新しいモアレしま-ひずみ関係式とひずみ符号の決定法*

村 上 一 實** 伊 藤 貞 則*** 村 上 裕 則****

A New Moiré Fringe-Strain Relation and A Method for the Determination of the Strain Sign

by

Kazumi MURAKAMI

(Faculty of Engineering, Osaka Industrial University, Daito)

Sadanori ITO

(OMRON R & D Laboratories, Nagaokakyo)

and Yasunori MURAKAMI

(Faculty of Science and Engineering, Ritsumeikan University, Kyoto)

The conventional moiré interfringe spacing-strain relation does not contain a factor for determining the strain sign. Therefore, in the case of complex strain fields, this equation can not give exact strain values.

In this paper, new equations for the fringe-strain relation are derived. These expressions contain new factors M_u and M_v (± 1) for determining the strain sign. The factors can easily be determined by shifting the master grid in the direction perpendicular to the grid lines.

When the crossed grid is used, the discrimination of two kinds of fringes produced by X and Y grid is generally difficult. However, it is proposed that the above mentioned shifting method is also an effective means for the discrimination of both fringes.

(Received June 1, 1974)

1 はじめに

モアレしま(以下単にしまという)を利用した二次元ひずみの基本的な解析法には、現在大きく分けて二つの方法がある。一つは隣り合う二つのしま間距離からひずみを求める方法^{1)~3)}であり、他の方法はしまの傾き角からひずみを求める方法⁴⁾である。

ひずみ場全体の測定が行なえるという点では、両法には問題がないが、しま測定における簡便さの点で、現在では前者の方法がモアレ解析の主流となっているようである。しかしながらしまからひずみ符号を判定するという観点から、上の二つの方法を比較するとき、後者の方法の中にはひずみ符号の因子が入っているため、その判定は容易であるが、前者の方法の中にはそれが考慮されていないために、複雑なひずみ場の解析を行なうとき、正しいひずみ解析ができない場合がある。この問題点は、最近高橋によっても指摘されてい

る。⁵⁾

そこで本論文では前者の方法のしま間距離-ひずみ関係式に、正しいひずみ符号が決定できるしま指数差 M_u および M_v (± 1) を導入する。このしま指数差 M_u および M_v の符号はマスターグリッドを移動させるときわめて簡単に決定できることを述べる。

さらに X , Y 二方向の直交グリッドの利用は、ひずみ場全体のひずみ解析が一枚のモデルグリッドのみで行なえるという点で、優れた方法といえるが、複雑なひずみ場においては、両方向のグリッドによって生じたしまの判別が困難で、そのため間違ったひずみ解析を行なう恐れがある。この問題に対しても、マスターグリッド移動法はきわめて有効な解決法であることを述べる。

2 しまの一般式

ここで述べる内容は平行、直交いずれのグリッドについても適用できるが、平行グリッドのみ取り扱う。

負荷前のモデルグリッド線は x 軸に平行で、等間隔なグリッドとする(これを Y グリッドと称する)。すなわち Fig. 1 に示すように x Y 直交軸を、負荷前のピ

* 原稿受理 昭和49年6月1日

** 正会員 大阪産業大学工学部 大東市中垣内

*** 正会員 立石電機株式会社中央研究所

長岡京市下海印寺伊賀寺

**** 正会員 立命館大学理工学部 京都市北区等持院北町

Fig. 1. Geometry of moiré fringes.

ッチ p_0 のモデルグリッドのグリッド線が x 軸に一致するようにとると、任意のグリッド上の点 (x, y) の y 座標は

$$y = lp_0, (l=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

で与えられる。上式で l をグリッド線指数という。負荷後、このグリッドは垂直ひずみ（公称） ε_y および剛体の回転を含みせん断ひずみ成分 α_y （ x 軸から反時計回りを正とする）を受けて、変形前の点 (x, y) の y 座標は

$$y = \tan \alpha_y \cdot x + \frac{lp'}{\cos \alpha_y} = \tan \alpha_y \cdot x + \frac{lp_0(1+\varepsilon_y)}{\cos \alpha_y} \quad (2)$$

に変化する。ここで p' は変形後のモデルグリッドのピッチである。

この変形したグリッド上に、ピッチ p のマスターグリッドを角 θ 傾けて（ θ ；ミスマライメント量）重ね合わせると、マスターグリッド上の点 (x, y) の y 座標は

$$y = \tan \theta \cdot x + \frac{kp}{\cos \theta}, (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3)$$

で表わされる。上式で k はマスターグリッドの線指数である。この重ね合せの結果、両グリッドの交点の軌跡として

$$k-l=m_y, (m_y=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

を満たすように（明）しまを生ずる。 m_y はグリッド線指数の差を表わす因子で、これをしま指数という。

p_0 と p との間に λ なるミスマッチ量を導入して、次の関係があるものとする。

$$p_0 = p(1+\lambda) \quad (5)$$

しまの方程式を求めるために、モデルおよびマスターグリッドの交点の座標を (x, y) として、(2), (3) および(5)式を(4)式に代入すると

$$y = \frac{1}{(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos \theta - \cos \alpha_y} [\{(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\sin \theta - \sin \alpha_y\}x + m_y p(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)] \quad (6)$$

をうる。上式がしまの一般式で、図の太い実線がこのしまを表わす。

3 ひずみ符号を導入したしま間距離とひずみの関係

しま間距離からひずみを求める数種の方法¹⁾⁻³⁾（以下これらの方を従来法と呼ぶ）には、ひずみ符号の因子が考慮されていない。そのため複雑なひずみ場を本法で解析しようとしても、間違ったひずみ値をうる恐れがあった。これを解決するため、しま-ひずみ関係式に隣接した二つのしまのしま指数差を導入し、正しいひずみ値を求める方法を考える。

(6)式で $x=0$ とおくと

$$y = \frac{m_y p(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)}{(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos \theta - \cos \alpha_y} \quad (7)$$

同じく(6)式で $y=0$ とおくと

$$x = \frac{m_y p(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)}{\sin \alpha_y - (1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\sin \theta} \quad (8)$$

となる。再びFig. 1を参照して、 $x>0, y>0$ なる第1象限内にあるしまのうち、しま指数 m_y が N および $N+1$ のしまが y 軸と交わる点の y 座標をそれぞれ y_N, y_{N+1} とし、また m_y が N' （負）+1 および N' のしまが x 軸と交わる点の x 座標を $x_{N'+1}, x_{N'}$ としたとき、これらのしまの y, x 軸上のしま間距離をそれぞれ δ_{yy} および δ_{yx} とすると、上の二式より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta_{yy} &= y_{N+1} - y_N \\ &= \{(N+1) - N\} \frac{p(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)}{(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos \theta - \cos \alpha_y} \\ &= M_{yy} \frac{p(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)}{(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos \theta - \cos \alpha_y} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{yx} &= x_{N'+1} - x_{N'} \\ &= M_{yx} \frac{p(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)}{\sin \alpha_y - (1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\sin \theta} \quad (10) \end{aligned}$$

ただし M_{yy}, M_{yx} は隣接する二つのしまの指数差を表わしており、いずれも ± 1 である。なお M_{yy}, M_{yx} はともに 1 または -1 になるとは限らない。

(9), (10)式より α_y および ε_y は次式で表わされる。

$$\alpha_y = \arctan \frac{\delta_{yy}(\delta_{yx}\sin \theta + M_{yx}p)}{\delta_{yx}(\delta_{yy}\cos \theta - M_{yy}p)} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\delta_{yx}\sin \alpha_y}{(1+\lambda)(\delta_{yx}\sin \theta + M_{yx}p)} - 1 \\ \text{または} \\ \varepsilon_y &= \frac{\delta_{yy}\cos \alpha_y}{(1+\lambda)(\delta_{yy}\cos \theta - M_{yy}p)} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

同様に、負荷前のモデルグリッド線として、 y 軸に平行な X グリッドを用い、このグリッドによって生じたしまの x 軸および y 軸上の任意の隣接した二つのしま間距離をそれぞれ δ_{xx} および δ_{xy} とすると、回転を含みせん断ひずみ成分 α_x （ y 軸から時計回りを正とする）および垂直ひずみ ε_x は次式で求めることができる。

Fig. 2. Interfringe spacing versus normal strain curves.

$$\alpha_x = \arctan \frac{\delta_{xx}(\delta_{xy} \sin \theta + M_{xy} p)}{\delta_{xy}(\delta_{xx} \cos \theta - M_{xx} p)} \quad (13)$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_{xy} \sin \alpha_x}{(1+\lambda)(\delta_{xy} \sin \theta + M_{xy} p)} - 1 \quad (14)$$

または

$$\epsilon_x = \frac{\delta_{xx} \cos \alpha_x}{(1+\lambda)(\delta_{xx} \cos \theta - M_{xx} p)} - 1$$

ただし $M_{xx} = \pm 1$, $M_{xy} = \pm 1$.したがってせん断ひずみ γ_{xy} は

$$\gamma_{xy} = \alpha_y + \alpha_x \quad (15)$$

より求められる。

4 M_{ii} , M_{ij} の意味とその判定法

モアレ実験で測定されるしま間距離 δ_{ii} または δ_{ij} (Yグリッドのときには $i=y$, $j=x$ またXグリッドのときには $i=x$, $j=y$) からは, ひずみ符号の決定に関する情報は得られない。前節のしま-ひずみ関係式の中に導入した M_{ii} , M_{ij} は単に隣接したしまのしま指数の差を示すにすぎないが, これがひずみ符号の決定にきわめて重要な役割をもつことを以下に示す。Fig. 2 は(9)式およびこれと類似の δ_{xx} の式から得た $\delta_{ii}/p - \epsilon_i$ 曲線で, パラメータとして λ , θ および α_i が用いてある。なお通常 α_i の単位はラジアンで表わされるが, ここでは度で表わしてある。図中の各実線は $M_{ii}=1$, 破線は $M_{ii}=-1$ の曲線を示している。これらの曲線の変化からわかるように, たとえば $\lambda=0$, $\theta=0^\circ$ および $\alpha_i=0^\circ$ の場合には ϵ_i は $M_{ii}=1$ のとき正, $M_{ii}=-1$ のとき負となる。また $\lambda=0$, $\theta=5^\circ$, $\alpha_i=0^\circ$ で $\delta_{ii}/p=10^3$ のとき, $M_{ii}=1$ であれば $\epsilon_i=4.82 \times 10^{-3}$ となるが, $M_{ii}=-1$ であると $\epsilon_i=2.81 \times 10^{-3}$ となる。

一方 Fig. 3 は(10)式およびこれと類似の δ_{xy} の式から描いた $\delta_{ij}/p - \alpha_i$ 曲線で, パラメータとして λ , θ および ϵ_i が用いてある。 $\theta=0^\circ$ であれば, λ および ϵ_i がいかなる値であっても (λ および ϵ_i はともに -1 より大とする), $M_{ij}=1$ であれば $\alpha_i > 0^\circ$, $M_{ij}=-1$ であれば $\alpha_i < 0^\circ$ となる。しかし $\lambda=0.01$, $\theta=3^\circ$, $\epsilon_i=0.5$ で $\delta_{ij}/p=10^2$ のとき, $M_{ij}=1$ であれば $\alpha_i=5^\circ 25'$, $M_{ij}=-1$ であると $\alpha_i=3^\circ 41'$ というように, M_{ij} の符号によって α_i の値は相違する。なお(9)およ

Fig. 3. Interfringe spacing versus shear strain component curves.

び(10)式から明らかなように, $(1+\lambda)(1+\epsilon_i) \cos \theta - \cos \alpha_i = 0$ および $\sin \alpha_i - (1+\lambda)(1+\epsilon_i) \sin \theta = 0$ のときには, δ_{ii}/p も δ_{ij}/p も共に無限大となるが, このときには M_{ii} , M_{ij} は不定となる。このような場合, λ または θ を変えると δ_{ii}/p , δ_{ij}/p は有限値となり, M_{ii} , M_{ij} の符号は ± 1 いずれかに確定する。

この M_{ii} , M_{ij} の符号は次の条件で区別される。

i 軸上で δ_{ii} を測定する場合; $(1+\lambda)(1+\epsilon_i) \cos \theta - \cos \alpha_i \geq 0$ のとき, M_{ii} は $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\}$ となり, また j 軸上で δ_{ij} を測定する場合; $\sin \alpha_i - (1+\lambda)(1+\epsilon_i) \sin \theta \geq 0$ のとき, M_{ij} は $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\}$ となる。

つぎに M_{ii} , M_{ij} の符号判定法について考える。これの判定には, Chiang の方法があるが, ^{7,8)} ここでは簡単な方法を提案する。

いまYグリッドを扱うことにして, モデルグリッドを固定しておき, マスターグリッドをY軸に平行な方向に Δ だけ移動させ, これによる x , y 軸上のしまの動きを観察して, M_{ii} , M_{ij} の符号を判定することを考える。

Y軸上で $\Delta > 0$ (Δ はY軸の正方向に向かうとき正とする) を与えると, 両グリッドの交点の軌跡として生じたしまの(6)式は次のようになる。

$$y = \frac{1}{(1+\lambda)(1+\epsilon_y) \cos \theta - \cos \alpha_y} \{ (1+\lambda)(1+\epsilon_y) \sin \theta - \sin \alpha_y \} x + m_y p (1+\lambda)(1+\epsilon_y) + \Delta (1+\lambda)(1+\epsilon_y) \cos \theta \} \quad (16)$$

上式でY軸上のしまの動きをみるために, $x=0$ と

おくと

$$y = \frac{m_y p (1+\lambda)(1+\varepsilon_y)}{(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos\theta - \cos\alpha_y} + \frac{\Delta(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos\theta}{(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos\theta - \cos\alpha_y} \quad (17)$$

また x 軸上のしまの動きをみるために (16) 式で $y=0$ とおくと

$$x = \frac{m_y p (1+\lambda)(1+\varepsilon_y)}{\sin\alpha_y - (1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\sin\theta} + \frac{\Delta(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos\theta}{\sin\alpha_y - (1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\sin\theta} \quad (18)$$

(17) および (18) 式の右辺第 1 項は、いずれもあるひずみ場では一定値である。また第 2 項は、マスターグリッドに Δ の移動を与えたことによって生じたしまの移動による項である。この第 2 項のみを考えれば、 M_{ii} , M_{ij} の符号は容易に決定できる。いま $\theta > 0^\circ$ とすると、 $\Delta > 0$ を与えているから、 $(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos\theta - \cos\alpha_y$ および $\sin\alpha_y - (1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\sin\theta$ の値の正負に応じて、しまは y および x 軸上の正または負の方向に移動する。このしまの動きと M_{ii} , M_{ij} の符号とを関連づけると、 i 軸上での測定； $(1+\lambda)(1+\varepsilon_i)\cos\theta - \cos\alpha_i \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ < 0 \end{array} \right\}$ のとき、しまは $\left\{ \begin{array}{l} \text{正} \\ \text{負} \end{array} \right\}$ 方向に移動する。したがって M_{ii} は $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right\}$ となる。また j 軸上での測定； $\sin\alpha_i - (1+\lambda)(1+\varepsilon_i)\sin\theta \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ < 0 \end{array} \right\}$ のとき、しまは $\left\{ \begin{array}{l} \text{正} \\ \text{負} \end{array} \right\}$ 方向に移動する。したがって M_{ij} は $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right\}$ となる。

5 実際のひずみの求め方

いま Y グリッドによって Fig. 4 (a) の実線で示したしまが得られたとする。 M_{ii} , M_{ij} の符号を判定するため、マスターグリッドに移動量 Δ ($p > \Delta > 0$ とする) を与えたとき、しまは (a) の破線で示す位置に移動したとする。この移動を数回繰り返して、移動後のすべてのしまを利用すれば、しま密度が移動の回数分だけ増

Fig. 4. Original and shifted fringes for the case of Y grid.

加したことになる。⁹⁾ したがってこの移動法は M_{ii} , M_{ij} の符号判定とし密度増加の両法に利用できる。

つぎに上で述べた符号の判定法とし密度増加法を用いて、実際のひずみの求め方について述べる。 y , x 両軸上のしまの位置を連続的に決定すると、 M_{ii} , M_{ij} の符号を考慮して、Fig. 4 (b) および (c) のような y , x 軸上の変位分布曲線が得られる。これらの図に示すように、 y 軸および x 軸上の変位分布曲線の原点における傾き角を β および γ とし、これらの角度と (17) および (18) 式とを関連させると

$$\tan\beta = \frac{\Delta}{\delta'_{yy}} = \frac{(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos\theta - \cos\alpha_y}{(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos\theta} \quad (19)$$

$$\tan\gamma = \frac{\Delta}{\delta'_{yx}} = \frac{\sin\alpha_y - (1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\sin\theta}{(1+\lambda)(1+\varepsilon_y)\cos\theta} \quad (20)$$

となる。ただし δ'_{yy} および δ'_{yx} は図に示すように、同じしまの移動前後の y および x 軸上のしま間距離である。これらの式を変形すると

$$\alpha_y = \arctan \frac{\tan\theta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta} \quad (21)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_y = \frac{\cos\alpha_y}{(1+\lambda)(1-\tan\beta)\cos\theta} - 1 \\ \text{または} \\ \varepsilon_y = \frac{\sin\alpha_y}{(1+\lambda)(\tan\theta + \tan\gamma)\cos\theta} - 1 \end{array} \right\} \quad (22)$$

をうる。この方法によれば、ひずみこう配が存在する場合に、任意点において角 β , γ を正確に測定することができ、したがってひずみ測定精度も向上する。

X グリッドについても同様に考えれば、 α_x および ε_x が求められる。

ここで、グリッド移動法の実用性について検討する。この検討には共和電業方式を用いた。すなわち $p_0 = 0.05$ mm のグリッドを、0.001 mm の微動装置をもつニコン拡大投影器の投影面におき、10倍に拡大したスクリーン上に $p = 0.475$ mm のマスタースクリーン (グリッド) を取り付けた。

Fig. 5. An example of moiré fringes before and after the shift.

Fig. 6. Displacement distribution curve.

実験は $\theta=0^\circ$ 一定として, 無負荷状態で, $\Delta=0$, $0.3p$, $0.5p$ および $0.8p$ の4種類に変えて行なった. Fig. 5は $\Delta=0$ および $0.5p$ mm の場合のしまを示す. またFig. 6はこれらの Δ に対するそれぞれのしまのY軸上の変位分布を示す. これらの結果から, グリッド移動前後のしまの位置は正確に決定できることがわかる.

6 直交グリッドにおけるしまの判別法

一般に直交グリッドの使用は, 平行グリッドの使用に比べて測定の労力が軽減できること, また測定誤差を小さくするという利点を有するが, 一方XおよびYグリッド線によって生じたしまの指数 m_x および m_y (Fig. 7(a)) の区別がきわめて困難であるという欠点

Fig. 7. Original and shifted fringes for the case of crossed grid (shifting is given only in y direction.)

がある.

この問題の解決のため, カラーモアレ化の試み¹⁰⁾または¹¹⁾の sharpening 法を応用することなどが考えられるが, あまり実用的でないように思われる.

ここでは, マスターグリッドに移動を与えることによって, 二種類のしまを判別することを考える.

たとえばYグリッドに属するマスターグリッドを, このグリッド線に直交する方向に移動させると, m_y のしまは動くが, m_x のしまは動かない. これはマスターグリッドにこのような移動を与えても, Xグリッドに属するマスターグリッドには移動の影響がないためである. このしまの動きから m_x と m_y のしまの判別が可能となる. Fig. 7は $\theta=0^\circ$ として, したがってY軸を平行にYグリッドに属するマスターグリッドを移動させた前後のしまの変化状態を示したものである.

7 結 論

本研究の結果をまとめると, 次のように結論することができる.

(1) しま間距離からひずみを求める従来法では, ひずみ符号の因子が考慮されていないため, 間違っただけひずみ値をうる恐れがあった. しかし従来法の中にひずみ符号の決定に重要な役割をもつしま指数差 M_{ii} , M_{ij} の概念を導入することによって, この問題を解決することができる.

(2) この M_{ii} , M_{ij} の符号はマスターグリッドを移動させることによって容易に決定できる. マスターグリッド移動法はしま密度増加法にも利用できるので, この方法によれば, ひずみこう配が存在する場合に, 各点のひずみを精度よく測定することができる. さらにマスターグリッド移動法は直交グリッド使用時のXY両しま群の判別にも有効に利用できる.

(昭和47年5月29日 日本材料学会第21期総会学術講演会にて講演)

参 考 文 献

- 1) Morse, S., *et al.*, Proc. Amer. Soc. Civ. Engr., 86, EM-6, 105 (1960).
- 2) Theocaris, P.S., Proc. Soc. Exp. Stress Analys., 21-1, 223 (1964).
- 3) Post, D., Proc. Soc. Exp. Stress Analys., 22-2, 368 (1965).
- 4) 田中吉之助, 中島 稔, 材料試験, 10, 116 (1961).
- 5) 高橋 寛, 第22回塑性加工連講論, 409 (1971-11).
- 6) Oster, G., *et al.*, J. Opt. Soc. Amer., 52-2, 169 (1964).
- 7) Chiang, F.P., Proc. Amer. Soc. Civ. Engr., 95, EM-6, 1379 (1969).
- 8) Chiang, F.P., *et al.*, Proc. Soc. Exp. Stress Analys., 30-1, 209 (1973).
- 9) Sampson, R.C., *et al.*, Proc. Soc. Exp. Stress Analys., 24-2, 449 (1967).
- 10) Riegner, E.L., *et al.*, Proc. Soc. Exp. Stress Analys., 29-2, 393 (1972).
- 11) Post, D., Proc. Soc. Exp. Stress Analys., 24-1, 154 (1967).