ポアソン比変化の考えを基にした複合材料 における破壊機構に関する研究*

藤 井 太 一** 水 川 清** 座 古 勝***

Study on Fracture Mechanism for Composite Materials Based on the Concept of the Change in Poisson's Ratio

by

Taichi FUJII, Kiyoshi MIZUKAWA and Masaru ZAKO

(Faculty of Engineering, Osaka City University, Osaka)

In our previous paper, the dynamical mechanical model under the uni-axial load has been established and the theoretical analysis showed good agreements with the experimental results. This paper presents the multi-axial model which is developed to analyze the behavior of composite materials. As a result of the study Poisson's ratio was found to be the stress dependent and a new concept regarding composite materials was suggested. Furthermore, the behavior of fracture mechanism for composite materials became clear using the mechanical model presented here.

(Received June 10, 1972)

1 緒 言

複合化により、材料の強度ならびに他の機械的、物理的、化学的諸性質が向上し、構造材料、機械材料のみならず数多くの分野で使用されている。一方、複合化の開発も各分野にわたり行なわれており、より高度な複合材へと進展しつつある。それだけに種々な問題点も数多く生じているようである。

著者らは、古典材料力学が、専ら純粋な材料について考えられ、位置づけされたように考える。したがって、複合化された材料については、このような古典的材料力学では記述できない事柄があると思われる。たとえば、複合法則による強度計算、ポアソン比等である。前者については、マトリックス材および強化材より推測される値と一致しなく、後者については、測定方法が色々あり、どの値が真の値であるかは不明のようである。しかし、この値は、材料が弾性限度内にある時は、一定であり、それゆえ、応力-ひずみ関係の二次元、三次元化を簡単にしている。ところが、ガラス繊維強化樹脂材料のように引張試験において、弾性限界が明確でなく、単に、knee-pointが生ずるような材料では、ポアソン比を、縦ひずみと横ひずみの比で表わす事に疑問があるように思われる。

前者の複合法則等については、かなり数多くの研究

者によって討論されているが、後者については、数少ないようである。

かかる理由により、著者らは、複合材料に対する新たな考察が必要と考え、ここに、複合材のポアソン比について記述する。

2 理 論

以前に、Fig. 1に示すようなモデルを、複合材料に対する力学的モデルとして提案し種々な現象について論述した^{2,3)}。また、Fig. 1のモデルを三次元化し、上記の現象の一般論を展開しようと試みた⁴⁾。その三次元モデルをFig. 2に示す。その際、瞬間負荷によるひずみは、

Fig. 1. Dynamical mechanical model proposed for composite material.

* 原稿受理 昭和47年6月10日

** 正 会 員 大阪市立大学工学部 大阪市住吉区杉本町

*** 学生会員 大阪市立大学工学部 大阪市住吉区杉本町

Fig. 2. Three-dimensional visco-elasto-plastic mechanical model for composite material.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^* &= \frac{\eta_x E_x + 6K\eta_x}{9K\eta_x E_x} \sigma \\ \epsilon_y^* &= \frac{\eta_y E_y - 3K\eta_y}{9K\eta_y E_y} \sigma \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし, ϵ_x^* , ϵ_y^* : 瞬間負荷に対する縦ひずみ, 横ひずみ

η_x , η_y : 粘性係数

E_x , E_y : 弾性係数

K : 体積弾性係数

σ : 応力

となり, 力学的モデル中の spring 定数 (E_x , E_y) および, slider 係数 (s_x , s_y) を用いて表わすと,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^* &= \frac{s_x}{(E_x s_x + 1)} \sigma \\ \epsilon_y^* &= \frac{s_y}{(E_y s_y + 1)} \sigma \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

として, 表わされる事を証明した. そこで今回は, 任意負荷速度によるひずみを, 瞬間負荷によるひずみとの関係を明らかにし, 負荷速度とポアソン比の関係について記述する.

Fig. 2 のモデルを, Fig. 3 に示すごとく, 二次元化して考える. このモデルにおいて, σ_x なる応力が負荷された場合, 次式が成立する.

Fig. 3. Two-dimensional dynamical mechanical model for composite material.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + s_x \eta_x \dot{\sigma}_x &= \frac{9KE_x}{E_x + 6K} \epsilon_x + \frac{9K(E_x s_x + 1)\eta_x}{E_x + 6K} \dot{\epsilon}_x \\ \sigma_y + s_y \eta_y \dot{\sigma}_y &= \frac{9KE_y}{E_y - 3K} \epsilon_y + \frac{9K(E_y s_y + 1)\eta_y}{E_y - 3K} \dot{\epsilon}_y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで, 任意負荷速度による解を求めるために, 上式において, 負荷応力が, $\sigma = a_0 \tau$ なる ramp 入力として, $\tau = t$ において, $\sigma = \sigma_0$ なる応力値に達し, すべりの応力依存性を

$$s_x = s_y = \alpha e^{n\sigma} \quad (4)$$

ただし, α , n : 定数

と仮定すると, (3)式の解は次のようになる.

$$\epsilon_x = \exp. \left(- \int_0^t \frac{E_x}{\eta_x (E_x \alpha e^{na_0 \tau} + 1)} d\tau \right) \left\{ \int_0^t \frac{a_0 (E_x + 6K) (\tau + \alpha e^{na_0 \tau} \eta_x)}{9K\eta_x (E_x \alpha e^{na_0 \tau} + 1)} \cdot \exp. \left(\int_0^t \frac{E_x}{\eta_x (E_x \alpha e^{na_0 \tau} + 1)} \cdot d\tau \right) \cdot d\tau \right\} \quad (5)$$

ここで, $z = \exp. (na_0 \tau)$ とおくと, (5)式は, 次のようになる.

$$\epsilon_x = \frac{a_0 (E_x + 6K)}{9K\eta_x na_0} \exp. \left(- \frac{E_x}{\eta_x na_0} \int_0^T \frac{1}{(E_x \alpha z + 1)} \cdot dz \right) \cdot \left\{ \int_1^T \frac{\log z + \eta_x \alpha z}{(E_x \alpha z + 1)z} \cdot \exp. \left(\frac{E_x}{\eta_x na_0} \int_1^T \frac{1}{(E_x \alpha z + 1)z} \cdot dz \right) \cdot dz \right\} \quad (6)$$

ただし, $T = \exp. (na_0 t)$

本論文に対する実験材であるガラス繊維強化ポリエステル樹脂材料については, $E_x/\eta_x \ll 1$ ($E_x = 1000 \text{ kg/mm}^2$, $\eta_x = 10^7 \text{ poise}$)³⁾ であるので, (6)式は, 次のように簡化される.

$$\epsilon_x = \frac{a_0 (E_x + 6K)}{9K\eta_x na_0} \int_1^T \frac{\log z + \eta_x \alpha z}{(E_x \alpha z + 1)z} \cdot dz \quad (7)$$

さらに, 簡化のために, (7)式の積分項を $R(T)$ とおくと,

$$\epsilon_x = \frac{(E_x + 6K)}{9K\eta_x} R(T) = \frac{E_x}{\eta_x} \left(\frac{\eta_x E_x + 6K\eta_x}{9KE_x \eta_x} \right) R(T) \quad (8)$$

ただし

$$R(T) = \frac{1}{n} \int_1^T \frac{\log z + \eta_x \alpha z}{(E_x \alpha z + 1)z} \cdot dz \quad (9)$$

となる. ここで, (1)式を用いると, (8)式は,

$$\epsilon_x = \epsilon_x^* \frac{E_x}{\eta_x} \cdot \frac{R(T)}{\sigma} \quad (10)$$

となる. (10)式が, 任意負荷速度によるひずみ (ϵ_x) と瞬間負荷によるひずみ (ϵ_x^*) との関係式である.

同様に, (3)式より, ϵ_y を求めると,

$$\epsilon_y = \epsilon_y^* \frac{E_y}{\eta_y} \cdot \frac{R(T)'}{\sigma} \quad (11)$$

となる. ただし

$$R(T)' = \frac{1}{n} \int_1^T \frac{\log z + \eta_y \alpha z}{(E_y \alpha z + 1)z} \cdot dz \quad (12)$$

である。

したがって、任意負荷速度によるポアソン比は、

$$\begin{aligned}\nu_{xy} &= \left| \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \right| = \frac{\epsilon_y^* E_y \eta_x R(T)'}{\epsilon_x^* E_x \eta_y R(T)'} \\ &= \nu_{xy}^* \frac{E_y \eta_x}{E_x \eta_y} \frac{R(T)'}{R(T)} \\ &= \frac{s_y (E_x s_x + 1) E_y \eta_x R(T)'}{s_x (E_y s_y + 1) E_x \eta_y R(T)}\end{aligned}\quad (13)$$

となる。

今回の実験材料は、ロービングガラスクロス繊維強化ポリエステル樹脂材料、マットガラス繊維強化ポリエステル樹脂材料を使用した。周知のごとく、これらの材料は、直交異方性体、等方性体材料とされている。よって、これらの材料については、(13)式において、 $R(T) = R(T)'$ 、 $E_x = E_y$ 、 $\eta_x = \eta_y$ となり、ポアソン比は、

$$\nu_{xy} = \frac{s_y (E_x s_x + 1)}{s_x (E_y s_y + 1)} \quad (14)$$

となる。

結局、異方性材料における任意負荷のポアソン比は、(13)式によって表現され、一方、等方性、直交異方性材料においては、(14)式で表現される。

一般に、単軸引張試験を行なう場合、き裂が荷重方向に対して、垂直に発生、進展し、荷重方向には、き裂等が発生し難い事が認められる。しかし、破断直前においては、繊維と樹脂間にはく離が、垂直方向のみならず、荷重方向にも発生し、複雑な破壊状態を呈する。ここに提案したモデルでは、破断を考えるには、困難な点が多い。そこで、今回は、破断前迄の力学的挙動を考える事とし、き裂の進展およびはく離が、荷重方向に対して、垂直方向のみ発生すると仮定すれば、 s_x 、 s_y の slider 係数は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}s_x &= \alpha \cdot e^{n\sigma} \\ s_y &= \beta \cdot \alpha\end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ただし、 n 、 α ：定数

σ ：応力

β ：縦横寸法効果を表わす係数（等方性体の場合は $\beta = 1$ ）

(15)式を(14)式に代入すると、

$$\begin{aligned}\nu_{xy} &= \frac{\alpha \beta E_x}{(\alpha \beta E_y + 1)} + \frac{\beta}{e^{n\sigma} (\alpha \beta E_y + 1)} \\ &= K + \varphi e^{-n\sigma}\end{aligned}\quad (16)$$

ただし、

$$K = \frac{\alpha \beta E_x}{(\alpha \beta E_y + 1)}, \quad \varphi = \frac{\beta}{(\alpha \beta E_y + 1)}$$

(16)式が単軸負荷によるポアソン比と応力の関係式である。

3 実験方法および結果

3.1 $R(T)$ 値について

本理論で最も重要な事柄は、瞬間負荷と任意負荷に

よるひずみを応力の関係式が、(10)式で表わされる事である。したがって、この式の成立いかんを確認する必要がある。

(10)式において、積分項 $R(T)$ を実際計算し、その値と、 ϵ_x 、 ϵ_x^* 、 η_x 、 E_x 、 σ から得られる値を比較し、双方の値が等しいならば

$$R(T) = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_x^*} \frac{\eta_x}{E_x} \sigma \quad (17)$$

となり、(10)式成立の確認ができる。

$R(T)$ なる積分項は、(9)式より、

$$R(T) = \frac{1}{n} \int_1^T \frac{\log z + \eta_x \alpha z}{(E_x \alpha z + 1) z} \cdot z dz$$

であるから、部分分数に分割し計算すると、

$$\begin{aligned}R(T) &= \frac{1}{n} \left\{ \int_1^T \frac{\log z}{z} \cdot dz - \int_1^T \frac{E_x \alpha \log z}{(E_x \alpha z + 1)} \cdot dz \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta_x}{E_x} \int_1^T \frac{E_x \alpha}{(E_x \alpha z + 1)} \cdot dz \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \left[\frac{(\log z)^2}{2} \right]_1^T + \frac{\eta_x}{E_x} \left[\log(E_x \alpha z + 1) \right]_1^T \right. \\ &\quad \left. - E_x \alpha \left[\frac{1}{E_x \alpha} \log z \cdot \log(E_x \alpha z + 1) - z \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{E_x \alpha z^2}{2^2} - \frac{(E_x \alpha)^2 z^3}{3^2} \right]_1^T \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{(\log T)^2}{2} + \frac{\eta_x}{E_x} \log \frac{(E_x \alpha T + 1)}{(E_x \alpha + 1)} \right. \\ &\quad \left. - \log T \log(E_x \alpha T + 1) + E_x \alpha T \right. \\ &\quad \left. - \frac{(E_x \alpha T)^2}{4} + \frac{(E_x \alpha T)^3}{9} - E_x \alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{(E_x \alpha)^2}{4} - \frac{(E_x \alpha)^3}{9} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{n^2 \sigma^2}{2} + \frac{\eta_x}{E_x} \log \frac{(E_x \alpha e^{n\sigma} + 1)}{(E_x \alpha + 1)} \right. \\ &\quad \left. + E_x \alpha \left(\frac{E_x \alpha}{4} - 1 + e^{n\sigma} - \left(\frac{E_x \alpha}{4} e^{2n\sigma} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{E_x^2 \alpha^2}{9} e^{3n\sigma} - \frac{E_x^2 \alpha^2}{9} \right) \right. \\ &\quad \left. - n\sigma \log(E_x \alpha e^{n\sigma} + 1) \right\}\end{aligned}\quad (18)$$

となる。

(18)式により、 $R(T)$ 値を数値計算により求め、(17)式の右边を比較するのであるが、(18)式には、 n 、 α なる定数が含まれ計算する事ができない。それゆえ、これらの定数を決定する必要がある。 n 、 α なる定数は、次のように決定される。すなわち、材料の破断の表現を、slider が零となった時とすれば、破断直前においては、spring のみが作用する事になる。よって、破断直前における応力-ひずみ曲線の接線こう配が E (spring 定数) となり、各応力時のひずみより S の応力依存性が算出される。計算結果を Fig. 4 に示す。

Slider の応力依存性は、(15)式より、

$$s = \alpha e^{n\sigma}$$

Fig. 4. The relation between the coefficient of slider and stress.

である。よって、両辺の対数をとれば

$$\log s = \log \alpha + n\sigma \quad (19)$$

となり、Fig. 4の結果と良く一致する。しかし、破断直前では、 s の値が急変し計算式とよく一致しないが、破断直前の断面積はかなり小さくなっていると考えれば、Fig. 4の横軸を真の応力にとれば、破断にいたるまで(19)式で表現できると考える。

Fig. 4と(19)式より、 $\sigma=0$ 時の s が α であり、直線の傾きが n である。 α 、 n の算出結果を Table I に示す。

試験機は、島津オートグラフ、試験片形状は、AS TM 引張試験規格によった。また、応力-ひずみ線図は、X-Y recorder にて、標点距離 50 mm の差動トランスにより得た。試験片構成は Table II に示す。

Table I. The values of n and α which are obtained from Fig. 4.

	n	α
No. 1	0.410	8.1×10^{-4}
No. 2	0.230	9.3×10^{-4}
No. 3	0.831	10.0×10^{-4}

Table II. Composition of test specimens.

Number of test specimen	Kind of matrix	Kind of glass
No. 1	Polyester	Roving glass cloth (10 plies)
No. 2	Polycarbonate	Roving glass cloth (10 plies)
No. 3	Epoxy	Parallel (8 plies)
No. 4	Polyester	Mat glass (8 plies)

Table I に示す諸値を用い(18)式より各応力における $R(T)$ を求め、(17)式の右辺と比較する。結果の一例を Fig. 5 に示す。なお Table I 以外にこの計算に用いた ϵ_x^* 、 η_x 、 E_x の値は Table III に示す。

Fig. 5 により明らかなように瞬間ひずみを任意負荷速度ひずみとの間には、(10)式が成立する事が認められる。

Fig. 5. The comparison of experimental result and calculated result by Eq. 18.

Table III. The values of η_x , E_x , and ϵ_x^* at each stress.

Stress (kg/mm ²)	ϵ_x^*
2	1.3×10^{-1}
3	1.91
4	2.56
5	3.18
10	5.74
11	6.39

$$\eta_x = 10^7 \text{ poise}$$

$$E_x = 780 \text{ kg/mm}^2$$

3・2 σ - ϵ 関係

Table I の数値を用い、直接(3)式の微分方程式を電子計算機により、Runge-Kutta-Gill の方法を用い σ - ϵ の解を得た。Fig. 6 は、計算結果と引張試験より得られた σ - ϵ 曲線を示す。両者が良く一致し、knee-point も(3)式によって表現できる事を示している。

以上の事柄から、瞬間負荷（衝撃等）と任意負荷速度によるポアソン比の関係は、(13)式によって表わされ、特に、等方性、直交異方性材の場合は、(10)式によって表わされる事が判明した。

Fig. 6. The diagram of σ - ϵ in experimental and computational results.

3・3 ポアソン比と応力の関係

単純引張りでは、前述のごとく、いくつかの仮定を

Fig. 7. The relation between Poisson's ratio and stress and calculated results.

Fig. 8. The relation between Poisson's ratio and stress and calculated result.

設ける事により、(14)式は(10)式のごとく簡化される。

Table I の値を用い、(10)式よりポアソン比の応力依存性を計算する事ができる。Fig. 7 および 8 は、実験結果ならびに計算結果を示す。

試験機は島津オートグラフ、ポアソン比は、試料表面上に貼り付けた二軸ストレインゲージにより得た。

3・4 負荷速度の影響

負荷速度の影響は、引張速度を変化させ、前述と同様の方法にて、ポアソン比を算出し、ポアソン比と応力の関係を求めた。

Fig. 9, 10 にその結果を示す。

Fig. 9. The relation between Poisson's ratio and stress of roving glass cloth laminated polyester resin at each tensile velocity.

Fig. 10. The relation between Poisson's ratio and stress of glass mat laminated polyester resin at each tensile velocity.

ロービングクロス基材の場合は、負荷速度が大きくなる程、低応力時における変化が急激である。一方、マット基材については、変化の様子は、ほとんど変わらず単に平行移動した形となっている。

4 考 察

一連の実験結果より明らかなように、ポアソン比の変化は、ガラス繊維材の差異により、かなりの違いがある。(10)式における係数、 α 、 n 、 β の影響を計算し、上記の事柄について考察する。

Fig. 11 は、 α の影響について示す。 α 値の大小は、(10)式からも明らかなように、slider の初期値の大小を表わす。この図において、 α が大なる程、低応力時の変化が大きくなっている。これは、材料中のすべり機構が多く介在し、その結果、低応力時に大きな変化が生じたと考えられる。

Fig. 12 は、 n の影響を示す。 n が大きい程、変化

 Fig. 11. The effect of n and α on the relation between Poisson's ratio (ν) and stress (σ).

Fig. 12. The effect of only n on σ - ν diagram.

は、低応力時で生じ、高応力時では一定値を示す。一方、 n が小さい場合は、変化が、緩慢であり、全応力にわたって変化している。この n の大小は、(19)式から明らかなように、破壊進展の速さを表わしている。

以上の事柄を要約すると、 α が大なる事は、すべりの初期値が大なる事であり、材料成型時において、樹脂等の含浸不良を生じ易い事を示す。一方、 n が大なる事は、き裂、はく離等が速やかに進展する事を示す。これらの事から、ロービンググラスクロス基材とマット基材における破壊機構と考えると、Fig. 9, 10において、グラスクロス材の方が、マット材よりも、ポアソン比の変化が低応力時で生じ、高応力時では一定値をとる傾向がある。すなわち、ロービングクロス材では、マット材に比して、 α , n 共に大なる事になり、ロービングクロス材は、マット材よりもき裂、はく離の進展が早く、成型時の含浸不良を生じ易い事を表わしている。

き裂の進展については、ロービングクロス材で強化された材料では、き裂およびはく離が繊維束に沿って進展し、マット材で強化された材料では、短繊維が互いに交差しているためにき裂およびはく離が停留するのではないと思われる。

Fig. 13 は、試験片幅 β の影響を示す。この図より

Fig. 13. The effect of aspect ratio on Poisson's ratio.

明らかなように、幅(β)が増加する程ポアソン比が増加し、ある β 以上では、一定値を示す傾向にある。ただし β の影響を調べる時は、応力一定値で行なう必要がある。

Fig. 14 は、東大工学部竹鼻・金原らによって得られた試験片幅とポアソン比の影響を示す。この図で、幅 30 mm までは、ポアソン比が増加し、Fig. 13の結果と良く一致しているが、幅 30 mm 以上では、減少している。これは、試験片における横方向の拘束と考えられるが、幅が広い場合、チャックの影響も介入したのではないと思われる。したがって、これらの影響が介入しないような測定法を考える必要がある。いずれにせよ、(19)式によって試験片幅の影響もある程度記述できると考える。

Fig. 14. The experimental result for the relation between Poisson's ratio and width of specimen (by Kimpara-Takehana).

5 結 言

本論文は、複合材料を、一応、強化材、マトリックス材の2つに大別し論述した。もちろん、強化材としては、マット、ロービング等、マトリックス材としては、エポキシ、ポリエステル等数多くあるが、複合材として大別すれば、上記の2種類と考えられる。当然、この中には、界面等の問題も介入するが、これらの事柄と、き裂、はく離等を含めて n , α なる係数によって、異材料の挙動を説明しようと試みた。また、これに加えて、ガラス含有量等の問題も考えられるが、 η や E なる値によって考慮できると考える。ただし、問題の複雑さを避けるため、本論文では η および E を一定とした。しかし、2軸試験においては、異方性の影響が現われるので、 E , η 共に変化して考える必要がある。紙面の関係上、2軸試験については、次に譲る。

以上のごとく、力学的モデルにより複合材料の挙動を解析する事は、かなり有効な手段と考える。

最後に本理論に対し、ご指導を賜った京大工学部得丸英勝教授に対し、ここに厚く謝意を表します。

(昭和47年3月29日 第1回 FRP シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) たとえば, 林 毅, 日本機械学会誌, **71**, 19(1968);
林 毅, 複合材料工学 (1970) 日科技連
- 2) 藤井太一, 水川 清, 座古 勝, 材料, **20**, 1120(1971).
- 3) 藤井太一, 水川 清, 座古 勝, 日本機械学会関西支部
講演論文集, No.110 (1971).
- 4) 藤井太一, 水川 清, 座古 勝, 日本機械学会講演論文
集, No.720-2 (1972).
- 5) Broutman, L. J., Modern Composite materials, Addi-
son-Wesley Publish (1967).
- 6) 竹鼻三雄, 金原 勲, 第15回材料研究連合講演会論文集
(1971).