鋼板の貫通疲労き裂進展挙動の破壊力学的検討*

笠井 憲一** 小林 英男*** 中 沢 一***
川 本 弘** 片 桐 利 朗**** 杉 浦 正 規****

Fracture Mechanics Analysis of Through Fatigue-Crack
Propagation Behaviour in Steel Plates

by

Kenichi KASAI, Hideo KOBAYASHI, Hajime NAKAZAWA, Hiroshi KAWAMOTO
(Tokyo Institute of Technology, Tokyo)
Toshiro KATAGIRI and Masaki SUGIURA
(Press Kogyo Co., Ltd., Fujisawa)

The through fatigue-crack propagation rate for a centrally slitted low carbon steel plate has been determined. The rate, $d(2a)/dN$, is correlated with the stress intensity factor range, ΔK , as follows:

$$\frac{d(2a)}{dN} = C(\Delta K)^m$$

Strictly speaking, it appears that the larger the plate width (from 50 mm to 200 mm), the smaller the value of m , and that the higher the stress ratio (from 0.06 to 0.36), the larger the value of C . But, the plate thickness, slit size, stress wave, tensile/shear fracture mode transition behaviour and reduction of plate thickness resulting from general yielding do not affect the correlation. The fatigue life, N_f , is correlated with the initial apparent stress intensity factor range, ΔK_0 , as follows:

$$N_f = 4.46 \times 10^{-12} (\Delta K_0)^{3.5}$$

The predicted life from the rate is consistent with the correlation.

(Received Apr. 17, 1974)

1 序 言

機械や構造物にき裂が存在しても、それを監視しながら稼動するフェール・セーフ設計においては、疲労き裂の進展挙動のは握が非常に重要である。現在までに行なわれた疲労き裂進展挙動に関する多くの研究の結果、今日ではき裂進展速度 $d(2a)/dN$ がき裂先端近傍の力学的環境を表わす応力拡大係数を用いて、次のような形で表示されることは良く知られている。

$$\frac{d(2a)}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (1)$$

ここで、 $2a$ はき裂の全長、 N は応力繰返し数、 ΔK は応力拡大係数の範囲、また m と C はそれぞれ実験定数

である。少なくとも板状試験片の貫通き裂を対象とした(1)式の有効性については、現在までも多数の研究者によって議論されており、多くの実験データから m の値は Paris らが最初に示したように 4 に近い値となることも知られている。もちろん、(1)式のような表示に際しては、その前提として試験片やき裂の形状、寸法、あるいは応力負荷型式が、応力拡大係数で考える限りき裂進展速度に影響しないという暗黙の了解がある。しかしながら、こうした前提を系統的な実験で確かめた例は少なく、他方では平滑材や切欠き材の寿命に対して寸法効果の問題が盛んに取り上げられている。著者らは前に大型鋼板について(1)式の有効性を確

* 原稿受理 昭和49年4月17日

** 学生会員 東京工業大学大学院 東京都目黒区大岡山

*** 正 会 員 東京工業大学 東京都目黒区大岡山

**** プレス工業(株) 藤沢市遠藤

*1 き裂の形状の問題も寸法効果と同程度に重要であるが、本研究では貫通き裂 (through crack) のみを対象としている。表面き裂 (part-through crack) に関しても同じ結論を得ているが、それは別に報告する予定である (笠井, 小林, 中沢: 未発表)。

認し, フラクトグラフィ的にその意味付けを行なったが³⁾, 試験片が小型の場合には, 得られるき裂進展速度の範囲も大型の場合と異なり, データの取り方によっては(1)式のような関係に寸法効果が生じることも充分に考えられる. また, 破壊型式の遷移挙動と寸法効果との関連も興味深い問題である.

そこで本研究では, 試験片の板幅, 板厚および初期切欠き寸法を数種類に変えた低炭素鋼板について繰返し引張りの疲労試験を行ない, (1)式の有効性を寸法効果や破壊型式の遷移挙動を含めて検討した. なお, これらの結果の中には応力比および応力波形の異なるものも若干含まれており, それらの影響についても知見が得られた.

2 材料および実験方法

実験に供した材料は自動車構造用熱間圧延鋼板 SAPH 45 であり, その化学成分を Table I に示す. 素材から圧延方向が応力軸方向と一致するように概略試験片形状に切り出した後に, 950℃で2時間の焼なましを行ない, さらに試験片に加工した. 同じ熱処理条件での機械的性質を Table II に示す.

Table I. Chemical composition.

Material	C	Si	Mn	P	S
SAPH 45	0.14	0.28	0.85	0.018	0.019

Table II. Mechanical properties.

Material	Upper yield point (kg/mm ²)	Lower yield point (kg/mm ²)	Tensile strength (kg/mm ²)	Elongation (%)
SAPH 45	23.5	22.6	38.8	60.4

試験片の形状, 寸法はFig. 1に示すとおりで, 寸法効果の影響を調べるために板幅, 板厚を種々に変えた. 以下, 板幅の最も大きいものをA型材, 中間のものをB型材, 最も小さいものをC型材と呼ぶ. 試験片には中央にあけたドリル穴の両端に, 厚さ0.2mmの鋸でスリットをその長手方向に垂直となるように付した. 板幅 W , 板厚 T , スリット長さ $2a_0$ の組合せは Table III に示すとおりである. 試験片 C2 はスリットを付した後に, $\sigma_{\max}=17.5 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{\min}=0.75 \text{ kg/mm}^2$ の応力繰返しで全長が $2a=7.0 \text{ mm}$ になるまで疲労き

Fig. 1. Configuration of specimen.

Table III. Test conditions.

Specimen	Width W (mm)	Thickness T (mm)	Slit length $2a_0$ (mm)	Stress $\sigma_{\max}$ $\sigma_{\min}$ (kg/mm ²)		Stress ratio R
A1*	200	3.5	14	12.5	0.75	0.06
A2**			14	12.5	0.75	0.06
A3			14	12.5	0.75	0.06
A4			28	12.5	0.75	0.06
A5			14	17.5	5.75	0.33
A6			14	12.5	4.5	0.36
B1	100	3.5	14	12.5	0.75	0.06
B2			7	12.5	0.75	0.06
B3		1.75	7	12.5	0.75	0.06
B4			7	17.5	5.75	0.33
C1	50	3.5	7	12.5	0.75	0.06
C2***			7	12.5	0.75	0.06

* Triangle wave ** Cut-saw wave *** Cracked sheet

裂を入れ, さらに 600℃で1時間の焼なましを行っており, スリットの影響を検討するために用いた.

使用した試験機は MTS 社製, クローズ・ループ方式の 9±16 トンおよび ±10 トンの2種類の電気油圧式疲労試験機である. 実験条件は Table III に示したとおりで, 繰返しの波形は試験片 A1, A2 についてはそれぞれ三角波, 鋸波を使用し, 他はすべて正弦波で行なった. また, 繰返し速度は 10~30 Hz であるが, 最終破断の近傍では 1~10 Hz に落した.

実験に先立って試験片の表面には 0.5 mm 間隔の目盛を写真焼付し, き裂進展速度の測定は, き裂が1目盛あるいは1/2目盛を進展するのに要する繰返し数を記録することにより, 試験機を停止することなく行なった.

なお, 応力拡大係数は中央き裂板の引張りに対して十分な精度をもつセカント公式

$$AK = \Delta\sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{W}\right)} \quad (2)$$

から算出した. ここで, $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ は応力の範囲である.

3 実験結果およびその検討

3・1 疲労き裂進展挙動

序言に述べたとおり, き裂進展速度 $d(2a)/dN$ を, その時のき裂長さから求まる応力拡大係数の範囲 AK に対して両対数グラフ上にプロットすれば, 結果が1本の直線で(1)式のように表わされることは良く知られている. Fig. 2 にはA型材の応力波形が異なる, $\sigma_{\max}=12.5 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{\min}=0.75 \text{ kg/mm}^2$, 応力比 $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 0.06$ の結果を示した. 正弦波, 三角波, 鋸波の結果の間に差は認められず, この程度の波形の相違はき裂進展挙動に影響しないものと思われる. なお, 図には, 材料が本研究のそれとほぼ同じで, 試験片の形状, 寸法もA型材と全く等しいが(ただし, 板厚のみは $T=4.0 \text{ mm}$ と若干異なる), 応力レベル

Fig. 2. Influence of load wave and stress intensity factor range, ΔK , on fatigue crack propagation rate, $d(2a)/dN$, in large A-type specimens. (Scatter band shows result of previous work (Ref. 1))

を $\sigma_{\max}/=17.5, 15.0, 12.5, 10.0, 8.75 \text{ kg/mm}^2$ と種々に変化させて $\sigma_{\min}=0.75 \text{ kg/mm}^2$ を固定した $R=0.04 \sim 0.08$ の前報の結果を、比較のために鎖線で示した。本研究の結果と前報の結果との一致は良好であり、

$\sigma_{\max}$ を種々に変化させていない本研究の結果でも、かなり広い範囲にわたる $d(2a)/dN-\Delta K$ の関係が抑えられていることがわかる。

個々の試験片についての $d(2a)/dN-\Delta K$ の関係を最小二乗法を用いて直線近似した場合の、(1)式における実験定数 m と C の値は Table IV に示した。そのうちで、応力条件が等しく ($\sigma_{\max}=12.5 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{\min}=0.75 \text{ kg/mm}^2$, $R=0.06$)、板幅、板厚、スリット長さが異なる試験片について、そのような直線近似の関係を比較した結果が Fig. 3 である。Fig. 2 に鎖線で示した前報³⁾の形状、寸法は等しいが応力レベルが異なる種々の試験片の結果がすべて1本の直線で近似されているのに反して、Fig. 3の結果では明らかに直線のこう配がA型材、B型材、C型材の順に大きくなっていく傾向があり、き裂進展挙動に対して寸法効果が存在することを示している。このような寸法効果の存在は、現在の疲労き裂の挙動に対する破壊力学的手法の有効性にいささかの懸念を投げかけるものであり、今後のさらに系統的な研究が望まれる。特に、板幅が本研究の範囲を越えて $W>200 \text{ mm}$ もしくは $W<50 \text{ mm}$ となった場合に、直線のこう配の板幅に対する変化がやはり本研究の範囲内でのそれと同じ傾向を示すか、あるいはある板幅を境としてその影響がなくなるようになるのかは、試験片で得られたデータを実際の機械や構造物に適用する際にかなり切実な問題となる。しかしながら、本研究の範囲内に限れば、そのような寸法効果はさほど顕著なものではなく、A型材、B型材、C型材の結果はすべてほぼ1本の直線でも十分に近似され、この場合のき裂進展速度を(1)式のように表示すれば次のとおりである。

Table IV. Summary of test results.

Specimen	Initial apparent stress intensity factor range $\Delta K_0 \text{ (kg/mm}^2\text{)(mm)}^{1/2}$	Number of cycles to complete fracture $N_f \text{ (cycles)}$	Experimental constants in Eq (1)		Tensile/shear fracture mode transition point T.P.			Point for onset of reduction of sheet thickness		
			m	C	$2a \text{ (mm)}$	$\sigma_{\text{net}} \text{ (kg/mm}^2\text{)}$	$K_{\text{max}} \text{ (kg/mm}^{3/2}\text{)}$	$2a \text{ (mm)}$	$\sigma_{\text{net}} \text{ (kg/mm}^2\text{)}$	$K_{\text{max}} \text{ (kg/mm}^{3/2}\text{)}$
A1	55.3	27.8×10^4	4.69	2.12×10^{-13}	21.0	14.0	72.3	80.0	20.8	155.7
A2	55.3	30.6	4.57	3.52×10^{-13}	25.0	14.3	79.0	80.0	20.8	155.7
A3	55.3	39.4	4.07	2.63×10^{-12}	26.5	14.4	81.9	80.0	20.8	155.7
A4	78.9	8.0	4.23	1.94×10^{-12}	32.5	14.9	90.7	74.0	19.8	147.0
A5	55.3	14.4	3.52	7.48×10^{-11}	19.0	19.4	96.0	19.0	19.4	96.0
A6	37.6	69.3	4.25	3.24×10^{-12}	29.0	14.7	86.9	60.0	17.9	128.2
B1	55.8	30.5	5.11	2.76×10^{-14}	27.0	17.1	85.3	41.0	21.2	112.2
B2	39.1	69.5	4.45	6.55×10^{-13}	25.0	16.7	81.4	38.0	20.2	106.1
B3	39.1	91.0	5.26	1.56×10^{-14}	26.5	16.9	84.2	43.0	21.9	116.0
B4	39.1	22.4	4.64	7.69×10^{-13}	11.0	19.7	73.9	11.0	19.7	77.4
C1	39.4	59.4	5.20	3.85×10^{-14}	18.0	19.5	72.3	20.0	20.8	77.8
C2	39.4	55.0	5.56	7.72×10^{-15}	17.5	19.2	70.9	20.0	20.8	77.8

*2 アルミニウム合金についての過去の研究では、 $d(2a)/dN-\Delta K$ の関係に板幅の影響が存在しないことはむしろ常識的である⁴⁾。しかし、本稿を執筆中に、森田⁵⁾と横堀、佐藤⁶⁾がやはり低炭素鋼について同様な寸法効果の傾向を認めていることを知った。したがって、少なくとも低炭素鋼についての寸法効果の存在は、かなり一般的な現象と考えられる。

Fig. 3. Influence of specimen dimensions and stress intensity factor range, ΔK , on fatigue crack propagation rate, $d(2a)/dN$, for stress ratio $R=0.06$.

Fig. 4. Influence of stress ratio, R , and stress intensity factor range, ΔK , on fatigue crack propagation rate, $d(2a)/dN$, in large A-type specimens.

$$\frac{d(2a)}{dN} = 2.60 \times 10^{-13} (\Delta K)^{4.62} \quad (3)$$

Fig. 4 には応力比が $R=0.33$ の場合の結果を, R

$=0.06$ の場合の(3)式と比較して示した. 図から平均応力の影響がわずかに認められるが, $R=0.33$ のいずれの直線も(3)式のばらつき帯の上限近傍に位置しており, 本研究の範囲内では(3)式を用いて近似しても充分かと思われる.

3・2 疲労き裂進展に伴う遷移現象と板厚変化および最終破壊

破面の巨視的様相は一般に Fig. 5 のようになる. き裂は中央スリット前縁より矢印の方向に, 破面が応力軸に垂直となる引張型で進展していき, その後に破面がき裂進展方向に沿って回転したせん断型へと遷移し(遷移の開始点を T. P. と呼ぶ), さらに絞りによる板厚の減少が生じてから(絞りの開始点を R. P. と呼ぶ), 最終破壊に至る. しかしながら, 個々の試験片では若干様相が異なり, 板幅の小さな C 型材での引張型からせん断型への遷移が明りょうであるのに反して, 板幅の大きな A 型材での遷移の開始点是不明りょうであり, しかもせん断型の破面は完全に 45° にはなりがたい傾向を示している.

破面を真上から観察して, その板厚方向の寸法を測定した結果を Fig. 6 に示す. 図の縦軸は破面の板厚方向の寸法 t の最初の板厚 T に対する比, 横軸はスリットの中心から測定位置までの長さ(き裂半長) a の板

Fig. 5. Schematic illustration of fatigue fracture surface.

Fig. 6. Reduction of sheet thickness with crack propagation. (Reduction point, R. P., corresponds to onset of general yielding. Transition point, T. P., represents tensile/shear fracture mode transition.)

幅 W に対する比である。

個々の試験片における遷移の開始点 T.P. と絞りの開始点 R.P. それぞれでのき裂底の実断面最大応力 σ_{net} および応力拡大係数の最大値 K_{max} の数値を Table IV に示した。R.P. での σ_{net} の値は、 R の相違によって若干のばらつきはあるが、ほぼ 21 kg/mm^2 となっている。この値は Table II に示した材料の降伏応力 22.6 kg/mm^2 に近いから、き裂進展に伴う絞りの開始は、き裂底での残りの実断面全体にわたって一方向降伏が生じる現象であることがわかる。一方、遷移の開始は、T.P. での σ_{net} の値と K_{max} の値との比較から、むしろ K_{max} の値に左右されているように思われる。

以上のような巨視的なき裂進展の様相は、き裂進展速度に大きな影響を及ぼすことはない。たとえば、Fig. 7 は応力条件が等しく ($\sigma_{max}=12.5 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{min}=0.75 \text{ kg/mm}^2$, $R=0.06$)、板幅、板厚、スリット長さが異なる試験片について、 $d(2a)/dN-\Delta K$ の関係に R.P. の位置を記入したものである。遷移の開始はもちろん、絞りの開始によっても(1)式のような関係が損なわれていないことが明らかである。^{*3}

Fig. 7. Influence of onset of general yielding on fatigue crack propagation behaviours.

*3 この結果から、前述した寸法効果が一般にいわれている $d(2a)/dN-\Delta K$ の曲線関係を直線近似したために生じたのではないことがわかる。 $d(2a)/dN-\Delta K$ の直線関係は、遷移や絞りの開始にほとんど関係しないストライエーションを形成するようなき裂進展機構に由来しているものと考えられる(川本, 小林, 笠井, 中沢, 日本材料学会第23期総会学術講演会前刷, 129 (1974))。

Fig. 3あるいはFig. 7からわかるように、最終破壊の際の応力拡大係数の最大値は、A型材、B型材、C型材と板幅が小さくなるに従い大幅に低下している (Fig. 3あるいはFig. 7では $R=0.06$ であり、 ΔK は K_{max} にほぼ等しい)。それは絞りの現象がき裂底での残りの実断面最大応力に支配されて生じることからも当然で、最終破壊の条件も応力拡大係数の最大値より、むしろ実断面最大応力に強く依存しているものと思われる。試験片の寸法が一定ならば、最終破壊の条件が見掛け上あたかも応力拡大係数の最大値に支配されているようなデータが得られる場合もあり、疲労破壊じん性なる概念が多く使用されている。しかしながら、少なくとも本研究で示されたような最終破壊に先行して絞りが生じる場合には、疲労破壊じん性の概念ははなはだ不適当であり、その値が試験片の寸法によって大幅に異なることは、実際への適用に際して注意する必要がある。疲労破壊じん性の概念が正確に適用されるのは、最終破壊が平面ひずみ状態で生じる場合に限られる。通常の疲労き裂進展挙動を調べる際に使用される試験片において、そのような状態が達成されるのはむしろまれであろう。

3・3 疲労寿命とその予測

Table IV で試験片 C1 と C2 との比較からもわかるように、本研究に用いたスリットはき裂にかなり近いものと考えられる。そこで、き裂材のみならずスリット材に対しても、応力の範囲 $\Delta\sigma$ とスリット長さ $2a_0$ から見掛け上の応力拡大係数の範囲の初期値 ΔK_0 を求めれば、Table IV に示したとおりである。Fig. 8 はその ΔK_0 と寿命 N_f を両対数グラフ上にプロットしたもので、Frost らの結果⁸⁾⁹⁾ もあわせて載せている。Frost らの結果は、本研究と同程度の化学成分と機械的性質の低炭素鋼板 ($W=254 \text{ mm}$, $T=3.25\sim 25.4 \text{ mm}$, 中央スリットの曲率半径 0.03 mm) についての、平均応力 σ_m を変えた繰返し引張りの実験から得られたものである。図から、主として初期応力拡大条件が寿命を左右していることがわかり、本研究および Frost らの結果に対しては次式が成立する。

Fig. 8. Relationship between initial apparent stress intensity factor range, ΔK_0 , and number of cycles to complete fracture, N_f , for various type of specimens.

$$N_f = 4.46 \times 10^{-12} (\Delta K)^{3.5} \quad (4)$$

一方, 実験定数を入れた(3)式をき裂発生寿命を無視して数値積分すれば, 応力繰返しに伴うき裂長さの変化ならびにき裂進展寿命が求まる. Fig. 9は応力条件が等しく ($\sigma_{\max} = 12.5 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_{\min} = 0.75 \text{ kg/mm}^2$, $R = 0.06$), 板幅, 板厚, スリット長さが異なる試験片 A3, B2, B3, C1 のき裂進展曲線であり, 実験結果と(3)式から予測される計算結果とをあわせて示した.

Fig. 9. Comparison of experimental and calculated fatigue crack propagation curves.

(3)式の実験定数 m と C の値は同一の応力条件のもとでのA型材, B型材, C型材のすべてについての平均値であり, かつき裂発生寿命が考慮されていないため, 実験結果と計算結果との間には若干のずれが生じているが, 両者の一致はおおむね良好である. 同様に, Fig. 8には板幅が $W = 200 \text{ mm}$ (A型材) と $W = 50 \text{ mm}$ (C型材) のそれぞれの場合について, (3)式から予測される ΔK_0 とき裂進展寿命との関係も示した. 計算結果の上には寿命が短い場合に板幅の影響が現われ, 板幅が大きいほど寿命は長くなっているが, 実験結果である(4)式との一致はやはり良好であり, (3)式のようなき裂進展速度の式から寿命の予測が可能ながわかる. このように主として初期応力拡大係数が寿命を左右し, 板幅がほとんど影響しない事実は, 寿命の大半がき裂進展のきわめて初期において費やされることを意味している. なお, 本研究のき裂進展速度の結果では不明であったが, 板厚を広範囲に変えたFrostらの寿命の結果から, 板厚がき裂進展速度に及ぼす影響もさほど顕著なものではないことが予想される.

一般にいわれる切欠き材の寸法効果は, 形状係数が等しい大小相似試験片の疲労寿命に関するものである. 切欠き材にき裂が発生した後の応力拡大係数の初期値は, 切欠き寸法の絶対値が大きい大型試験片の方が小型試験片よりも高い. したがって, 板幅が大きいにもかかわらず大型試験片の方がき裂進展寿命が短いことは, 以上の結果から当然である. 切欠き材の寿命に関する寸法効果の一部は, このような観点から説明できるものと思われる. ただし, 破壊力学の立場からい

えばそれは寸法効果ではなく, 真の寸法効果は前述したとおり(1)式の実験定数 m と C に現われるようなものである.

4 結 言

試験片の板幅, 板厚および初期切欠き寸法を数種類に変えた低炭素鋼板について繰返し引張りの疲労試験を行ない, 貫通疲労き裂進展挙動を破壊力学的に検討した. 得られた主な結果は以下のとおりである.

(1) き裂進展速度 $d(2a)/dN$ は応力拡大係数の範囲 ΔK を用いて, ほぼ次式的ように表示できる.

$$\frac{d(2a)}{dN} = C(\Delta K)^m$$

$$m = 4.6, C = 2.60 \times 10^{-13}$$

(単位, a : mm, ΔK : $(\text{kg/mm}^2)(\text{mm})^{1/2}$)

(2) 上式の関係は板厚, 初期切欠き寸法および応力波形の影響をほとんど受けないが, 板幅と応力比の影響が若干存在し, 板幅の増加は m の値を小さくし, 応力比の増加は C の値を大きくする傾向が認められる.

(3) き裂進展に伴い応力拡大係数の最大値に支配される破壊型式の遷移挙動, き裂底での実断面最大応力に支配される絞りによる板厚の減少ならびに最終破壊が生じるが, 遷移挙動や板厚の減少で上式の関係が損なわれることはない.

(4) 寿命 N_f はほぼ見掛け上の応力拡大係数の範囲の初期値 ΔK_0 に左右され, 次式のような関係が成立している.

$$N_f = 4.46 \times 10^{-12} (\Delta K_0)^{3.5}$$

また, き裂進展速度の式をき裂発生寿命を無視して数値積分することによっても寿命の予測が可能であり, その結果は上式と良い対応を示す.

(昭和48年11月21日 シンポジウム「疲労に関する最近の諸問題」にて講演)

参 考 文 献

- 1) Paris, P.C., and F. Erdogan, Trans. ASME, Ser. D, **85**, 528 (1963).
- 2) 中沢 一, 小林英男, 機械学会誌, **75**, 1118 (1972).
- 3) 中沢 一, 小林英男, ほか3名, 機械学会論文集, **40**, No. 338 (1974) 掲載予定
- 4) Rooke, D.P., N.J.F. Gunn, ほか2名, Aeronautical J. Roy. Aero. Soc., **73**, 335 (1969).
- 5) 藪 忠司, 森田明弘, ほか2名, 機械学会講演論文集, No. 730-12, 1 (1973).
- 6) 横堀武夫, 佐藤 清, 機械学会講演論文集, No. 740-1, 99 (1974).
- 7) 横堀武夫, 相沢民王, 材料強度学会誌, **5**, 45 (1970).
- 8) Frost, N.E., and D.S. Dugdale, J. Mech. Phys. Solids, **6**, 92 (1958).
- 9) Frost, N.E., and K. Denton, J. Mech. Engng. Sci., **3**, 295 (1961).