \quad (17)$$

とおかざるを得ないことに注意しておく。

3 粒子の伸縮

粒子が弾性体であるとき, その変形には, 長軸方向の伸縮と曲げの2種類が考えられる。両者が独立に取り扱えるものとして, まず伸縮変形について考えてみる。いま $s=s_1$ なる点において円体の長軸に垂直な断面を考えると, その面に働く平均応力は,

$$p_\xi(s_1) = -\frac{a^2}{\pi b^2} \int_{-\sqrt{a^2-b^2}}^{s_1} \frac{1}{a^2-s^2} F_\xi(s) ds \quad (18)$$

で与えられる。したがって微小部分 ($s, s+ds$) の伸びは, Young 率を E として,

$$\frac{\delta \Delta s}{\Delta s} = \frac{1}{E} p_\xi(s) \quad (19)$$

で与えられる。これから s の時間変化を求めると,

$$\dot{s} = \frac{1}{E} \int_0^s \frac{\partial p_\xi(s)}{\partial t} ds \quad (20)$$

が得られる。(10), (12), (20)式より, h をつぎのように定めることができる。

$$h(t) = -e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{1}{2} q e^{\lambda t'} \frac{d}{dt'} (\sin 2\theta) dt' \quad (21)$$

$$\text{ただし, } \lambda = \epsilon^2 \cdot E \cdot \left(\sigma - \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{1}{\mu}, \quad \left(\epsilon^2 \equiv \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (22)$$

とおいた。

4 曲 げ 変 形

曲げ変形を決定する方程式はつぎのとおりである。

$$m(s) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} EI(s) \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = -\frac{\partial^2 M(s)}{\partial s^2} \quad (23)$$

ただし, $m(s) = \pi \rho \epsilon^2 (a^2 - s^2)$ は線密度 (ρ は密度)
 $I(s) = \frac{\pi}{4} \epsilon^4 (a^2 - s^2)^2$ は断面2次モーメントである。線密度が小さいときは, 加速度項を無視することにより, (23)式の代わりに次式が得られる。

$$EI(s) \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = -M(s) \quad (24)$$

曲げモーメント $M(s)$ はこの場合つぎのようになる。

$$\begin{aligned} M(s) &= \int_{-a}^s [\eta(s') F_\xi(s') - \xi(s') F_\eta(s')] ds' \\ &\quad - \left[\eta(s) \int_{-a}^s F_\xi(s') ds' - \xi(s) \int_{-a}^s F_\eta(s') ds' \right] \\ &= \frac{1}{6} \frac{\pi \mu}{\sigma - 1} (a^2 - s^2)^2 \left\{ \dot{\kappa}_1 - 2w_0 \sin^3 \theta \right. \\ &\quad \left. - \kappa_1 \left(\frac{7}{4} q f_1 \sin 2\theta + \frac{1}{2} f_2 h \right) \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } f_1 = \frac{\sigma - \frac{23}{14}}{\sigma - \frac{3}{2}}, f_2 = \frac{\sigma - \frac{5}{2}}{\sigma - \frac{3}{2}} \quad \text{とおいた。}$$

(25)式を(24)式に代入すれば, 曲率を決定する式として次式が得られる:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_1 &= 2w_0 \sin^3 \theta + \kappa_1 \left[\frac{7}{4} q f_1 \sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} f_2 h - \frac{3(\sigma - 1) E \epsilon^4}{2\mu} \right] + \dots \quad (26) \end{aligned}$$

この式は, 大カッコの中が0になったときに挫屈が起こるべきであることを意味している。いわゆる挫屈においては, 曲率の大きさは定まらない。しかし, ゼリ速度場中における挫屈においては, 変形速度が挫屈に対する抵抗を誘起するため, 曲率を時間の関数として決定することができる。

5 曲 率 の 決 定

曲率を決定するには, (26)式と同時に, Euler の角に対する微分方程式:

$$\dot{\phi} = q(\phi) \epsilon^2 \cot \phi \cdot \cot \theta + \dots \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= q(\phi) \left\{ (1 - \epsilon^2) \sin^2 \theta + \epsilon^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{10} (\kappa_1 a)^2 \cos 2\theta \right\} + \dots \quad (28) \end{aligned}$$

を解く必要がある。しかし, 変形が小さい場合には, 曲率の入った項を無視することにより, (27), (28)式を(26)式とは独立に解くことができる。このときの解は, よく知られているように, 次式で与えられる。⁴⁾

$$\phi = \text{const.} \quad (29)$$

$$\tan \theta = \epsilon \tan(q(\phi) \epsilon t + \text{const.}) \quad (30)$$

このとき(26)式の解はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \kappa_1(t) &= \left[\int_0^t \frac{2w_0 \sin^3 \theta}{\{(1 - \epsilon^2) \sin^2 \theta + \epsilon^2\}^{\frac{7}{4} J_1}} G(t')^{-1} dt' \right] \\ &\quad \{ (1 - \epsilon^2) \sin^2 \theta + \epsilon^2 \}^{\frac{7}{4} J_1} G(t), \quad (31) \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } G(t) = \exp \left[\int_0^t \left\{ \frac{1}{2} f_2 h - \frac{3(\sigma - 1) E \epsilon^4}{2\mu} \right\} dt' \right] \quad (32)$$

とおいた。粒子がきわめて細い場合は, $G(t) \approx 1$ と考えてよい。この場合, (31)式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \kappa_1(\theta) &= \frac{2w_0}{q} \left[\int_0^\theta \frac{\sin^3 \theta d\theta}{\{(1 - \epsilon^2) \sin^2 \theta + \epsilon^2\}^{\frac{7}{4} J_1 + 1}} \right] \\ &\quad \{ (1 - \epsilon^2) \sin^2 \theta + \epsilon^2 \}^{\frac{7}{4} J_1} \quad (33) \end{aligned}$$

この解は, $\kappa_1 a \ll 1$ という条件の下で得られたものである。したがって, 得られた κ_1 もこの条件を満たさなければならない。このためには少なくとも,

$$a/R_G \ll \epsilon^{1.5} \quad (34)$$

なることが要求される。したがって, $\epsilon \ll 1$ だから, 粒子の長さが, 管径に比してきわめて小であることが必要となる。そうでない場合は, (26)~(28)式で κ_1^2 以上の項を導入して解く必要がある。

6 Radial Migration

管径方向の速度成分はつぎのとおりである。

$$V_R = \frac{1}{R_G} (V_G \cdot Y_G + W_G \cdot Z_G) = -\frac{1}{10} \kappa_1 a^2 \frac{q}{2w_0 R_G} \cos \theta$$

$$-\frac{1}{10}\kappa_1 a^2 \frac{q}{2w_0 R_G} \left\{ q \left(\cos 2\theta \cdot \sin \theta \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4}{3} \frac{\sigma - \frac{29}{16}}{\sigma - \frac{3}{2}} \sin 2\theta \cos \theta \right) + \frac{1}{3} h \frac{\sigma + 1}{\sigma - \frac{3}{2}} \cos \theta \right\} \quad (35)$$

さらに(36)式の関係を使えば、つぎようになる。

$$V_R = -\frac{1}{10}\kappa_1 a^2 \frac{q}{2w_0 R_G} \left\{ q \left(\cos 2\theta \cdot \sin \theta \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{12} \frac{\sigma - \frac{31}{26}}{\sigma - \frac{3}{2}} \sin 2\theta \cdot \cos \theta \right) + \left(\frac{5}{12} \frac{\sigma - \frac{31}{26}}{\sigma - \frac{3}{2}} h \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{4} \frac{\sigma - 1}{\mu} E \varepsilon^4 \right) a^2 \cos \theta \right\} + \dots \quad (36)$$

Migration の方向を知るには、1 周期についての移動量を計算すればよい。計算の実行には、かなりわずらわしい数値計算が必要となる。ここでは計算式を提出するだけにとめる。

7 考 察

ズリ速度場中における棒状粒子の挫屈変形が、(31)式のような形に定量化できたことは、ひとつの収穫であろう。この計算を発展させれば、屈曲性粒子の分散系の energy dissipation を評価することが可能となるものと思われる。

しかし残念なことに、radial migration については結論的計算を行なうにいたらなかった。(36)式から推論されることは、曲率の変化が比較的ゆるやかならば、 V_R の積分値が負になる (migration の方向が壁から中心軸であることに対応する) ということである。一

方、(33)式で与えられる曲率は、 $\theta = \pi/2$ のところに鋭いピークを持つことを予想させる。したがって(33)式を、(36)式で $h=0$, $\varepsilon^4=0$ としたものに代入し、厳密な積分値を求めたとしても、それは多分正となるであろうこのことは、われわれにとって“困ったこと”であるかのように思われる。

Mason⁵⁾らの実験によれば、inward migration が顕著に観測されるのは、fiber の flexibility が大きい場合である。また粒子の長さも管径に比して小さいとはいえない。したがって、(33)式を用いて migration を評価することは、あまり現実的ではない。

粒子の長さが小さくないとき、(33)式による κ_1 の値は非常識な程大きくなる。これは κ_1^2 以上の項を無視したためと考えられる。実際には κ_1^2 以上の項がブレーキとなって、 κ_1 はゆるやかに変化するものと思われる。

(昭和45年10月8日 第18回レオロジー討論会にて講演)

参 考 文 献

- 1) Nishimura, J., and S. Oka, Proc. Fifth Intern. Congr. on Rheology, **2**, 211 (1970).
- 2) Nishimura, J., and S. Oka, Rep. Progr. Polymer Phys., Japan, **12**, 101 (1969).
- 3) Nishimura, J., and S. Oka, J. Soc. Materials Sci., Japan, **19**, 288 (1970).
- 4) Burgers, J. M., "Second Report on Viscosity and Plasticity," Chap. **3** (1938) Amsterdam.
- 5) Goldsmith, H. L., and S. G. Mason, J. Colloid Sci., **17**, 448 (1962).

(645頁より)

227. Kapillrkalibrierung mit Silopren-Abgüssen, H. Craubner, 61.
228. Dynamic viscoelastic properties of polymer melts, J.C. Weeks, G.C. Reid, 69.
229. Fatigue studies of drawn and undrawn fibre materials, J.W. Hearle, E.A. Vaughn, 76.
230. Dynamic properties of materials, I, A.R. Payne, R.E. Whittaker, 91.
231. Dynamic properties of materials, II, A.R. Payne, R.E. Whittaker, 97.
232. The dynamic shear modulus of bitumens as a function of frequency and temperature, R. Jongepier, B. Kuilman, 102.
233. Fatigue crack growth studies on constant compliance specimen, N.J.I. Adams, 111.
234. Relations between steady flow and oscillatory shear measurements, 115.
235. Strain hardening and the discontinuity in the S/N fatigue curve of steel, T.R.G. Williams, M. Bily, 120.
236. Torsial hysteresis in plastic clay, N.F. Asbury, F. Moore, 124.
237. Druckverluste und instabiles Fliessen elastischer Flüssigkeiten im Hochdruck-Kapillarviskosimeter, E. Brenschede, J. Klein, 130.
238. Über Spannungsrelaxation und zeitabhängige elastisch Bruchvorgänge in orientierten Fasern, H.H. Kausch-Blecken von Schmeling, J. Becht, 137.
239. Some exact solutions for non-Newtonian flow problems, S.P. Gulati, 147.
240. High elasticity, normal and shear stresses on shear deformation of low-molecular-weight polyisobutylene, G.V. Vinogradov, A.Ya. Malkin, V.F. Shumsky, 155.

(654頁へ)