立方異方性熱・弾・塑性体の構成式*

徳岡辰雄**

Constitutive Equations of Cubic Anisotropic Thermal-Elastic-Plastic Materials

by

Tatsuo TOKUOKA

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

The constitutive equations of the cubic crystal type materials are investigated theoretically. The restrictions on the fourth and second order elastic and yield coefficients are derived from the cubic symmetry. The stress which results from the shape distortion becomes the deviatoric stress, and therefore the deformation is independent of the pressure. The mapped constitutive equations to a six-dimensional space are obtained. The constitutive equations of the isotropic plastic materials are also discussed.

(Received Dec. 7, 1973)

1 結 言

第1報¹⁾では任意の異方性をもつ熱・弾・塑性構成式の一般形を導出した。そこではまず異方性線型弾性体を考えて比ヘルムホルツの自由エネルギーがひずみと温度の関数と考えた。さらに異方性塑性ポテンシャルを導入して応力と比エントロピのD成分の関数と仮定した。von Misesの流動則を適用し、完全塑性の条件を仮定して所要の一般構成式をえた。特に塑性ポテンシャルが応力と比エントロピの二次形式である場合には、構成式を弾性係数 $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}$, E と降伏係数 $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}$, Y で表現した。さらに ∇ -表示を試みた。等長な 6, 7 次元空間へ構成式を写像して一般化応力ベクトル, 一般化ひずみベクトル, 一般化応力速度ベクトル, 一般化ひずみ速度ベクトルの間の関係式として構成式を表現した。

ここでは立方異方性体に限定して議論をさらに明確化する。まず立方晶系結晶の対称性から弾性テンソル, 降伏テンソルのもつ条件をしらべる。これより所要の立方異方性体の構成式を導出しよう。

2 対 称 性

ここでは簡単に立方晶系および等方性の物体に属する弾性係数 $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}$ の対称性について述べる。詳しくはたとえば Landau と Lifshitz または Thomas を参

照されたい。

立方晶系に属する結晶は互いに直交する三本の結晶軸上に等間隔(原子間隔)に原子が配列していてその配列が三次元的に広がったものである。よって立方結晶は結晶面についての鏡映および結晶軸まわりの 90° 回転によってその特性が変わらない物体として定義できる。いま結晶軸を座標軸 (x_1 , x_2 , x_3) にとるとこの対称性の性質は次の2種類の座標変換によって $\mathbf{E}$ と $\mathbf{E}$ が不変であることを示す。

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 \rightarrow -x_1 \\ x_2 \rightarrow x_2 \\ x_3 \rightarrow x_3 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} x_1 \rightarrow x_1 \\ x_2 \rightarrow -x_2 \\ x_3 \rightarrow x_3 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} x_1 \rightarrow x_1 \\ x_2 \rightarrow x_2 \\ x_3 \rightarrow -x_3 \end{matrix} \right\}, \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 \rightarrow x_2 \\ x_2 \rightarrow -x_1 \\ x_3 \rightarrow x_3 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} x_1 \rightarrow -x_3 \\ x_2 \rightarrow x_2 \\ x_3 \rightarrow x_1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} x_1 \rightarrow x_1 \\ x_2 \rightarrow x_3 \\ x_3 \rightarrow -x_2 \end{matrix} \right\}. \quad (2)$$

対称性(1)より弾性係数の添字が奇数個含まれている成分は零になる。また対称性(2)より添字 (1, 2, 3) の任意の置換は弾性係数の値を変えないことになる。これに始めから仮定されている対称性 (I 6)^{*1} を考慮に入れて独立な成分は結局

$$\left. \begin{aligned} E_{1122} &= E_{2233} = E_{3311} \equiv \frac{\lambda}{\rho}, \\ E_{1212} &= E_{2323} = E_{3131} \equiv \frac{\mu}{\rho}, \\ E_{1111} &= E_{2222} = E_{3333} \equiv \frac{\lambda + 2\mu + \nu}{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

* 本報を「立方異方性塑性体(第2報)」(Cubic Anisotropic Plastic Materials, II) とする。

原稿受理 昭和48年12月7日

** 正 会 員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

*1 (I. 6) とは第1報の(6)式のことを指す。以下同様の記号を使うこととする。

$$E_{11}=E_{22}=E_{33}=\frac{e}{\rho} \quad (4)$$

となる。ここで ρ は密度， λ ， μ ， ν は独立な弾性係数である。降伏係数 $\mathbf{Y}$ と $\mathbf{Y}$ についても弾性係数と同一の対称性が成り立つと考えることにする。それより独立な成分は

$$\left. \begin{aligned} Y_{1122}=Y_{2233}=Y_{3311} &\equiv \alpha, \\ Y_{1212}=Y_{2323}=Y_{3131} &\equiv \beta, \\ Y_{1111}=Y_{2222}=Y_{3333} &\equiv \alpha+2\beta+\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$Y_{11}=Y_{22}=Y_{33} \equiv \gamma \quad (6)$$

となる。 α ， β ， γ は独立な降伏係数である。

つぎに等方性物体の場合を考えよう。この場合， x_3 一軸まわりの任意の回転について $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{Y}$ ， $\mathbf{Y}$ は不変であるべきである。テンソルの変換則

$$E'_{ijkl} = E_{pqrs} \frac{\partial x'_i}{\partial x_p} \frac{\partial x'_j}{\partial x_q} \frac{\partial x'_k}{\partial x_r} \frac{\partial x'_l}{\partial x_s} \quad (7)^{*2}$$

に変換

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \\ x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

を代入して $E'_{ijkl} = E_{ijkl}$ の条件より

$$E_{1111} = E_{1122} + 2E_{1212} \quad (9)$$

同様に

$$Y_{1111} = Y_{1122} + 2Y_{1212} \quad (10)$$

をえる。(3)および(5)と比較して等方性体の場合には

$$\nu = \gamma = 0 \quad (11)$$

でなければならない。また逆に(9)と(10)の条件は座標系の任意の⁴⁾直交変換について $\mathbf{E}$ と $\mathbf{Y}$ が不変であることを保証する。2階テンソル $\mathbf{E}$ と $\mathbf{Y}$ については立方結晶から等方性体に移っても同一の条件(4)と(6)でよいことが示される。

ここで第1報で導入した $\mathfrak{E}$ -表示を考えよう。6次元 $\mathfrak{E}_6$ -空間では $\mathbf{E}$ と $\mathbf{Y}$ は2階対称テンソル $\hat{\mathbf{E}}$ と $\hat{\mathbf{Y}}$ に写像され， $\mathbf{E}$ と $\mathbf{Y}$ はベクトル $\hat{\mathbf{E}}$ と $\hat{\mathbf{Y}}$ に写像される。次の結果をえる。

$$\hat{\mathbf{E}} \equiv \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \lambda+2\mu+\nu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu+\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu+\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{Y}} \equiv \begin{pmatrix} \alpha+2\beta+\gamma & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+2\beta+\gamma & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha+2\beta+\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta \end{pmatrix}, \quad (13)$$

*2 繰り返された添字には和の規約を適用する。

$$\hat{\mathbf{E}} \equiv \frac{1}{\rho} (e, e, e, 0, 0, 0), \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{Y}} \equiv (\gamma, \gamma, \gamma, 0, 0, 0). \quad (15)$$

3 立方異方性熱・弾性体

まず弾性構成式を考えよう。一般の構成式(I.7)と(I.8)の弾性係数に(12)と(14)を代入して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ii} &= \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + (2\mu + \nu) \varepsilon_{ii} + eT, \\ \sigma_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i \neq j), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\eta = -\frac{e}{\rho} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - eT \quad (17)$$

となる。ここでは結晶軸を座標軸にとり添字についての和の規約はとらないとする。いま直交座標系を任意にとり，それに対する結晶軸の方向余弦を n_{ai} とする。ここで ($a=1, 2, 3$) は3本の結晶軸を表わすものとする。このとき構成式(16)は任意の座標系について

$$\sigma_{ij} = (\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + eT) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \nu n_{ai} n_{aj} n_{ak} n_{am} \varepsilon_{km} \quad (18)$$

とかける。スカラーの構成式は変わらない。(18)はThomas³⁾によって導かれたもので添字 a については和の規約をとっている。

第1報で採用したように応力を体積変化と温度変化による部分 $\nu \boldsymbol{\sigma}$ と形の変化による部分 $\mathbf{D} \boldsymbol{\sigma}$ に分解しよう。(18)の ε_{ij} の代わりに $(1/3)(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij}$ を代入して

$$\nu \sigma_{ij} = \left[\left(\lambda + \frac{2}{3} \mu + \frac{1}{3} \nu \right) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + eT \right] \delta_{ij} \quad (19)$$

をえる。ここで $n_{ai} n_{aj} n_{ak} n_{am} = \delta_{ij}$ を使っている。これより

$$\mathbf{D} \boldsymbol{\sigma}_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}^* + \nu n_{ai} n_{aj} n_{ak} n_{am} \varepsilon_{km}^* \quad (20)$$

となる。ここで

$$\varepsilon_{ij}^* \equiv \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij} \quad (21)$$

は偏差ひずみテンソルである。(20)より $\operatorname{tr} \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} = 0$ となるから実は $\mathbf{D} \boldsymbol{\sigma}$ は $\boldsymbol{\sigma}$ の偏差成分である。すなわち

$$\sigma_{ij}^* = 2\mu \varepsilon_{ij}^* + \nu n_{ai} n_{aj} n_{ak} n_{am} \varepsilon_{km}^* \quad (22)$$

である。また(I.11)で定義された $\mathbf{D} \eta$ はこの場合0になり(17)は分解されないでそのまま残る。よって立方異方性弾性体の構成式は，(22)，(19)，(17)で与えられる。

4 立方異方性熱・弾・塑性体

立方異方性熱・弾性体では $\mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^*$ および $\mathbf{D} \eta = 0$ となるから降伏条件を与える塑性ポテンシャル ϕ は $\boldsymbol{\sigma}^*$ のみの関数となり

$$\phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{Y} : \boldsymbol{\sigma}^* \quad (23)$$

で与えられる。降伏係数 $\mathbf{Y}$ として(13)を代入して

$$\phi = \beta \sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^* + \frac{1}{2} \gamma (\sigma_{11}^{*2} + \sigma_{22}^{*2} + \sigma_{33}^{*2}) \quad (24)$$

をえる。

体積変形と温度変化にともなう構成式は(19)と(17)で与

えられる。一方の変化をとまなう構成式は(1.22), (1.23), (1.27)より

$$\dot{\sigma} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \dot{\mathbf{d}}^* \quad (25)$$

となる。ここに

$$\dot{\mathbf{F}} \equiv \rho \left[\dot{\mathbf{E}} - \frac{\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\sigma}^* \otimes \dot{\sigma}^* \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{E}}}{\dot{\sigma}^* \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\sigma}^*} \right] \quad (26)$$

である。上式に(12)と(13)を代入して次の表現をえる。

$$\dot{\mathbf{P}} \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{Bmatrix}. \quad (27)$$

ここで

$$\mathbf{A} \equiv \begin{Bmatrix} 2\mu + \nu - \kappa_1 \sigma_{11}^{*2} & -\kappa_1 \sigma_{11}^* \sigma_{22}^* & -\kappa_1 \sigma_{11}^* \sigma_{33}^* \\ -\kappa_1 \sigma_{22}^* \sigma_{11}^* & 2\mu + \nu - \kappa_1 \sigma_{22}^{*2} & -\kappa_1 \sigma_{22}^* \sigma_{33}^* \\ -\kappa_1 \sigma_{33}^* \sigma_{11}^* & -\kappa_1 \sigma_{33}^* \sigma_{22}^* & 2\mu + \nu - \kappa_1 \sigma_{33}^{*2} \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

$$\mathbf{B} \equiv -\kappa_2 \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^* \sigma_{23}^* & \sigma_{11}^* \sigma_{31}^* & \sigma_{11}^* \sigma_{12}^* \\ \sigma_{22}^* \sigma_{23}^* & \sigma_{22}^* \sigma_{31}^* & \sigma_{22}^* \sigma_{12}^* \\ \sigma_{33}^* \sigma_{23}^* & \sigma_{33}^* \sigma_{31}^* & \sigma_{33}^* \sigma_{12}^* \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{C} \equiv \begin{Bmatrix} 2\mu - \kappa_3 \sigma_{23}^{*2} & -\kappa_3 \sigma_{23}^* \sigma_{31}^* & -\kappa_3 \sigma_{23}^* \sigma_{12}^* \\ -\kappa_3 \sigma_{31}^* \sigma_{23}^* & 2\mu - \kappa_3 \sigma_{31}^{*2} & -\kappa_3 \sigma_{31}^* \sigma_{12}^* \\ -\kappa_3 \sigma_{12}^* \sigma_{23}^* & -\kappa_3 \sigma_{12}^* \sigma_{31}^* & 2\mu - \kappa_3 \sigma_{12}^{*2} \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &\equiv \frac{(2\mu + \nu)^2 (2\beta + \gamma)^2}{G}, \\ \kappa_2 &\equiv \frac{4\sqrt{2}\mu(2\mu + \nu)\beta(2\beta + \gamma)}{G}, \\ \kappa_3 &\equiv \frac{32\mu^2\beta^2}{G}, \\ G &\equiv (2\mu + \nu)(2\beta + \gamma)^2(\sigma_{11}^{*2} + \sigma_{22}^{*2} + \sigma_{33}^{*2}) \\ &\quad + 16\mu\beta^2(\sigma_{23}^{*2} + \sigma_{31}^{*2} + \sigma_{12}^{*2}). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Thomas⁵⁾は立方異方性体の弾塑性構成式を呈出しているが、そこで採用している降伏条件は von Mises 型の等方性降伏条件である。それゆえ Thomas の構成式は立方異方性弾性構成式と等方性降伏条件を組み合わせたものであって、その点で一般的でないと思われる。

5 等方性熱・弾・塑性体

等方性の場合、条件(11)が成り立つことが証明されている。よって(19)は

$$\nu \sigma_{ij} = \left[\left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} + eT \right] \delta_{ij} \quad (32)$$

となり、(17)はそのまま成り立つ。降伏条件(24)は

$$\beta \sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^* = K \quad (33)$$

となる。(31)で定義された量は

$$\kappa_1 = \frac{2\mu\beta}{K}, \quad \kappa_2 = \sqrt{2} \kappa_1, \quad \kappa_3 = 2\kappa_1 \quad (34)$$

となり、構成式(25)は(27)–(30)に(11)と(33)を代入することにより次のように簡単な表現をとる。

$$\dot{\sigma}_{ij}^* = 2\mu \dot{d}_{ij}^* - \frac{\mu\beta}{2K} \sigma_{ki}^* \dot{d}_{ki}^* \sigma_{ij}^*. \quad (35)$$

すなわち、等方性塑性体の塑性係数 $\mathbf{P}$ は

$$\mathbf{P}_{ijkl} = \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{\mu\beta}{2K} \sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^* \quad (36)$$

で与えられる。等方性熱・弾・塑性体の構成式は(32), (17), (35)で与えられる。ここで温度の変化の影響を無視した場合

$$e = E = 0 \quad (37)$$

とおくと(32)と(17)はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \nu \sigma_{ij} &= \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij}, \\ \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

となる。(38)と(35)は塑性力学でよく使われる Prandtl-Reuss 型の構成式である。

6 等温変形と断熱変形

この2種類の変形によって偏差応力についての構成式(25)はあらわには変わらない。

等温変形と断熱変形で構成式(19)と(17)の表現は大きく変わる。まず等温変形の場合 $T=0$ において

$$\left. \begin{aligned} \nu \sigma_{ij} &= \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu + \frac{1}{3} \nu \right) (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij}, \\ \eta &= -\frac{e}{\rho} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

となる。断熱変形の場合には $\eta=0$ において

$$T = -\frac{e}{\rho E} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \quad (40)$$

となり、(19)に代入して

$$\nu \sigma_{ij} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu + \frac{1}{3} \nu - \frac{e}{\rho E} \right) (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij} \quad (41)$$

となる。

参考文献

- 1) 徳岡辰雄, 材料, **23**, 444 (1974).
- 2) Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, Theory of Elasticity, Chap. 1 (1960) Pergamon Press, Oxford; ランダウ・リフシッツ, 佐藤常三訳, 弾性理論, 第1章 (昭和47年) 東京図書
- 3) Thomas, T. Y., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **55**, 235 (1966).
- 4) Thomas, T. Y., Concepts from Tensor Analysis and Differential Geometry, Chap. 1 (1965) Academic Press, New York
- 5) Thomas, T. Y., J. Math. Mech., **16**, 147 (1966).