円孔をもつ四角柱の熱応力集中問題に及ぼす偶応力の影響*

竹内 洋一郎** 野田 直剛** 矢野 進***

Influence of Couple-Stresses on Thermal Stress Concentration in a Square-Prism with a Circular Hole

by

Yoitiro TAKEUTI, Naotake NODA and Susum YANO

(Faculty of Engineering, Shizuoka University, Hamamatsu)

In the last few years considerable attentions have been given by many investigators to the couple-stress theory. The couple-stress theory considers that, within an elastic body, the surface of each material element is subjected not only to the normal and tangential forces but also to the moment per unit area. Such an assumption seems appropriate for materials with granular or crystalline structure.

Applying Mindlin's and Nowacki's theories, in this paper, we solved the problem about the effect of couple-stress on the thermal stress distribution in a polygonal prism with a central circular hole under a stationary temperature distribution. The result shows that, by taking couple-stresses into account, the stress-concentration factor is obviously reduced from the value accepted in classical theory.

(Received Oct. 25, 1972)

1 緒 言

近年工業材料の多種多様化により、古く Cosserat 兄弟によって提起されていた偶応力理論が注目されるようになった。加えて理論解析および実験解析の厳密化あるいは強い高周波の存在する電磁場での機械・構造物の使用環境の拡大、破壊力学における転位論からデイスクリネーション (disclination) への進展などに伴って、偶応力理論の解析的研究が多数発表されるに至った。このなかでもっとも支持の多い Mindlin¹⁾ 解析理論を適用し、Nowacki²⁾ の熱弾性論への拡張を利用し、機械・構造物に應用の広い形状で、しかも解析的に解くことに著しく困難があるといわれている円孔をもつ四角柱の熱応力問題の解析を行ない、その結果において多くの関連性について検討した。偶応力理論は物体の微小要素の各面あるいは外部との境界面を通じて、通常考えられている単位面積当たりの力の作用のほかに、単位面積当たりの偶力の作用も考慮に入れることである。このことは力学的立場からみると、力と偶力は対等の二要素であるから、考え方としては当然な根底である。また重力などの体積力の考慮と同

時に電磁場は宇宙全体に広がっていることから、体積偶力の考慮も必要であって、強い電磁場における誘電材料では、体積偶力の影響が応力の次元より大きくなることもあり、このような場合通常偶応力も考慮する必要がある。また変形理論の立場からみても、線型微小変形に限定しても微小要素の各片が曲率を生じることも考えても不自然でない。すなわち回転成分のこう配として曲率成分を定義するとき、偶応力（あるいはモーメント応力）成分はこの曲率成分と直線関係（線型比例）の成立を基礎式として、Mindlin は平面ひずみ問題において、Airy の応力関数に対応する Mindlin の偶応力関数の体系化に成功した。この Mindlin の偶応力関数は、その後の偶応力解析の基礎微分方程式として広く採用されており³⁾、Bert は極座標系の一般解を誘導している。Mindlin は一方、応力集中問題において理論解析の結果と、実験解析の結果にわずかな差が生じることもあることに注目し、その原因として偶応力理論を適用し、理論解析値を修正すれば両者が適合することを述べている。このことの正当性はなお多くの実験と解析の結果で吟味しなければ判明しないが、一つの理論解析の厳密化へのアプローチであると考えられる。偶応力を理論的に定量的解析するために、新しい材料定数 l を定義し、線型弾性理

* 原稿受理 昭和47年10月25日

** 正 会 員 静岡大学工学部 浜松市城北

*** 静岡大学大学院 浜松市城北

論における応力-ひずみ関係式のほかに、偶応力-曲率関係式の存在を仮定し、本研究では従来の諸報告と同様に、 l をこの後者の関係式の比例定数に結びつける。すなわち、偶応力-曲率の線型関係の比例定数として4Bの記号を用い、このBを剛性率 G で割ったものを l^2 と定義する考えが、現在多くの報告に認められている。しかし l を実際に正しく測定されたデータはまだほとんど見あたらず、わずかに推測値が発表されているにすぎない。この l は一般に小さい値と予測されているが、対象とする物体内の最小の長さをもつ量との比較において、偶応力論の影響が論じられることが多い。本研究では穴半径との比において考察したが、たとえばクラックの応力集中問題では、クラックの伝ばの尖端の曲率半径との比において影響を論じるときには、偶応力論は重要である。以上の考察により将来において l の正確なデータが得られたとき、偶応力の影響は材料の強度を示す資料に判然と表われてくると考えられる。それまでは有孔板の応力集中問題で、従来生じている理論解析と実験解析のくいちがいのうち、最大応力の大きいのがいおよびその発生位置のずれの生じることの、補足説明の一つの手段として偶応力論の効果が示されよう。偶応力論が実際に対象となる可能性の多い物体として、多結晶金属、土砂などの粒状体、鉄筋コンクリートなどのせんい状物体があげられている。本報告ではしばしば工学的に応用される領域の熱応力問題と同様に、偶応力を考慮すれば応力集中が緩和される結果を得た。

2 解 析

偶応力を考慮した平面ひずみ熱応力問題の基礎式はつぎのようになる。いま変位成分を u 、 v とすれば、曲率成分 K_x 、 K_y 、偶応力成分 μ_x 、 μ_y は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xx}}{\partial y} \\ K_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial e_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial e_{yy}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu_x &= 4BK_x, & \mu_y &= 4BK_y \\ &= 2El^2 K_x / (1+\nu), & &= 2El^2 K_y / (1+\nu) \end{aligned} \quad (2)'$$

ただし、 e_{xx} 、 e_{yy} 、 e_{xy} はひずみ成分、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比である。

Airyの応力関数 χ 、Mindlinの偶応力関数 ψ について成立する関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \chi &= 0 \\ \Delta(\psi - l^2 \Delta \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

共役関係式、³⁾

$$\frac{\partial}{\partial r}(\psi - l^2 \Delta \psi) = -2l^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ (1-\nu) \Delta \chi + \alpha_t E \tau \} \quad (4)$$

*1 (3)式の第1式は熱発生が無い定常温度分布状態の場合である。

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi - l^2 \Delta \psi) = 2l^2 \frac{\partial}{\partial r} \{ (1-\nu) \Delta \chi + \alpha_t E \tau \} \quad (4)$$

ただし、 Δ は極座標のラプラシアン、 α_t は線膨張係数、 τ は温度変化である。

境界条件としては、Fig. 1の領域において、温度に対しては内側境界($r=a$)で $\tau=T_0$ 、外側境界($x=b$)で $\tau=0$ の定常温度場、外力に対しては領域の内外両境界とも自由境界とする。

Fig. 1. Square region with a circular hole.

以上の条件のもとで、(3)式を解くと、⁵⁾ $\theta=0, \pi/4$ についての領域の対称性を考慮すれば、

$$\begin{aligned} \chi &= A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (A_{4n} r^{-4n} + B_{4n} r^{4n} + C_{4n} r^{2-4n} \\ &+ D_{4n} r^{2+4n}) \cos 4n\theta \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ E_{4n} r^{-4n} + F_{4n} r^{4n} + G_{4n} I_{4n}(r/l) \\ &+ H_{4n} K_{4n}(r/l) \} \sin 4n\theta \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 I_{4n} 、 K_{4n} は変形ベッセル関数である。また本領域に対する定常温度場の解は、

$$\tau = A_0^* + B_0^* \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{4n}^* r^{-4n} + B_{4n}^* r^{4n}) \cos 4n\theta \quad (7)$$

(5)~(7)式に含まれる未定積分定数は、本問題のように、内外境界曲線が異種形であるとき、極座標系の一般解では、内側境界は正確に境界条件を合わせることができ、外側境界では不可能であるので、上記の解の無限級数 $\sum$ を有限項の $\sum$ で打ち切り、外側境界の上の適当な有限個の点を選んで、境界条件をこの辺点上で満足するようにして未知定数を決定する。実際の手続きとしては、まず(5)~(7)式を多重連結領域に対する変位と回転の一価性を保証する、いわゆる Michell の条件式と、(4)式の共役関係式に代入することにより、独立した未知定数の数を減少させ、極座標系の熱応力および偶応力成分の χ 、 ψ による表示式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \\ \mu_{rz} &= \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \mu_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

に代入し、応力に関する境界条件

$$\left. \begin{aligned} r=a \quad & \sigma_r = \sigma_{r\theta} = \mu_{rz} = 0 \\ x=b \quad & \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \mu_{xz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

により、残りの未知定数を決定する。本報告では外側境界上の $M+1$ 点 ($M \geq N$) を選び、最小自乗法を用いた。

3 計算結果

数値計算は無次元量 $\rho = r/a$, $\rho_0 = b/a$ を導入し、 ν , l の値を種々変化させ、外側境界上に10点を選び最小自乗法により、未知定数を決定した。

$a/l=1$, $\rho_0=3$ にとり、 $\nu=0, 0.5$ の場合の $\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0$ の分布を、それぞれ Fig. 2 と 3 に示した。図において実線は偶応力を考慮した結果であり、破線は考慮しなかった場合である。偶応力理論を採用しても全体的な傾向は変わらないが、穴べりの応力は減少し、熱応力集中は緩和されることがわかる。熱応力集中の緩和を詳細に調べるため、Fig. 4 に示されるように最大応力 $(\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ を縦軸に、新材料定数 (a/l) を横軸に、 ρ_0 と ν をパラメータとしてとった。 ρ_0 , ν の値に関係なく a/l が 0 に近づくにつれ応力は減少し、偶応力の影響が顕著にあらわれる。減少率は $a/l=1$

Fig. 2. Distribution of $\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0$ over the octant for $\nu=0$.

Fig. 3. Distribution of $\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0$ over the octant for $\nu=0.5$.

*2 σ_{zz} は通常の平面ひずみ問題の基礎式より計算される。

*3 $\pi/4$ を 9 等分して 10 点の位置を定めた。

Fig. 4. Relation between $(\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ and a/l .

のとき、 $\nu=0$, $\rho_0=2$ で 13.9%, $\nu=0$, $\rho_0=4$ で 2.6%, $\nu=0.5$, $\rho_0=2$ で 13.6%, $\nu=0.5$, $\rho_0=4$ で 2.1% である。 $l=0$ は偶応力理論を考慮しない場合である。ポアソン比を 0 と 0.5 を選んだのはポアソン比としての上限、下限をおさえるためである。 ρ_0 の影響を調べるため、偶応力の影響が顕著にあらわれる $a/l=1$ について最大応力 $(\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ を Fig. 5 に示す。偶応力の影響が顕著にあらわれる $a/l=1$ の場合でも ρ_0 が約 6 以上になると、偶応力の影響は少ない。 ρ_0 が 1 に近づくほど偶応力の影響が顕著になる。Fig. 4 と Fig. 5 より最大応力 $(\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ は a/l が 0 に近づくほど、いいかえると l の値が大きくなるほど、ま

Fig. 5. Relation between $(\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ and b/a .

た ρ_0 の値が 1 に近づくほど偶応力の影響は顕著になり、熱応力集中の緩和は著しくなる。Fig. 6 は $\theta=0^\circ$ 上の応力 $(\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0)$ を $\rho_0 (=b/a)$ が 1.5, 2, 4 の場合について図示している。図より $\rho=1$ で最大の圧縮応力、 $\rho=\rho_0$ で最大の引張応力を与えるが、両応力とも偶応力を考慮することにより減少することがわかる。Fig. 7 は最大応力が生じる $\rho=1$ 上の応力 $\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0$ に対する角度 (θ) の影響について図示している。偶応力を考慮しない場合は $\theta=45^\circ$ の応力は $\theta=0^\circ$ の応力と比較して、ポアソン比の値に関係なく 33% 減少しているが、偶応力を考慮した場合、ポアソン比が 0.5

Fig. 6. Stress distribution of $\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0$ on $\theta=0^\circ$. Fig. 7. Stress distribution of $\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0$ on $\rho=1$.

のときは2%しか減少しておらず、ポアソン比が0のときは4%ほど増加しており、偶応力を考慮すれば角度に対する応力の変化はほんのわずかであり、また応力が平均化されていることがわかる。

Fig. 8は横軸を a/l にとり、ポアソン比と $\rho_0(=b/a)$ をパラメータとして最大半径垂直応力 $(\sigma_{rr}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ を図示した。図より σ_{rr} も a/l の値が0に近づけば近づくほど応力は減少し、偶応力の影響は顕著に表われてくる。Fig. 9は横軸を b/a にとり、ポアソン比と a/l をパラメータとして応力 $(\sigma_{rr}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ を図示した。Fig. 8より偶応力の影響が著しい $a/l=1$ の場合でも b/a が約6以上になると $l=0$ の場合、すなわち偶応力を考慮しない場合と一致する。よって Fig. 8と Fig. 9より $(\sigma_{rr}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ も $(\sigma_{\theta\theta}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ と同様に a/l が0に近づくと、また b/a が1に近づく

Fig. 8. Relation between $(\sigma_{rr}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ and a/l Fig. 9. Relation between $(\sigma_{rr}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ and b/a . Fig. 10. Relation between $(\sigma_{r\theta}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ and a/l .

ほど応力は減少し偶応力の影響は著しくなる。Fig. 10は横軸を a/l にとり、ポアソン比と b/a をパラメータとして最大せん断応力 $(\sigma_{r\theta}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ を図示した。図より $\sigma_{r\theta}$ は a/l が0に近づくほど偶応力の影響は著しいが、 $\sigma_{\theta\theta}$ や σ_{rr} とは反対に応力は増加する。Fig. 11は横軸を b/a にとり、ポアソン比と a/l をパラメータとして $(\sigma_{r\theta}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ を示した。図のように b/a が1に近づくほど偶応力の影響は大きくなる。 $\sigma_{\theta\theta}$ や σ_{rr} では b/a が約6以上になると偶応力の影響は無くなったが $\sigma_{r\theta}$ は b/a が10くらいになっても影響している。Fig. 12は $(\sigma_{\theta r}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ の a/l の影響について、Fig. 13は $(\sigma_{\theta r}/\alpha_t E T_0)_{\max.}$ の b/a の影響について示している。 $\sigma_{\theta r}$ も a/l が0に近づけば近づくほど、また b/a が1に近づくほど応力は減少し、偶応力の影響は著しい。Fig. 14は偶応力 $(\mu_{r\theta}/$

 Fig. 11. Relation between $(\sigma_{r\theta}/\alpha_t ET_0)_{\max.}$ and b/a .

 Fig. 12. Relation between $(\sigma_{\theta r}/\alpha_t ET_0)_{\max.}$ and a/l .

 Fig. 13. Relation between $(\sigma_{\theta r}/\alpha_t ET_0)_{\max.}$ and b/a .

$\alpha_t ET_0)_{\max.}$ の a/l の影響と b/a の影響について図示した。Fig. 15 は偶応力 $(\mu_{\theta z}/\alpha_t ET_0)_{\max.}$ の a/l の影響と b/a の影響について図示した。偶応力 μ_{rz} , $\mu_{\theta z}$ は a/l が 0 に近づくほど大きくなるが、 b/a が 6 近傍で最大の値を示す。

4 考 察

数値計算結果からフープ応力が最大応力であるから、

 Fig. 14. Relation between $(\mu_{\theta z}/\alpha_t ET_0)_{\max.}$ and a/l , b/a .

 Fig. 15. Relation between $(\mu_{rz}/\alpha_t ET_0)_{\max.}$ and a/l , b/a .

最大フープ応力は a/l が 0 に近づくほど偶応力の影響が著しくなり、その値を減少する。また b/a が 1 に近づくほど偶応力の影響は著しく、応力を減少させる。偶応力の影響が大きい a/l の値が 1 でも b/a が 6 以上になると偶応力の影響は無くなる。以上より a/l が 0 に近く、 b/a が 1 に近づくとき偶応力の影響は著しく、熱応力集中を緩和させる。Fig. 7 より偶応力を考慮すると、応力は平均化されるようである。 $a/l=1$ という値は偶応力の影響を誇張した例であるが、穴半径 a が充分小さい場合には、上記に似た傾向が現われることが予想される。本研究の数値計算は京大、名大の大型電子計算機センターを利用した。

(昭和47年10月5日 第11回高温強度シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) Mindlin, R. D., and H. F. Tiersten, Arch. Rat. Mech., 11, 415 (1962).
- 2) Nowacki, W., Bull. Pol. Sci., 14, 263, 801 (1966).
- 3) Mindlin, R. D., Exp. Mech., 3, 1 (1963).
- 4) Ter-Mkrtychán, L. N., P. M. M., 33, 825 (1969).
- 5) Bert, C. W., and F. J. Appl. AIAA Jr., 6, 968 (1968).
- 6) 竹内洋一郎, 山里久仁彦, 機論, 38, 1201 (1972).