内圧を受ける二円孔周辺ならびに自由面近傍の 円孔周辺における応力状態*

花 崎 紘 一** 伊 藤 一 郎**

Stresses around One Hole or Two Holes Subjected to Internal Pressures
in Semi-Infinite or Infinite Medium

by

Koichi HANASAKI and Ichiro ITO

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

The formulas for the numerical determination of stresses in an infinite elastic medium having two circular holes of different diameters subjected to different hydrostatic pressures on their walls, have been deduced from the well-known Airy's stress function represented by the bipolar coordinate system.

Modifying the above formulas, we can also determine the stresses in a semi-infinite elastic medium having a circular hole closed to the straight boundary, under the cases of loading on both the walls of the hole and the straight boundary, and of loading on either of them.

In the present study, we calculated the stresses in an infinite or a semi-infinite medium under the above mentioned conditions using the formulas, and discussed the results of the stress analysis. Some examples of the results obtained are as follows:

(1) In the case of the infinite medium having one hole subjected to hydrostatic pressure and another hole with free surface, unless the interval of their holes is extremely small, the maximum tensile stress on the wall of the hole subjected to pressure does not occur at the intersection (A) of the wall and the line through the center of their holes, but occurs at the point having the value of $\theta=30^\circ\sim 60^\circ$ (Fig. 2, ~4).

(2) In the case of the infinite medium having two holes subjected to equal pressure, the maximum tensile stress occurs at the inner intersection of the wall of the smaller diameter hole and the line through the center of two holes (Fig. 8, 9).

(3) In the case of the semi-infinite medium having a hole subjected to pressure, the maximum tensile stress on the wall of the hole occurs at the point having the value of $\theta=80^\circ\sim 90^\circ$ (Fig. 11).

(Received Oct. 6, 1971)

1 緒 言

無限の広がりをもつ弾性体内部に設けられた相隣り合う二つの円孔のまわりの応力状態の解析は、種々の分野において、それぞれの目的に応じて行なわれている。たとえば、外圧は地圧を受ける地中に開設された2本の隣接トンネルの安定性を検討するために適当な境界条件のもとに応力解析を行なっている¹⁾。また、山口らは特殊爆破法(スームプラスティング)の破壊機構を論ずるため、無限媒質内に存在する半径の等しい2円孔の壁面に等しい大きさの圧力が作用したときの応力解析を行なっている。また、自由面近傍の円孔の壁面のみに圧力が作用したときのその周辺の応力解析は、一自由面爆破の破壊機構の究明を目的として、すでに村田および筆者らによって行なわれている^{2), 3), 4)}。

今回、筆者らは特殊爆破法の効果の検討、あるいは、海底岩石の爆破機構の究明などに資する目的で、円孔内壁に圧力が作用する場合の応力解析をさらに一般化し、半径が異なる大きさをもつ2円孔のそれぞれに任意の圧力が作用する場合について、それらの半径および、2円孔間の距離などの関係を変化させた種々の

* 原稿受理 昭和46年10月6日

** 正 会 員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

件を示す数字である．また各曲線は，適当な等間隔の横軸の値に対する縦軸の値をプロットし，それらの点を線分で結んだ折線である．したがって，その節と節の間の部分の値は不正確になっていることを断っておく．（このことはFig. 3～13についても同様）なお，Fig. 2の横軸は，Fig. 1に示したように，点Aから点Bの方向へとった距離 y を壁面間隔 W で除した値である．同様にFig. 3は，Fig. 1に示したCD線上の点に生ずる応力状態を条件EおよびJの場合について示したものであって，横軸はFig. 1に示したように，点Cから点Dの方向へとった距離 y' を円孔Iの半径 r_I で除した値である．

Fig. 3. Effects of y'/r_I on σ_x/P and σ_y/P . ($P_I=P$, $P_{II}=0$)

さらにFig. 4は，条件E, F, G, Jの場合に内圧の作用する円孔Iの壁面上にどのような応力状態が発生するかを示した図であって，横軸には，Fig. 1に示した角度 θ をとっている．なお，Fig. 2～4の縦軸は，いずれも応力値を円孔Iに作用させた内圧 P で除した値を示している．

さて，最大引張応力が発生する位置が条件によってどのように変化するかについて述べることにする．まず，Fig. 2, 3およびFig. 4に示した条件Jの場合，すなわち $W=16.0r_I$ の場合の応力状態より，この場合には，円孔Iの周辺の応力状態には，隣接孔が存在する影響はほとんど現われていないことがわかる．つぎに，条件FおよびGの場合の応力状態より， W が $1.0r_I \sim 2.0r_I$ 程度の場合には，最大引張応力は，円孔Iの壁面上で θ がほぼ 60° の位置に発生し，その値は円孔IIの半径が大きくなるにつれて大きくなること

Fig. 4. Effects of θ on σ_θ/P . ($P_I=P$, $P_{II}=0$)

がわかる．しかし，条件Eの場合のように W がかなり小さくなると，最大引張応力は，内圧の作用する円孔Iの壁面上ではなく，隣接している内圧の作用していない円孔IIの壁面上の点Bに発生している．すなわち，Fig. 2の条件Eの場合に $y/W=1.0$ の位置に生ずる σ_x/P の値がFig. 4の条件Eの場合に $\theta=60^\circ$ 付近の円弧上の点に発生している σ_θ/P の最高値よりも大きくなっている．さらにFig. 4に示した条件E, F, Gの場合の応力状態より，円孔Iの壁面上で σ_θ/P が最高値を示す位置は r_{II} の大きさによって変化することがわかる．すなわち， r_{II} が小さいときは， $\theta=20^\circ$ の位置で σ_θ/P が最大になるが， r_{II} が大きくなるにつれて σ_θ/P が最大になる位置が移動し， $\theta=60^\circ \sim 80^\circ$ の位置に漸近的に近づいていくことがわかる．さらにまた，Fig. 1に示したA点の接線方向の応力値（Fig. 2に示した $y/W=0$ の位置の σ_x/P の値）に着目してみると， W が大きいときは σ_x/P の値はほぼ1に近いが， W が小さくなるにつれてその値は1より小さくなっていく．また W が一定の場合には， r_{II} が零すなわ

ち、無限媒質中に円孔が一つだけ存在するときには $\sigma_x/P=1$ であるが、 r_{II} が $0.25r_I$ から順次大きくなるにつれて、その値は1よりだんだんと減少してゆく。ところがFig. 2に示した条件Eの場合の解析結果に明らかに現われているように、 r_{II} のある値のところで σ_x/P の値は最小値を持ち、さらにそれより r_{II} が大きくなれば σ_x/P の値は逆にだんだんと増加してゆき、 r_{II} が無限大(条件7)すなわち、半無限媒質内に一つの円孔が存在するという条件になればまた $\sigma_x/P=1$ となることがわかる。しかし、いずれの場合も、A点に生ずる σ_x/P の値は1.0以下である。このことは、内圧の作用する円孔の近傍に内圧の作用しない空孔がある場合には、両孔が極端に近接している場合を除けば、両孔の中心を結ぶ線と内圧の作用する円孔の壁面との交点(点A)から空孔へ向うき裂がまず最初

Fig. 5. Effects of y/W on σ_x/P and σ_y/P . ($P_I=0$, $P_{II}=P$)

Fig. 6. Effects of y'/r_I on σ_x/P and σ_y/P . ($P_I=0$, $P_{II}=P$)

Fig. 7. Effects of θ on σ_θ/P . ($P_I=0$, $P_{II}=P$)

に発生するのではなく、 θ が $30^\circ \sim 60^\circ$ の範囲内にある円弧上の点からまず半径方向のき裂が発生することを示している。

また、Fig. 3 から、Fig. 1 に示した CD 線上の点に生ずる応力値に関しては、 W のいかんにかかわらず、無限媒質中に存在する一つの円孔内に内圧 P を作用させた場合の応力状態（すなわち、 $\sigma_x/P = (y/r_1)^2$ 、 $\sigma_y/P = -(y/r_1)^2$ ）とほとんど差がないことがわかる。

つぎに円孔Ⅱのみに内圧 P を加え、円孔Ⅰには内圧を加えない場合、すなわち、内圧の作用する円孔の半径を変化させ、それに隣接している空孔の半径を一定とした場合の応力状態を示すことにする。

Fig. 5, 6, および Fig. 7 は、それぞれ、Fig. 1 に示した直線 AB 上、直線 CD 上、および空孔である円孔Ⅰの壁面の弧 AC 上の点に生ずる応力状態が各条件によってどのように変化するかを示した図であって、曲線の表示法、縦軸および横軸上に示した値などは、Fig. 2, 3 および Fig. 4 とまったく同じである。

まず、Fig. 5 に示した直線 AB 上の点に生ずる応力状態をみると、孔間隔 W がかなり広い場合（条件 J の場合）には、内圧の作用する円孔上の点 B ($y/W = 1.0$) の応力値の方が、内圧の作用しない円孔の壁面上の点 A ($y/W = 0$) のそれよりも大きな引張応力となっているが、 r_{II} が大きい場合（条件 H 6）には、 W が $4.0 r_I$ 程度であっても内圧の作用しない円孔の壁面上の A 点に生ずる引張応力（その値は、ほぼ $1.7 P$ ）の方が、内圧の作用する円孔の壁面上の応力（Fig. 7 より推測される）よりも大きくなっている。このような現象は、Fig. 2 の条件 E の場合の応力状態および Fig. 5 の条件 F の場合の応力状態に示されているように、内圧の作用する円孔の半径の方が内圧の作用しない円孔の半径より大きいほど、また、 W が小さいほど（ただし、 $W < 4.0 r_I$ ）顕著に現われることがわかる。このことは、このような条件の場合には、内圧の作用する円孔の壁面にき裂が発生する以前に、内圧の作用しない円孔の壁面にき裂が発生することになることを示している。

つぎに、内圧が円孔Ⅰまたは円孔Ⅱのいずれか一つのみに作用している場合の応力状態を解析しておけば、両円孔内に任意の大きさの内圧が作用した場合の応力状態を簡単に求めることができるが、ここではその一例として両円孔内に同じ大きさの圧力 P が作用した場合の応力状態を示しておくことにする。

Fig. 8 は、両円孔内に内圧 P が作用した場合に、Fig. 1 に示した直線 AB 上の点に生ずる応力状態を示したものであり、Fig. 9 は、円孔Ⅰの壁面上の点に発生する応力値を示したものである。Fig. 8 から、次のようなことがわかる。すなわち、Fig. 1 に示す点 A ($y/W = 0$)

Fig. 8. Effects of y/W on σ_x/P and σ_y/P . ($P_I = P$, $P_{II} = P$)

$W = 0$) における引張応力の値は、 r_{II} が小さいときは $1.0 P$ であるが、 r_{II} が大きくなるにつれて大きくなっていく。また、Fig. 1 に示す点 B ($y/W = 1.0$) における引張応力は、 W が大きいときは、ほぼ $1.0 P$ に等しいが、 W が小さくなるにつれて $1.0 P$ より大きくなっていく。

さらに、Fig. 9 をみれば、 W が大きいときは、円孔Ⅰの壁面上の応力分布は $\theta = 90^\circ$ を中心にして Fig. 1 に示す A 点側 ($\theta = 0^\circ$) と C 点 ($\theta = 180^\circ$) 側とはほとんど対称であるが、 W が小さくなるにつれて A 点側の

Fig. 9. Effects of θ on σ_θ/P . ($P_I=P$, $P_{II}=P$)

応力の方が大きくなっていく。

また、最大引張応力は、2円孔の中心を結ぶ線と壁面とが交わる四つの点のうち、半径の小さい円孔の内側の点に生ずることがわかる。

すなわち、 $r_I > r_{II}$ のときはB点に、 $r_I < r_{II}$ のときはA点に最大引張応力が現われる。このことから、両円孔に同じ大きさの内圧を作用させた場合には、き裂が発生するとすれば、まず、半径の小さい円孔の壁面に入ることがわかる。

5 解析結果および考察 (その2)

この節においては、半無限媒質の境界面 (自由面と呼ぶ) の近くに一つの円孔が存在する場合、すなわち、

Table I における E7, F7, G7, H7, I7, J7 の条件の場合の応力解析結果とその考察について述べる。

まず、円孔にのみ内圧 P を作用させ、自由面には圧力を作用させない場合について述べる。この場合は r_{II} を無限大にした場合であり、Fig. 10 および Fig. 11 はそれぞれ Fig. 1 における直線 AB 上の点および弧 AC の点に生ずる応力の値 W をパラメータとして示したものである。(Table I 参照)

Fig. 10 をみると、 W が小さいときは、円孔から自由面にかけて引張応力が単調に増加してゆくが、 W が大きくなると、円孔と自由面の中間では低い引張応力値を示すようになることがわかる。

また、Fig. 11 によれば、円孔の壁面上で最大の引張応力が生じる点の θ の値は、 W が大きいときは約 90° であるが、 W が小さくなるにつれて θ の値は小さくなっていくことがわかる。

つぎに、自由面のみに圧力 P を加え、円孔には圧力

Fig. 10. Effects of y/w on σ_x/P and σ_y/P . ($P_I=P$, $P_{II}=0$)

Fig. 11. Effects of θ on σ_θ/P . ($P_I=P$, $P_{II}=0$)

を作用させない場合について述べる. この場合のように自由面に載荷される場合, 対象としている媒質は平面ひずみ状態にあると考えられ, したがって, 側方の無限遠点に有限の応力が現われるから, その応力状態を定めなければならないが, これは自由面の加圧力と媒質のポアソン比によって定まる.

Fig. 12 および Fig. 13 は, 媒質のポアソン比が 0.25 のとき (したがって無限遠点の主応力は $-P$ および $-P/3$) の直線 AB 上の点および弧 AC 上の点

Fig. 12. Effects of y/W on σ_x/P and σ_y/P . ($P_I = 0$, $P_{II} = P$)

Fig. 13. Effects of θ on σ_θ/P . ($P_I = 0$, $P_{II} = P$)

に生ずる応力値を示したものである.

これらの図からわかるように, 引張応力が現われるのは, W が小さいときの Fig. 1 における A 点付近と C 点付近のみであり, 他の点に生ずる応力はすべて圧縮応力であることがわかる. また, $W = 16.0 r_I$ のときは (J7 の場合), 無限媒質内に一つの円孔がある場合の円孔付近の応力状態とほとんど一致しており, W がこの程度の値 ($W/r_I = 16$) となれば, 円孔の付近の応力状態は自由面の影響をほとんど受けないと考えてさしつかえないように思われる.

つぎに, 円孔および自由面にそれぞれ異なる圧力を加えた場合の応力状態は, 上記の二つの条件に得られた応力解を適当に重ね合わせて求めることができる. この場合の一例として, ポアソン比が 0.25 の媒質で, $r_I = 1.0$, $W = 4.0$ という条件のもとで円孔壁面に圧力 P_I および自由面に圧力 P_{II} を加えた場合の円孔周辺と自由面近傍に生ずる主応力の方向について考察する.

一般に, 任意の点の座標を (x, y) とし, その点における最大主応力の作用する面と x 軸とのなす角を α とすれば, α は x および y の関数であるから

$$\tan \alpha \equiv \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

という関係が成立する. したがって, 考えている境界条件のもとで, (1) 式の微分方程式の解として得られる積分曲線は, 最大主応力面を順次滑らかな曲線で結んだものと一致する. Fig. 14 は, 上述の境界条件のもとに, (1) 式を数値計算 (ルンゲクッタ・ジル法) により解いて得られた積分曲線である.

さて一般に, 円孔付近の最大主応力は引張応力であ

Fig. 14. Profiles of the faces to which the maximum principal stresses act.

ることを考慮すれば、媒質が岩石のように引張強度が著しく小さいものであれば、破壊は少なくとも円孔付近では Fig. 14 に示した曲線に添っておくものと考えられる。さらに、円孔からはなれたところでも、これらの曲線にそって破壊が行なわれるものと仮定すれば、たとえば海底の岩石を爆破により破壊するときのように、自由面に圧力が加わっている場合は、自由面に圧力が加わっていない空中での岩石爆破の場合と異なった破壊の様相を示すであろうと考えられる。

6 結 言

この論文では、近接した二つの円孔のまわりの応力状態について、とくに最大引張応力がどのような点に生ずるかを重点的に考察した結果を述べた。これは、媒質として引張強度が著しく小さい岩石などを前提としたからであって、このような媒質内の、構造物の安全性を検討する場合、また逆に、破壊を目的とする場合などには、本論文で指摘した点に生ずる応力値に注

目しなければならないものとする。

最後にこの研究結果について有益な助言をいただいた京都大学工学部佐々宏一講師およびデータ整理を手伝っていただいた伊藤勝久氏に謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 外尾善次郎, 日本鉱業会誌, **75**, 201 (1959).
- 2) 山口梅太郎, 下村弥太郎, 工業火薬協会誌, **30**, 71 (1969).
- 3) 村田 勉, 田中一三, 工業火薬協会誌, **15**, 294 (1954).
- 4) 花崎紘一, 伊藤一郎, 水曜会誌, **17**, 61 (1970).
- 5) Jeffery, G. B., Phil. Trans. R. S. London Vol. A, 221 (1921).
- 6) 宮尾嘉寿, 岩城敏博, 日本機械学会論文集, **36**, 2041 (1970).
- 7) 花崎紘一, 伊藤一郎, 水曜会誌, **17**, 270 (1972).