複合材料の弾性係数とポアソン比の確率論的推定*

宮 本 博** 尾 田 十 八***

A Simulation of Elastic Constant and Poisson's Ratio of Composite Materials

by

Hiroshi MIYAMOTO

(Faculty of Engineering, University of Tokyo, Tokyo)

and Juhachi ODA

(Faculty of Engineering, Kanazawa University, Kanazawa)

In this paper, an elastic constant and Poisson's ratio of the grain or the fiber reinforced composite materials are analyzed by applying the probabilistic technique. The analytical model used is composed of two kinds of elements: the one is made of matrix only and the other contains a grain or fibers. These elements are disposed to make a composite model by using two-dimensional random vectors in order to simulate the condition of an actual material. The finite element method is applied to analyze the deformation behavior of this model.

The numerical calculations to examine the above mentioned technique are performed for the spheroidal graphite cast iron and the glass fiber reinforced plastic. The former is one of the grain reinforced composite materials and the latter one of the fiber reinforced materials. The results on these models coincide with the experimental ones fairly well.

(Received Sep. 3, 1973)

1 緒 言

粒子や繊維などの形で一つの連続した相に、他の異なる相を機械的な手法により共存させることによって作られる材料、いわゆる複合材料は現在材料革命の主役として注目されている。しかし新しい分野であるだけに、その強化機構や製造法などに関する理論と技術とはまだ発展途上にあり、いまだ不明の点が多い。特に弾性挙動に限定しても GFRP が破断強度の大きいにもかかわらず、弾性率の低いためにその使用を制限されてきたことなどの例をあげるまでもなく、早急にその性質の向上を図る必要がある。それにはまず各種複合材料に対し、その強化材とマトリックスの配合状況を考慮に入れた正確な弾性係数やポアソン比の推定法が確立されねばならない。

これらについて従来の研究をみると、最も注目されるのは最小ポテンシャルエネルギーおよび最小仕事の定理を利用して粒子分散系複合材料の弾性係数の上、下限を求めた Paul の研究であり、一方繊維強化形複合材料に関しては理論上解析しやすい点もあって、一

方向強化形モデルを対象とした研究がいくつかみられる^{2)~4)}。しかしこれらの研究においては弾性係数に対しある範囲を与えるか、あるいは特定なモデルに対して決定的値を予測するものが多く、実際の材料の性質上無視できぬ因子としてのファイバやマトリックス自身の性質の変化や配合の仕方などが確率的に影響を及ぼす効果が検討されたことはないようである。すなわち複合材料に関しては決定的値でこれらを規定するより、確立論的値(平均値や分散など)を予測した方がより実際的であり、有用でもあると思える。

以上の観点より本報では、さきに宮本、石島らによって研削砥石の弾性的挙動を推定した手法を応用拡張する立場より、複合材料に関しその弾性的挙動の確立論的推定法を述べる。すなわちまずその推定法を粒子および繊維の両分散系に共通した形で提示し、つぎにそれを実際問題に適用した結果を報告する。

2 シミュレーション法

2・1 粒子分散系複合材料

2・1・1 モデル化 SAP, TD ニッケルなどに代表される粒子分散系複合材料は、一般に Fig. 1 に示すようにマトリックス中に種々の大きさの粒子がランダムに分布している組織とみてよい。このような複合

* 原稿受理 昭和48年9月3日

** 正 会 員 東京大学工学部 東京都文京区本郷

*** 金沢大学工学部 金沢市小立野

Fig. 1. Grain reinforced model.

Fig. 2. Unit model.

材料のマトリックスおよび強化粒子の機械的性質が知られているとき、全体としての機械的挙動を推定するモデルにつき考えてみる。まずFig. 1の微小部分に注目すれば、Fig. 2の(a)および(b)のようなマトリックスのみからなる要素と粒子を含む要素の2つから構成されているものが複合材料と考えられる。このように考えると、これまで単に粒子の体積含有率のみしか考慮されなかった問題に対し、その形状や配置などの変化が弾性挙動に及ぼす効果を定量的に解明することができる。すなわちFig. 2における要素(a), (b)の弾性係数およびポアソン比がマトリックスや粒子のそれらから与えられると、それを用いて要素(a), (b)より組み立てられた全体モデルの弾性係数やポアソン比が有限要素法を利用して計算できる。しかもモデルによっては立体形態学⁶⁾の基礎の下でさらに簡単化した二次元モデル

Fig. 3. Simulation technique for grain reinforced model.

を対象とすることもでき、実用上はこれで充分の場合が多いので、以下二次元の場合に限定して論ずることにする。なおFig. 3はシミュレーション法を図示したものである。

2・1・2 要素モデル Fig. 2(a), (b)の二次元化したモデルの弾性係数とポアソン比は全体モデルの解析に必要となる。ここで要素(a)の E_1, ν_1 はマトリックスの E_0, ν_0 に等しいが、要素(b)についてはFig. 4(a)に示すような一軸引張りを受ける円形介在物を有する板の弾性解⁷⁾かまたはFig. 4(b)に示す一定の変位を受ける板の荷重と横伸びを有限要素法で求めることにより解明できる。

Fig. 4. Analysis of unit model.

2・1・3 全体モデル 前節において決定した物性値を有する2種の要素の組合せ方などにつき考えてみる。これには解析対象とする複合材料の粒子やマトリックスの配合状況に関するデータが重要となり、モデル化にどれだけそれらを考慮するかによって、次の分類が行なわれる。

(1) 決定論的モデル Fig. 5(a)に示されるような全体モデル中における粒子の径 $2b_0$ がすべて一定でかつそれを含む要素(b)の配置がある規則に従っているモデルは決定論的モデルといえる。

Fig. 5. Composed models.

(2) 確立論的モデル (i) 自由度1の場合；実際の材料では粒子は規則正しく配置されることはなく、一般に不規則である。このような材料のモデルの1つとして要素(b)の粒子径 $2b_0$ は一定であるが、全体モデルにおける位置がFig. 5(b)のようにランダムであるものが考えられる。

(ii) 自由度2の場合；粒子径がある確率分布（正規分布など）に従い、さらにその位置もランダムな状態

の材料に対してはFig. 5(c)に示すような全体モデルが作られる。

2・2 繊維分散系複合材料

2・2・1 モデル化 FRP などに代表される繊維分散系複合材料は一般にFig. 6に示されるように、マトリックス中に不規則な形状の繊維が方向もランダムに混入されているものである。しかしこの微小部分に注目すれば、そこではファイバはある一定方向に並んでいるとみてよいであろう。いわゆるその領域は弾性的異方性を示す。このような考えのもとにFig. 6の材料をFig. 7に示す要素の集合体としてモデル化する。このモデルにおいても粒子分散系の場合と同様に具体的解析には二次元モデルが有用であり、その解析手順などをFig. 8に示す。

ここで二次元化された全体モデルにおいて各要素が異方性を示すので、その変形を求めるための有限要素

Fig. 6. Fiber reinforced model.

Fig. 7. Unit model.

Fig. 8. Simulation technique for fiber reinforced model.

Fig. 9. Unit and composed model.

Fig. 10. Element and coordinate.

Fig. 11. Anisotropic axis of element.

法を明らかにしておく。まずFig. 9に示すような全体モデルにおいて、一要素が幾つかの三角形要素から作られているとする。その任意の1個AがFig. 10に示すように繊維の主方向をx軸と θ 傾いて配置されていたと考えよう。いまこの三角形Aのx, y方向変位u, vを,

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

と仮定する。また三角形Aにおける節点変位

$$\{q\}^T = (u_i, u_j, u_k, v_i, v_j, v_k)$$

と節点力

$$\{f\}^T = (X_i, X_j, X_k, Y_i, Y_j, Y_k)$$

は剛性マトリックス $[K]$ により結ばれて、次のようになる。

$$\{f\} = [K] \{q\} \quad (2)$$

ただし,

$$[K] = ts[N]^T[D][N]$$

ここで t : 板厚

$$[N] = \frac{1}{2S}$$

$$\begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i & y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = l^4 E_L' + m^4 E_T' + 2l^2 m^2 E_L' \nu_{TL} + 4l^2 m^2 G_{LT}$$

$$C_{22} = m^4 E_L' + l^4 E_T' + 2l^2 m^2 E_L' \nu_{TL} + 4l^2 m^2 G_{LT}$$

$$C_{33} = l^2 m^2 E_L' (1 - \nu_{TL}) + l^2 m^2 E_T' (1 - \nu_{LT}) + (l^2 - m^2)^2 G_{LT}$$

$$C_{12} = l^2 (m^2 + l^2 \nu_{TL}) E_L' + m^2 (l^2 + m^2 \nu_{LT}) E_T' - 4l^2 m^2 G_{LT}$$

$$C_{13} = -l^3 m E_L' (1 - \nu_{TL}) + l m^3 E_T' (1 - \nu_{LT}) + 2l m (l^2 - m^2) G_{LT}$$

$$C_{23} = -l m^3 E_L' (1 - \nu_{TL}) + l^3 m E_T' (1 - \nu_{LT}) - 2l m (l^2 - m^2) G_{LT}$$

$$\text{なお } l = \cos \theta, \quad E_L' = \frac{E_L}{1 - \nu_{TL} \nu_{LT}}, \quad E_T' = \frac{E_T}{1 - \nu_{TL} \nu_{LT}}$$

また E_L , E_T , ν_{LT} , ν_{TL} は Fig. 11 に示すような要素モデルにおける弾性対称軸 (主方向) L , T 方向の弾性係数やポアソン比であり, G_{LT} は L - T 面内のせん断弾性係数である。

2・2・2 要素モデル 全体モデルにおいて有限要素法を利用するとき, 行列 $[D]$ の内容が必要である。いわゆる Fig. 11 の要素における E_L , E_T , ν_{LT} , ν_{TL} および G_{LT} が明らかでなければならない。ただ E_L , E_T , ν_{LT} , ν_{TL} の間にはマックスウェルの関係として $\nu_{LT}/E_L = \nu_{TL}/E_T$ が成立するから結局 4 個の値を決めればよい。それには, まず一方向強化材の解を利用することが考えられる。これについては非常に多くの研究があるが, ここでは実験とよく合う植村・山脇の近似式を紹介しておく。

$$\left. \begin{aligned} E_L &= E_f V_f + E_m (1 - V_f) \\ E_T &= (1 - C) \frac{E_f E_m}{E_m V_f + E_f (1 - V_f)} + C \{ E_f V_f + E_m (1 - V_f) \} \\ \nu_{LT} &= (1 - C) \{ \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \} + C \frac{\nu_f E_f V_f + \nu_m E_m (1 - V_f)}{E_f V_f + E_m (1 - V_f)} \\ G_{LT} &= (1 - C) \frac{G_f G_m}{G_m V_f + G_f (1 - V_f)} + C \{ G_f V_f + G_m (1 - V_f) \} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで V_f : 繊維の体積含有率, C : 繊維接近率でガラス繊維 エポキシ 複合材については, $C = 0.4 V_f - 0.025$ で与えられる。

$$G_f = E_f / 2(1 + \nu_f), \quad G_m = E_m / 2(1 + \nu_m)$$

E_m , E_f : マトリックスおよび繊維の弾性係数

ν_m , ν_f : マトリックスおよび繊維のポアソン比

また Fig. 11 に示すような要素モデル自身を有限要素法により解析することは粒子分散系の場合と同様可能であり, この方法によれば繊維とマトリックスの体積率はもちろんその形状や分布などの影響も物性値内に含むことができる。

2・2・3 全体モデル 一方向強化形要素の組合せとして作られる全体モデルは粒子分散系の場合と同様, 次のような種類が考えられる。

(1) 決定論的モデル Fig. 12(a) に示すような種類のファイバが規則正しく配列されているようなモデルである。この特別な場合が一方向強化複合材料で, これはもちろん要素モデルに一致する。

Fig. 12. Composed model.

(2) 確率論的モデル (i) 自由度 1 の場合; 一種類のファイバから構成されているが, その配置が全くランダムかあるいは, ある統計則に従っている場合のモデルで, 一般複合材料ではこの場合が最も多いといえる。Fig. 12(b) はその一例を示したものである。

(ii) 自由度 2 の場合; 数種のファイバが混入されたり, また同種のものでもその形状などが変化しているものが, 配列もランダムに組織されている場合のモデルで Fig. 12(c) にその例を示す。

3 計 算 例

3・1 球状黒鉛鋳鉄の E , ν の推定

粒子分散系複合材料の一例として球状黒鉛鋳鉄を対象とし, これの弾性係数とポアソン比の推定を行ない, その実験値との比較検討を試みた。すなわち球状黒鉛鋳鉄は黒鉛とマトリックス (フェライトやパーライトなど) から成る一種の複合材料で, その機械的性質が片状黒鉛鋳鉄に比べきわめてすぐれていることは従来よりよく知られている。しかしそれに対する定量的説明はこれまでほとんどなされなかった。

さて Fig. 13 は実験に用いた鋳鉄の顕微鏡組織写真であり, Table I はその基地の化学成分を示す。これよりマトリックスはほぼ純鉄に近いものであることがわかる。そこで E_0 , ν_0 としては,

$$E_0 = 21\,000 \text{ kg/mm}^2, \quad \nu_0 = 0.29$$

を採用した。つぎに黒鉛粒子に対しては Huntington の資料より,

$$E_0' = 500 \text{ kg/mm}^2, \quad \nu_0' = 0.16$$

と決め, 2・1 にて詳説した手法により弾性係数 E と

Fig. 13. Microstructure of specimen.

Table I. Chemical composition of matrix.

C (%)	Si (%)	Mn (%)	S (%)	P (%)
0.03	2.55	0.25	0.015	0.008

ポアソン比 ν を求めた。シミュレーション計算は確率論的モデルの自由度1および2の場合について実施された。ここで自由度2の場合は顕微鏡観察より求められた粒径分布を3次元的に変換した後、これを7種類の粒径をもつ要素で代表させ、これら要素の組合せにより全体モデルを作った。Fig. 14はその1つを示し、またこのモデルの剛体変位圧縮を受ける変形状態をFig. 15に示した。この圧縮変位量と反力との比より縦弾性係数が、一方横伸びとの比よりポアソン比が計算できる。Fig. 16はそれらの結果を実験値と比較して示したもので、これより E 、 ν ともに推定値は実験値とよく一致しており、特に分散状況から知られるように自由度2のモデルの方がより実験結果に類似した推定を与えていることがわかる。

3・2 GFRP の E , ν の推定

繊維分散系複合材料の例として、ランダム配合された GFRP を考えてみることにした。ここで対象とし

Fig. 14. Example of probabilistic model of order two.

Fig. 15. Deformation of composed model.

た試料はチョップストランドマット（日東紡製 MC 450A）をポリエステル樹脂により硬化させたもので、このマトリックスとファイバの弾性係数およびポアソ

Fig. 16. Comparison between experiment and simulation.

ン比は次のようなものである.

$$E_m = 316 \text{ kg/mm}^2, \nu_m = 0.37$$

$$E_f = 7\,700 \text{ kg/mm}^2, \nu_f = 0.22$$

以上のような材料定数をもつモデルで, ファイバ含有率 $V_f = 21.4\%$ のものに対し, 2・2 にて示した自由度1の確率論的手法を適用してシミュレーション計算を実施した. 乱数を用いて作ったランダム配合モデルの一例が Fig. 17 であり, これを一様圧縮変形させた状態を Fig. 18 に示す. この変形状態より 3・1 の場

Fig. 17. Example of composed model.

Fig. 18. Deformation of composed model.

Fig. 19. Comparison between experiment and simulation.

合同様に弾性係数とポアソン比を計算した. ただここで要素の主方向の E_T , E_L , ν_{LT} および G_{LT} が必要となるが, それは(3)式を利用した.

以上のようにして, シミュレーション計算は20個のモデルに対して実施された. その結果を示したものが Fig. 19 である. これにより実験値と計算値とはほぼ一致しているが, 縦弾性係数に関しては前者が後者より少し大きい. このことはチョップストランドマットでは繊維同志のからまりあいがあることおよび, 計算で E_L , E_T などを(3)式にて近似していることも影響しているものと思われる.

4 結 言

複合材料の弾性係数とポアソン比の確立論的推定法について, 粒子分散系および繊維分散系の2つの材料に分けて提示した. 推定法は粒子や繊維を含む簡単な要素の集合体として複合材料をモデル化し, それに有限要素法を適用して変形状態を解析するものである. この手法によれば粒子や繊維の形状や分布状況までも計算の過程に導入することが可能で, その有効性を粒子分散系材料の例として球状黒鉛鋳鉄, 一方繊維分散系材料の例として GFRP をとりあげて確認した.

最後に, 本研究におけるシミュレーション例の解析は坂田信二君(東京大学大学院博士課程)および織田光秋君(金沢大学大学院修士課程)の努力に負うところが大きいことを記し, ここに感謝の意を表するしだいである.

(昭和48年3月26日 第2回 FRP シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) Paul, B., Trans. Met. Soc. AIME, **218**, 36 (1960-2).
- 2) Chen, C.H., and S. Cheng, J. Comp. Mat., **1**, 30

- (1967).
- 3) Pickett, G., Air Force Mat. Lab. Tech. Rep., **220** (1966).
- 4) 小林繁夫, 第5回複合材料シンポジウム (1972).
- 5) 宮本 博, 他2名, 機誌, **75**, No.639, 575 (1972).
- 6) De Hoff, R. T., and F. N. Rhines, Quantitative Microscopy (1968) McGraw-Hill
- 7) Zienkiewicz, O. C., and Y. K. Cheung. The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics (1967) McGraw-Hill
- 8) 植村益次, 第22回応用力学連合講演会抄録集, 75(1972).
- 9) Huntington, H. B., Solid St. Phys., **7**, 213 (1958).