非ニュートン流体のレーリー問題*

田 中 安 太 郎**

Rayleigh's Problem of Non-Newtonian Fluids

by

Yasutaro TANAKA

(Faculty of Science, Tokyo Metropolitan University, Tokyo)

Rayleigh's problem of an idealized non-Newtonian fluid past a flat plate has been considered by using the constitutive equation of the power-law model. The velocity profiles can be reduced to a single curve by changing the scale of the axis perpendicular to a flat plate, and the exact solution of the problem can also be generated. Of the pseudoplastic fluid the velocity decreases more slowly than that of the Newtonian fluid, as its distance from the plate increases. Of the dilatant fluid the velocity decreases faster, and becomes zero at a definite distance from the plate.

(Received Feb. 1, 1971)

1 緒 言

粘性応力とせん断速度が比例しないが、その関係が時間に依存しない非ニュートン流体の流動について、今までに多くの研究が行われてきた。しかし、従来の研究は、主として構成方程式の決定に役立つことを目的としたので、狭い領域（円管内、同軸回転円筒間、円錐平板間等）での定常流動の解析に主力を注いできたように思われる。

Acrivos¹⁾, Schowalter²⁾, Bizzel³⁾らは、べき法則に従う非ニュートン流体を境界層近似の方法で研究した。これは、粘性の影響が物体表面からごくわずかに離れた場所までしか及ばないという仮定に基づいた近似法である。レーリー問題では厳密解が得られるが、この問題での時間が、境界層近似での物体表面に沿っての距離に対応すると考えられるので、近似の理論的基礎をしらべるために、レーリー問題を考察するのは有意義である。

この論文ではべき法則に従う非ニュートン流体のレーリー問題を取り扱う。

その理由は、これが半無限領域での非定常流の厳密解を与えるという意味で連続体力学における基本的な問題の一つであり、従来の非ニュートン流体の研究の不足を補うと同時に、さきに公にされている境界層近似の方法に理論的基礎を与えるとも考えられるからである。

2 基礎方程式

静止流体中におかれた無限に広い平板が、ある瞬間 $t=0$ に、一定の速度 U で板に平行に動き始めたとき、その後の流体の運動を調べる。

密度を ρ 、速度ベクトルを $\mathbf{v}$ 、そのカルテシアン座標 x_λ でのその成分を v_λ 、圧力を p 、粘性応力ベクトルを $\mathbf{S}_\lambda$ とすると、連続の式、運動方程式は次のようになる。

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \operatorname{grad}) v_\lambda = - \frac{\partial p}{\partial x_\lambda} + \operatorname{div} \mathbf{S}_\lambda \quad (2)$$

問題の初期条件、境界条件は次のようである。

$$\text{at } t=0 \quad v_\lambda = 0 \quad \text{for } 0 < x \quad (3)$$

$$x=0 \quad v_\lambda = U \delta_{\lambda z} \quad 0 < t < \infty \quad (4)$$

$$x=\infty \quad v_\lambda = 0 \quad 0 < t < \infty \quad (5)$$

流速 v_λ および圧力 p は時間 t と平板からの距離 x のみの関数とすると、連続の(1)式から

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

ゆえに v_x は x を含まないところで一定であって、その値は条件(4)によって 0。したがって

$$v_\lambda = v_z \delta_{\lambda z} \quad (7)$$

$$S_{\lambda\mu} = S_{\nu\lambda} = S_{xz} \delta_{\nu x} \delta_{\lambda z} \quad (8)$$

となり、運動方程式(2)は次のようになる。

$$\lambda = x: \quad 0 = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9)$$

$$\lambda = z: \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} \quad (10)$$

(9)式から、 p は x を含まないところで一定であることがわかる。

* 原稿受理 昭和46年2月1日

** 東京都立大学理学部 東京都世田ヶ谷区深沢町

流体はべき法則

$$S_{xz} = k \left| \frac{\partial v_z}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (11)$$

$$n \approx 1 \begin{cases} n < 1 \text{ のとき} & \text{擬塑性流体} \\ n > 1 & \text{ダイラタント流体} \end{cases}$$

によって支配される非ニュートン流体とする。\$n \approx 1\$ なる事が非ニュートン流体のキャラクタを示すものと見なして、せん断速度の全域にわたって \$n\$ を一定として扱う。

流速 \$v_z\$ は平板からの距離 \$x\$ が増加するにしたがい、減少すると考えられるので、構成方程式(11)は

$$S_{xz} = -k \left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^n \quad (12)$$

と書け、運動方程式(10)式は次のようになる。

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -k \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^n \quad (13)$$

3 相 似 的 考 察

\$0 < t_1, t_2 < \infty\$ なる任意の \$t_1, t_2\$ に対して

$$v_z[x_1/g(t_1)] = v_z[x_2/g(t_2)] \quad (14)$$

が満足される相似解の存在することが予想される。

$$\frac{x}{g(t)} \equiv \xi \quad (15)$$

とおき、\$(t, x)\$ 系から \$(t, \xi)\$ 系へと独立変数を変換すると、(14)式は

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{\partial v_z}{\partial \xi} \right)^n - \frac{\rho}{k} \xi g^n \frac{dg}{dt} \frac{\partial v_z}{\partial \xi} = -\frac{\rho}{k} g^{n+1} \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad (16)$$

となる。\$v_z\$ が \$\xi\$ だけの関数ならば、(16)式の右辺は消え左辺の係数は \$t\$ によらないはずである。ところが \$g\$ は \$t\$ の関数であるから、\$\alpha\$ を任意定数とすると \$g\$ は

$$\frac{\rho}{k} g^n \frac{dg}{dt} = \alpha \quad (17)$$

をみたさなければならない。ただし、流れは時間とともに発達すると考えられるので \$dg/dt > 0\$。したがって

$$\alpha > 0 \quad (18)$$

であるはずである。(17)を積分すると、

$$g(t) = \left\{ \frac{k}{\rho} (n+1) \alpha t + \text{const.} \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (19)$$

\$v_z\$ が実際の解となるには境界条件が \$\xi\$ のみであらわされねばならない。\$(t, \xi)\$ 系で初期条件を書きかえると (const.=0 ととる)、(4)式から

$$\text{at } \xi=0, \quad v_z=U \quad (20)$$

(3), (5)式から

$$\text{at } \xi=\infty \quad v_z=0 \quad (21)$$

となり、\$\xi\$ だけで表わせる。

以上で、方程式は相似解をもち、実際の解となる事がわかる。その解 \$v_z\$ は上の境界条件のもとで次の常微分方程式を解くことによって定まる。

$$\frac{d}{d\xi} \left(-\frac{dv_z}{d\xi} \right)^n - \alpha \xi \frac{dv_z}{d\xi} = 0 \quad (22)$$

4 流 れ の 解 析

(22)式は \$v_z\$ を陽に含まないから

$$-\frac{dv_z}{d\xi} \equiv q \quad (23)$$

とおくと、

$$\frac{dq^n}{d\xi} + \alpha \xi q = 0 \quad (24)$$

となり、これを積分すれば

$$\frac{n}{n-1} q^{n-1} + \frac{\alpha}{2} \xi^2 = \text{const.} \equiv C^* \quad (25)$$

となる。ここに \$C^*\$ は \$\xi=0\$ での \$(n/n-1)q^{n-1}\$ の値を表わす。\$\alpha\$ の値を適宜にとって一般性を失わないので、以下 \$\alpha=2\$ にとる。ところで

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{q^{n-1}-1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{e^{(n-1)\log q}-1}{n-1} = \log q \quad (26)$$

であるから

$$C^* - \frac{n}{n-1} \equiv C \quad (27)$$

とおくと、(25)式は

$$\frac{n}{n-1} (q^{n-1}-1) + \xi^2 = C \quad (28)$$

となり、\$n \rightarrow 1\$ で \$C\$ は有限であって、\$\xi=0\$ での \$\log q\$ の値を表わすことになる。(28)式から

$$q^{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n} (C - \xi^2) = \frac{n-1}{n} (C^* - \xi^2) \geq 0 \quad (29)$$

\$n < 1\$ では、(29)式から \$\xi = \infty\$ で \$q=0\$。したがって、シグナルは \$\infty\$ の速度で伝わっている。

\$n > 1\$ では \$C^* > 0\$ ゆえ

$$\xi = \sqrt{C^*} = \sqrt{\frac{n}{n-1} + C} \quad (30)$$

で \$q=0\$。ところが、静止流体に \$t=0\$ において \$x=0\$ で速度ステップを与え、上の流体を下の流体が引きずる形で流れが発達してゆくのであるから、せん断速度が 0、すなわち粘性応力が 0 となる場所があれば、そこから先では速度 \$v_z\$ は 0 となると考えるべきである。その場所は(30)式によって

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{n}{n-1} + C \right) g^2(t) \\ &= \left(\frac{n}{n-1} + C \right) \left\{ \frac{k}{\rho} 2(n+1)t \right\}^{\frac{2}{n+1}} \end{aligned} \quad (31)$$

と与えられる。したがって、シグナルの伝ば速度は有限。そのたいさは

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{n+1} \frac{x}{t} \quad (32)$$

で表わされる。

したがって、とくべき領域を

$$0 \leq \xi \leq \xi_\infty \quad (33)$$

$$\begin{cases} n < 1 & \text{では } \xi_\infty = \infty \\ 1 < n & \xi_\infty = \sqrt{\frac{n}{n-1} + C} \end{cases}$$

ととる. $q \equiv -dv_z/d\xi$ であることを考えて (29) 式の積分を行ない, 境界条件 (20) 式を考慮すれば

$$v_z - U = - \left(1 + \frac{n-1}{n} C \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_0^\xi \left(1 - \frac{\xi^2}{\frac{n}{n-1} + C} \right)^{\frac{1}{n-1}} d\xi \quad (34)$$

となる. ここで境界条件 (21) 式を入れると

$$U = \left(1 + \frac{n-1}{n} C \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\xi^2}{\frac{n}{n-1} + C} \right)^{\frac{1}{n-1}} d\xi \quad (35)$$

となる. これから定数 C が定まる. (34) と (35) とから v_z は次式で与えられる.

$$v_z = U \left\{ 1 - \frac{\int_0^\xi \left(1 - \frac{\xi^2}{\frac{n}{n-1} + C} \right)^{\frac{1}{n-1}} d\xi}{\int_0^\infty \left(1 - \frac{\xi^2}{\frac{n}{n-1} + C} \right)^{\frac{1}{n-1}} d\xi} \right\} \quad (36)$$

ところで

$$\lim_{n \rightarrow 1} \left(1 - \frac{\xi^2}{\frac{n}{n-1} + C} \right)^{\frac{1}{n-1}} = e^{-\xi^2} \quad (37)$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \xi_\infty = \infty \quad (38)$$

であるから, (36) は $n \rightarrow 1$ のとき, よく知られたニュートン流体の解に帰着する. すなわち,

$$v_z = U \{ 1 - \text{erf}(\xi) \} \quad (39)$$

ここで $\text{erf}(\xi)$ は誤差関数で次式で定義されるものである.

$$\text{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi \quad (40)$$

$n < 1$ では

$$1 + \frac{\xi^2}{\frac{n}{1-n} - C} \equiv \frac{1}{s} \quad (41)$$

とおき, ξ の代わりに s を独立変数に用いると, (35) 式, (36) の積分は既知関数で表わされる. すなわち,

$$\frac{n}{1-n} - C = \left\{ \frac{B\left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1-n}{n}\right)^{\frac{1}{1-n}} U} \right\}^{\frac{1}{1-n} - \frac{1}{2}} \quad (42)$$

$$v_z = U \frac{B_s\left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{B\left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \quad (43)$$

ここで $B(p, q)$, $B_s(p, q)$ はベータ関数, 不完全ベータ関数で次式で定義される.

$$B(p, q) = \int_0^s s^{p-1} (1-s)^{q-1} ds \quad (0 < p, 0 < q) \quad (44)$$

$$B_s(p, q) = \int_0^s s^{p-1} (1-s)^{q-1} ds \quad (0 < p, 0 < q, 0 \leq s \leq 1) \quad (45)$$

これらの関数に対しては, 「函数表」がある.

$n > 1$ では

n の特別な値に対して, 積分は既知関数に帰着される. 特に $n=2$ の時は最も簡単で, (35), (36) 式は

$$\frac{n}{n-1} + C = (3U)^{2/3} \quad (46)$$

$$v_z = U \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{\xi}{(3U)^{1/3}} + \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{U} \right\}, \quad \xi_\infty = (3U)^{1/3} \quad (47)$$

となる.

5 考 察

擬塑性流体, ダイラタント流体とニュートン流体とを比較検討する.

平板から遠ざかるにしたがって, セン断速度が減少するのはいずれの流体でも同じであるが, 擬塑性流体 ($n > 1$) では, セン断速度が減少するにしたがって, 粘性係数が増加するので, 平板の運動の影響が遠い距離まで比較的強くおよび, 速度の減少の仕方が緩やかとなる傾向がある.

ダイラタント流体 ($n < 1$) では, 擬塑性流体と逆の傾向となり, 平板表面からの距離が有限の場所で, 速度が 0 となってしまう.

Fig. 1. Velocity profiles at $t=1$.

Fig. 2. Velocity profiles at $t=10$.

Fig. 3. Velocity profiles at $t=60$

したがって、ニュートン流体が、有限の距離で速度が0となるか否かの境目となる。

$n=1/2, 1, 2$ の場合の $g(t)$ は、(19式で $\alpha=2$, $\text{const.}=0$ とおくと、次のようになる。

n	$\frac{1}{2}$	1	2
$g(t)$	$\left(\frac{k}{\rho} 3t\right)^{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{k}{\rho} 4t\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{k}{\rho} 6t\right)^{\frac{1}{3}}$

特に $U=1, k/\rho=0.01$ ととった場合の、 $t=1, 10, 60$ における速度プロファイルを Fig. 1~3 に示す。図から明らかなように、 n の小さい流体ほど、速度の発達が早いことがわかる。

最後に、この研究に際して数々の貴重な助言をいただいた本学理学部力学研究室永倉俊充教授、楠川絢一教授に感謝する。また、日頃の指導と激励に対しても感謝したい。

(昭和45年10月9日 第18回レオロジー討論会にて講演)

参 考 文 献

- 1) Acrivos, A., M. J. Shah, and E. E. Petersen, Amer. Inst. Chem. Engrs. J., **6**, 312 (1960).
- 2) Schowalter, W. R., Amer. Inst. Chem. Engrs. J., **6**, 24 (1960).
- 3) Bizzel, G. D., and D. C. Slattery, Chem. Engng. Sci., **17**, 777 (1962).
- 4) Acrivos, A., M. J. Shah, and E. E. Petersen, Chem. Engng. Sci., **20**, 101 (1965).
- 5) Karl Pearson, Tables of the Incomplete Beta-Function, University Press, Cambridge, England and Published by the Proprietors of Biometrika.

(654頁より)

270. Numerical calculation of creep compliance from dynamic data for linear viscoelastic materials, F. R. Schwarzl, 382.
271. Developing laminar flows with visco-elastic and non-Newtonian liquids, M. P. Brocklebank, J. M. Smith, 396.
272. Nicht-Newtonischer Stoffe durch elektrische Modelle, H. H. Winter, 405.
273. Some rheological properties of dilute suspensions of polyoxymethylene crystals in p-xylene, D. A. Blackadder, T. L. Roberts, 409.
274. On the stability of viscoelastic fluid flow, III, R. K. Bhatnagar, H. Giesekus, 412.
275. On heat transfer in a viscoelastic fluid flowing around a steadily rotating and thermally insulated sphere, R. K. Bhatnagar, 419.
276. Zur Kapillarkviskosimetrie verdünnter Lösungen, I, J. Einfeldt, 424.
277. Zur Kapillarkviskosimetrie verdünnter Lösungen, II, J. Einfeldt, 429.
278. Polar effects in the apparent viscosity of a suspension, M. E. Erdoğan, 434.
279. Single specimen determination of Young's and bulk moduli of polymers, R. W. Warfield, J. E. Cuevas, F. Robert Barnett, 439.
280. Experiments on buoyancy driven convection in non-Newtonian fluid, S. F. Liang, A. Acrivos, 447.
281. A rheological investigation of solid soap, P. Pacor, L. H. Lander, J. M. P. Papenhuijzen, 455.
282. A widely applicable two-parameter viscosity-temperature equation for bitumens, R. Jongepier, B. Kuilman, 460.

(664頁へ)