平行円板間の層流放射流れ—交差粘性効果*

立 花 規 良**

Laminar Radial Flow between Parallel Stationary Disks—Cross Viscosity Effect

by

Motoyoshi TACHIBANA

(Faculty of Engineering, Fukui University, Fukui)

The laminar radial flow between the parallel stationary disks is one of the basic flows used to evaluate the viscous behaviour of the fluid, and its application to the viscometer or the rheometer is worth noting.

Here, using the Reiner-Rivlin model, how a non-Newtonian fluid behaves in the above-mentioned flow was studied analytically. And, on the basis of the results of the numerical calculation, the cross viscosity effect to the pressure and the stress distributions on the disk was discussed. And the present solution was compared with those of the author's approximate analysis as well as the Schwarz-Bruce's analysis in the radial flow between the parallel stationary disks.

It was found possible to obtain the exact solution of the flow field by the series expansion method. And, the solution in this paper was effective in the region of $R_g \sim 1$ and/or $R_c \sim 1$ and agreed with the Schwarz-Bruce's solution in this range. Furthermore the agreement with the present analysis confirmed the usefulness of the approximate analytical method for the power law fluid.

(Received Dec. 28, 1972)

1 結 言

平行円板間の層流放射流れは、流体の粘性を算定する基礎的な流れの一つで、レオメータへの応用が考えられる。そこで、非ニュートン流体が上記の流れ場において、どのように挙動するかを、Reiner-Rivlin モデルに基づき、解析的にしらべ、数値計算例により円板における圧力ないしは応力の分布への交差粘性の効果¹⁾を明らかにし、さらに、近似解析や Schwarz²⁾らの解析の結果と比較検討した。

2 基 礎 式

以下の解析では、次のように仮定する。

- (1) 流体は非圧縮性である。
- (2) 流体は定常層流で軸対称的である。
- (3) 外力は無視する。
- (4) 流体は、Reiner-Rivlin 流体で、二つの定数係数 $[\eta$ (粘性係数) と η_c (交差粘性係数)] で特性づけられる。

今、平行な二円板が、距離 h をへだてておかれ、二円板の共心軸を z 軸とし、この軸と二円板間の中位面

の交点を原点とする円筒座標系 (r, θ, z) が定義されるものとする。

運動方程式と連続の式は、仮定(1)~(3)を考慮すると、

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] \quad (1)$$

$$0 = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] \quad (2)$$

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

となる。Reiner-Rivlin の構成方程式は、

$$\tau = \eta \dot{\gamma} + \frac{1}{2} \eta_c [\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}] \quad (5)$$

と表わされ、その成分 τ_{ij} を、(1)~(3)に代入し、(4)式を考慮に入れて整理すると、

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$$

* 原稿受理 昭和47年12月28日

** 正 会 員 福井大学工学部 福井市文京

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right] \\
 &\quad + \eta_c \left[4 \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{v_r}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} - \frac{v_r}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2v_r^2}{r^3} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right) \right] \\
 &\quad \rho \left[v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \\
 &\quad + \eta_c \left[4 \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{v_z}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} - \frac{v_z}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \right] \quad (6)
 \end{aligned}$$

となり、 θ 方向の運動方程式 [(2)式] は、自動的に満足されることがわかる。

次に、(6)、(7)式の諸量を、

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{r}{h/2}, \quad Z = \frac{z}{h/2}, \quad V_r = \frac{v_r}{V_0}, \\
 V_z &= \frac{v_z}{V_0}, \quad P = \frac{p}{\rho V_0^2}, \quad V_0 = \frac{Q}{\pi h^2} \quad (8)
 \end{aligned}$$

のように無次元化し、流れ関数 ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \equiv \psi_z = R V_r, \quad \frac{\partial \psi}{\partial R} \equiv \psi_R = -R V_z \quad (9)$$

を導入し、整理すると、

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{R^2} \psi_z \psi_{Rz} - \frac{1}{R^2} \psi_R \psi_{zz} - \frac{1}{R^3} \psi_z^2 \\
 &= -P_R + \frac{1}{R_e} \left[\frac{1}{R} \psi_{RRz} + \frac{1}{R} \psi_{zzz} - \frac{1}{R^2} \psi_{Rz} \right] \\
 &\quad + \frac{R_r}{R_e} \left[\frac{1}{R^2} \psi_{RR} \psi_{RRR} - \frac{1}{R^2} \psi_{zz} \psi_{RRR} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{R^2} \psi_{Rz} \psi_{RRz} - \frac{1}{R^2} \psi_{RR} \psi_{Rzz} + \frac{1}{R^2} \psi_{zz} \psi_{Rzz} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{R^3} \psi_R \psi_{RRR} - \frac{3}{R^3} \psi_z \psi_{RRz} + \frac{1}{R^3} \psi_R \psi_{Rzz} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{R^3} \psi_z \psi_{zzz} - \frac{3}{2R^3} \psi_{RR}^2 + \frac{3}{R^3} \psi_{RR} \psi_{zz} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{6}{R^3} \psi_{Rz}^2 - \frac{3}{2R^3} \psi_{zz}^2 + \frac{3}{R^4} \psi_R \psi_{RR} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{11}{R^4} \psi_z \psi_{Rz} - \frac{3}{R^4} \psi_R \psi_{zz} - \frac{3}{2R^5} \psi_R^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8}{R^5} \psi_z^2 \right] \quad (10) \\
 &= -P_z + \frac{1}{R_e} \left[-\frac{1}{R} \psi_{RRR} - \frac{1}{R} \psi_{Rzz} + \frac{1}{R^2} \psi_{RR} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{R^3} \psi_R \right] + \frac{R_r}{R_e} \left[\frac{1}{R^2} \psi_{RR} \psi_{RRz} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &- \frac{1}{R^2} \psi_{zz} \psi_{RRz} + \frac{4}{R^2} \psi_{Rz} \psi_{Rzz} - \frac{1}{R^2} \psi_{RR} \psi_{zzz} \\
 &+ \frac{1}{R^2} \psi_{zz} \psi_{zzz} + \frac{1}{R^3} \psi_z \psi_{RRR} - \frac{1}{R^3} \psi_R \psi_{RRz} \\
 &- \frac{1}{R^3} \psi_z \psi_{Rzz} + \frac{1}{R^3} \psi_R \psi_{zzz} - \frac{3}{R^4} \psi_z \psi_{RR} \\
 &+ \frac{2}{R^4} \psi_z \psi_{zz} + \frac{3}{R^5} \psi_R \psi_{zz} \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$R_e \equiv \frac{\rho V_0 h/2}{\eta}, \quad R_r \equiv \frac{\eta_c V_0}{\eta h/2}$$

を得る。この両式から境界条件を満足するように、 ψ と P を決定すれば、解 $(v_r, v_z; p)$ が得られたことになる。

3 基礎式の解

基礎式の解は、 R のべき級数に展開されると考え、その形式は、

$$\begin{aligned}
 \psi(R, z) &= f_0(z) + \frac{1}{R^2} f_2(z) + \frac{1}{R^4} f_4(z) \\
 &\quad + \frac{1}{R^6} f_6(z) + \frac{1}{R^8} f_8(z) \\
 &\quad + \frac{1}{R^{10}} f_{10}(z) + \dots \\
 P(R, z) &= P_c + P_0 \ln R + \frac{1}{R^2} P_2(z) \\
 &\quad + \frac{1}{R^4} P_4(z) + \frac{1}{R^6} P_6(z) \\
 &\quad + \frac{1}{R^8} P_8(z) + \frac{1}{R^{10}} P_{10}(z) \\
 &\quad + \dots, \quad P_c: \text{定数}
 \end{aligned} \quad (12)$$

とする。(12)式を、(10)、(11)式に代入し、 R のべきの同じものをまとめ、境界条件

$$\begin{aligned}
 \psi_z(R, \pm 1) &= 0, \quad \psi_R(R, \pm 1) = 0, \\
 \psi_R(R, 0) &= 0, \quad \psi_{zz}(R, 0) = 0 \\
 \psi(R, 0) &= 0, \quad \psi(R, 1) = 1
 \end{aligned} \quad (13)$$

を満足するように、 $f_i(z)$ と $P_i(z)$ を決定し、それらを、(12)式に代入すると、 ψ と P は

$$\begin{aligned}
 \psi(R, z) &= \frac{3}{2} \left(z - \frac{1}{3} z^3 \right) + \frac{R_e}{R^2} \left[\left(\frac{3}{56} z - \frac{33}{280} z^3 + \frac{3}{40} z^5 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{3}{280} z^7 \right) + \frac{R_r}{R_e} \left(\frac{3}{20} z - \frac{3}{10} z^3 + \frac{3}{20} z^5 \right) \right] \\
 &\quad + \frac{R_e}{R^4} \left[\left(\frac{31}{700} z - \frac{59}{525} z^3 + \frac{33}{350} z^5 - \frac{1}{35} z^7 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{420} z^9 \right) + R_e \left(\frac{5301}{431200} z - \frac{739}{21560} z^3 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{99}{2800} z^5 - \frac{513}{29400} z^7 + \frac{1}{224} z^9 - \frac{3}{7700} z^{11} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R_r}{R_e} \left(-\frac{31}{350} z + \frac{57}{350} z^3 - \frac{3}{50} z^5 - \frac{1}{70} z^7 \right) \right. \\
 &\quad \left. + R_e \frac{R_r}{R_e} \left(\frac{543}{5600} z - \frac{383}{1400} z^3 + \frac{153}{560} z^5 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{159}{1400} z^7 + \frac{19}{1120} z^9 \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$+R_e\left(\frac{R_r}{R_e}\right)^2\left(\frac{237}{1400}z^2-\frac{639}{1400}z^3\right. \\ \left.+\frac{81}{200}z^5-\frac{33}{280}z^7\right)+0\left(\frac{1}{R^6}\right) \quad (14)$$

$$P(R,z)=P_c-\frac{3}{R_e}\ln R-\frac{1}{R^2}\left[\frac{27}{35}\right. \\ \left.+\frac{27}{20}\frac{R_r}{R_e}\left(1-\frac{10}{3}z^2\right)\right] \\ +\frac{1}{R^4}\left[\frac{43}{700}-\frac{78}{2695}R_e+\frac{2769}{700}\frac{R_r}{R_e}\right. \\ \left.-\frac{3}{25}R_e\frac{R_r}{R_e}-\frac{18}{175}R_e\left(\frac{R_r}{R_e}\right)^2\right. \\ \left.+\left(-\frac{99}{140}z^2+\frac{3}{4}z^4-\frac{3}{20}z^6\right)\right. \\ \left.+\frac{R_r}{R_e}\left(-\frac{63}{10}z^2+\frac{15}{4}z^4\right)\right. \\ \left.+R_e\frac{R_r}{R_e}\left(\frac{297}{140}z^2-\frac{9}{2}z^4+\frac{27}{20}z^6\right)\right. \\ \left.+R_e\left(\frac{R_r}{R_e}\right)^2\left(\frac{27}{5}z^2-9z^4\right)\right]+0\left(\frac{1}{R^6}\right) \quad (15)$$

となる。これらの式において、 $R_r=0$ とすると、ニュートン流体に対応し、 $1/R^2$ までの項は、Savage の解析結果と一致する。 P の定数 P_c を、 $R=R_0$ ($r=r_0$) [r_0 : 円板の流入部の半径] で、 $P=P_0$ となるようにきめ、無次元化の諸関係を考慮に入れると、圧力差 (p_0-p) は、

$$\frac{(p_0-p)}{\frac{\rho V_E^2}{2}}=\frac{6}{L_0 R_E}\ln X-\left\{1-\left(\frac{1}{X}\right)^2\right\}\left[\frac{54}{35}\right. \\ \left.+\frac{27}{10}\frac{R_C}{R_E}\left(1-\frac{10}{3}z^2\right)\right]+L_0^2\left\{1-\left(\frac{1}{X}\right)^4\right\}\left[\left\{\frac{43}{350}\right.\right. \\ \left.-\frac{156}{2695}\frac{R_E}{L_0}+\frac{2769}{350}\frac{R_C}{R_E}-\frac{6}{25}\frac{R_E}{L_0}\frac{R_C}{R_E}\right. \\ \left.-\frac{36}{175}\frac{R_E}{L_0}\left(\frac{R_C}{R_E}\right)^2\right]+\left(-\frac{99}{70}z^2+\frac{3}{2}z^4\right. \\ \left.-\frac{3}{10}z^6\right)+\frac{R_C}{R_E}\left(-\frac{63}{5}z^2+\frac{15}{2}z^4\right) \\ \left.+\frac{R_E}{L_0}\frac{R_C}{R_E}\left(\frac{297}{70}z^2-9z^4+\frac{27}{10}z^6\right)\right. \\ \left.+\frac{R_E}{L_0}\left(\frac{R_C}{R_E}\right)^2\left(\frac{54}{5}z^2-18z^4\right)\right]+0\left(\frac{1}{R^6}\right) \quad (16)$$

$$L_0\equiv\frac{h/2}{r_0}, \quad V_E\equiv\frac{Q}{2\pi r_0 h}, \quad X\equiv\frac{R}{R_0}=\frac{r}{r_0},$$

$$R_E\equiv\frac{\rho V_E h/2}{\eta}=L_0 R_e, \quad R_C\equiv\frac{\eta_e V_E}{\eta h/2}=L_0 R_r,$$

となる。円板に垂直な方向における応力 T_{zz} は、

$$T_{zz}=-p+\tau_{zz}$$

であるので、定数 (T_0) を圧力と同じようにきめ、変形整理すると、

$$-\frac{T_0-T_{zz}}{\frac{\rho V_E^2}{2}}=\frac{6}{L_0 R_E}\ln X-\left\{1-\left(\frac{1}{X}\right)^2\right\}\left[\frac{54}{35}+\frac{27}{10}\frac{R_C}{R_E}\right]$$

$$+L_0^2\left\{1-\left(\frac{1}{X}\right)^4\right\}\left[\left\{-\frac{107}{350}-\frac{156}{2695}\frac{R_E}{L_0}\right.\right. \\ \left.+\frac{2349}{350}\frac{R_C}{R_E}-\frac{6}{25}\frac{R_E}{L_0}\frac{R_C}{R_E}\right. \\ \left.-\frac{36}{175}\frac{R_E}{L_0}\left(\frac{R_C}{R_E}\right)^2\right]+\left(\frac{99}{70}z^2-\frac{3}{2}z^4\right. \\ \left.+\frac{3}{10}z^6\right)+\frac{R_C}{R_E}\left(-\frac{27}{5}z^2+\frac{3}{2}z^4\right) \\ \left.+\frac{1}{R^6}\right) \quad (17)$$

を得る。

4 数 値 計 算

4・1 圧力分布

平行円板間の流体の流れにより円板上に生じた圧力は、(16)式で、 $z=1$ とおけば求められる。すなわち、

$$\left(\frac{p_0-p}{\frac{\rho V_E^2}{2}}\right)_{z=1}=\frac{(p_0-p)_w}{\frac{\rho V_E^2}{2}} \\ =\frac{6}{L_0 R_E}\ln X-\left\{1-\left(\frac{1}{X}\right)^2\right\}\left[\frac{54}{35}-\frac{63}{10}\frac{R_C}{R_E}\right] \\ +L_0^2\left\{1-\left(\frac{1}{X}\right)^4\right\}\left[-\frac{16}{175}-\frac{156}{2695}\frac{R_E}{L_0}\right. \\ \left.+\frac{492}{175}\frac{R_C}{R_E}-\frac{402}{175}\frac{R_E}{L_0}\frac{R_C}{R_E}\right. \\ \left.-\frac{1296}{175}\frac{R_E}{L_0}\left(\frac{R_C}{R_E}\right)^2\right]+0\left(\frac{1}{R^6}\right) \quad (18)$$

このような圧力差は、近似解の特別事例としてふくまれている。そこで、本解と比較するため、条件を合致させると、圧力差に対し、

$$\frac{(p_0-p)_w}{\frac{\rho V_E^2}{2}}=\frac{6}{L_0 R_E}\ln X-\left\{1-\left(\frac{1}{X}\right)^2\right\}\left[\frac{6}{5}-\frac{15}{2}\frac{R_C}{R_E}\right] \\ +L_0^2\left\{1-\left(\frac{1}{X}\right)^4\right\}\left(-\frac{12}{5}\frac{R_C}{R_E}\right) \quad (19)$$

が導かれる。(18)式と(19)式を比較するために、 $L_0=0.1$ で、 $X=1\sim 20$ において、 $R_E=10^{-1}$, 1, 10 に対し、 $R_C/R_E=0\sim 10$ としたときの数値計算を行なった。その結果の一例を Table I に示した。

4・2 応力分布

本論文でとりあげた流体では、法線応力 T_{ii} と圧力 p は一致せず、円板上では、 T_{zz} が観測されることになる。そこで、円板上に作用する応力を考えると、それは、(17)式で、 $z=1$ とおけば得られる。すなわち、

$$\left(-\frac{T_0-T_{zz}}{\frac{\rho V_E^2}{2}}\right)_{z=1}=-\frac{(T_0-T)_w}{\frac{\rho V_E^2}{2}} \\ =\frac{6}{L_0 R_E}\ln X-\left\{1-\left(\frac{1}{X}\right)^2\right\}\left[\frac{54}{35}\right. \\ \left.+\frac{27}{10}\frac{R_C}{R_E}\right]+L_0^2\left\{1-\left(\frac{1}{X}\right)^4\right\}\left[-\frac{16}{175}\right. \\ \left.-\frac{156}{2695}\frac{R_E}{L_0}+\frac{492}{175}\frac{R_C}{R_E}\right]$$

Table I. Pressure distribution : $\frac{(p_0-p)w}{\rho V_E^2} \sim X : R_E=1 (L_0=0.1)$.

$R_E=1$	$R_C/R_E=0$		$R_C/R_E=10^{-1}$		$R_C/R_E=1$		$R_C/R_E=10$	
X	Present sol.	Approx. sol.	Present sol.	Approx. sol.	Present sol.	Approx. sol.	Present sol.	Approx. sol.
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1.25	12.8290	12.9564	13.0395	13.2250	14.5408	15.6422	-8.7362	39.8514
2	40.4256	40.6890	40.8722	41.2493	44.2673	46.2915	16.3570	96.7150
2.5	53.6749	53.9694	54.1772	54.5971	58.0488	60.2460	32.4692	116.7355
4	81.7243	82.0524	82.2875	82.7531	86.6921	89.0597	65.0108	152.1133
8	123.2410	123.5852	123.8335	124.3210	128.5006	130.9440	109.2020	197.1733
10	136.6213	136.9674	137.2174	137.7075	142.0023	144.3684	122.9257	210.9774
20	178.1975	178.5462	178.7984	179.2919	183.5396	186.0035	164.9673	253.1187

Table II. Stress distribution : $-\frac{(T_0-T)w}{\rho V_E^2} \sim X : R_E=1 (L_0=0.1)$.

$R_E=1$	$R_C/R_E=0$		$R_C/R_E=10^{-1}$		$R_C/R_E=1$		$R_C/R_E=10$	
X	Present sol.	S-B sol.	Present sol.	S-B sol.	Present sol.	S-B sol.	Present sol.	S-B sol.
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1.25	12.8290	12.8290	12.6962	12.7341	11.8504	11.8441	1.9188	2.9460
2	40.4256	40.4256	40.3137	40.3174	38.3851	38.3805	18.2856	19.9183
2.5	53.6749	53.6749	53.4481	53.2485	51.3908	51.3860	29.0305	30.7275
4	81.7243	81.7243	81.4712	81.4750	79.1767	79.1717	54.4037	56.1384
8	123.2410	123.2410	122.9752	122.9791	120.5667	120.5617	94.6473	96.3885
10	136.6213	136.6213	136.3540	136.3579	133.9318	133.9269	107.8755	109.6169
20	178.1975	178.1975	177.9282	177.9321	175.4878	175.4828	149.2490	150.9906

$$-\frac{6}{25} \frac{R_E}{L_0} \frac{R_C}{R_E} - \frac{36}{175} \frac{R_E}{L_0} \left(\frac{R_C}{R_E} \right)^2 + O\left(\frac{1}{R_0}\right) \quad (20)$$

このような応力差は, Schwarz らの三次流体モデルの解析結果の特別事例としてふくまれている。かれらの結果は,

$$-\frac{(T_0-T)w}{\rho V_E^2} = \frac{6}{L_0 R_E} \ln X - \left\{ 1 - \left(\frac{1}{X} \right)^2 \right\} \left[\frac{54}{35} + \frac{27}{10} \frac{R_C}{R_E} \right] + L_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{X} \right)^4 \right\} \left(-\frac{492}{175} \frac{R_C}{R_E} \right) \quad (21)$$

で, 第二項までは, 本解と一致している。また, $R_C=0$, すなわち, ニュートン流体では, 当然のことながら, 応力差は圧力差に一致する。(20)式と(21)式を比較するために, $L_0=0.1$ で, $X=1 \sim 20$ において, $R_E=10^{-1}, 1, 10$ に対し, $R_C/R_E=0 \sim 10$ としたときの数値計算を行なった。その一例を, Table II に示した。

5 結 論

非ニュートン流体 (Reiner-Rivlin の定数形モデル) が平行円板間を層流状態で放射流れするときの流れ場を解析的にしらべた結果, 次のような結論が得られた。

(1) 流れ場は, 級数展開法により厳密に解くことができる。本報では, $1/R^4$ の項までの解を得た。しかし, 解は, レイノルズ数 R_E およびライナー数 R_C が大きくなると, 異常な挙動を呈し, その有効域は, $R_E \sim 1, R_C \sim 1$, まです, それ以上の領域では, その有効性が失われる。

(2) 本解は, $R_E \sim 1, R_C \sim 1$ で, Schwarz らの解とはほぼ完全に一致する。

(3) 本解は, ニュートン流体の場合 ($R_C=0$) において, $R_E \sim 1$ で, 圧力分布に対する近似解と満足すべき一致をみせる (1%以内)。すなわち, このような領域では, 近似解法が有効である。

(4) 本解によると, 解の有効域において, 円板に作用する圧力差は, (法線) 応力差より, その値が高い。
(昭和47年10月16日 第20回レオロジー討論会にて講演)

参 考 文 献

- 1) 立花規良, 機講論 (福井地方), 161 (1971).
- 2) Schwarz, W. H., and C. Bruce, Chem. Eng. Sci., 24, 399 (1969).
- 3) Bird, R. B., *et al.*, "Transport Phenomena", Chap. 3 (1960) John Wiley & Sons, New York
- 4) Savage, S. B., Trans. ASME., J. App. Mech., 31-E, 594 (1964).

(391頁より)

8. The Stress State of Elastic Fluids in Viscometric Flow, M.L. Miller and E.B. Christiansen, 600.
9. Finite Element Analysis of Slow Non-Newtonian Channel Flow, Kalipada Palit and Roger T. Fenner, 628.

Biopolymers, Vol. 11

10. Dielectric Properties of Polyelectrolytes. I. A Study on Tetra-n-Butyl Ammonium Polyacrylate, A. Minakata and N. Imai, 329.
11. Dielectric Properties of Polyelectrolytes. II. A Theory of Dielectric Increment Due to Ion Fluctuation by a Matrix Method, A. Minakata, N. Imai, and F. Oosawa, 347.
12. Dielectric Dispersion of the α -Helix at the Transition Region to Random Coil, A. Wada, T. Tanaka, and H. Kihara, 587.
13. Linear Relaxation Analysis of the Mechanochemical Transformation of Collagen Fibers, I. V. Yanas and D.A. Olson, 899.
14. High Shear Rate Viscosity Measurements with Dilute Solutions of Brovine Fibrinogene, K. Lederer and J. Schurz, 1989.

Die Angewandte Makromolekular Chemie**Band 21**

15. Synthesis and Properties of Ethylene, Isoprene and Ethylene, Isoprene, Styrene Block Polymers, J.C. Falk and R.J. Schlott, 17.

Band 22

16. Phase Transitions, Relaxations, and Properties of High Polymers, W. Pechhold und S. Blasenbrey, 3.
17. The Rheo-Optics of Polymers, R.S. Stein, 27.
18. Struktur und Eigenschaften von verstreckten Polymeren (Fasern), R. Bonart und F. Schultze-Gebhardt, 41.
19. Struktur und mechanische Eigenschaften von hochorientierten Polymeren, K.E. Perepelkin, 181.

Band 25

20. Rheologische Untersuchungen an Polyvinylalkohol-Lösungen, J. Schurz, T. Kashmoula und F. J. Falcke, 51.
21. Über das Deformationsverhalten von nur intermolekular vernetzten Gelen und Kautschukn, ein Beitrag zur Struktur von nicht-kristallinen Polymeren, B. Vollmert, H. Stutz und J.J. Stemper, 187.

Die Makromolekulare Chemie**Band 153**

22. Rheological Property and Molecular Structures of Polymers and of their Solutions. Interdependence of Quantitative Relations, M. Hoffmann, 99.

Band 154

23. Frictional Behavior of the Correlated Chain, A. Horta, 63.

Band 157

24. Plastic Deformation of Nylon 6 Single Crystals and Thin Membranes, K. Sakaoku and A. Peterlin, 131.

(405頁へ)