立方異方性弾・塑性体の単純伸び*

徳 岡 辰 雄**

Simple Extension of Cubic Anisotropic Elastic-Plastic Materials

by

Tatsuo TOKUOKA

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

The constitutive equations of the cubic anisotropic plastic materials are generalized to satisfy the principle of material frame-indifference. The constitutive equations obtained in accordance with the requirement for the plastic flow state are assumed to hold in all states, *i. e.*, the natural unstrained state and the plastic flow state. As an example, the simple extension of the materials is analyzed, and the stress-extension relation is obtained. The result shows a gradual transition from the elastic state to the plastic flow state. The comparison between cubic anisotropic and isotropic materials is discussed briefly.

(Received May 16, 1974)

1 結 言

第1報¹⁾では任意の異方性熱・弾・塑性体の構成式を導出した。第2報では立方異方性の場合について考察してその構成式をえた。さらに等方性体の場合には、えられた構成式は Prandtl-Reuss 型の構成式に帰着されることを示した。そこでは立方晶系結晶の対称性の条件から弾性テンソルと降伏テンソルの独立な成分がいずれも3個であることを示し、それらのテンソルと構成式の6次元 T 表示を求めた。

ここでは弾性領域と塑性領域両方に共通する一つの構成式を考察する。それによって両領域の間の滑らかな移行を調べるために単純伸び変形を解析しよう。そして構成式を積分して応力-伸び関係を求めることにしよう。

2 立方異方性弾・塑性構成式

立方異方性熱・弾・塑性体の塑性流動中の構成式は(Ⅱ・25)^{*1}, (Ⅱ・19), (Ⅱ・17)によって

$$\dot{\sigma}^* = \mathbf{P} \mathbf{d}^* \quad (1)$$

$$\nu \sigma_{ij} = \left[\left(\lambda + \frac{2}{3} \mu + \frac{1}{3} \nu \right) \text{tr} \, \mathbf{s} + e T \right] \delta_{ij} \quad (2)$$

* 本報を「立方異方性塑性体 (第3報)」 「Cubic Anisotropic Plastic Materials, III」とする。

原稿受理 昭和49年5月16日

** 正 会 員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

*1 (Ⅱ・25) とは第2報の(25)式のことを指す。以下同様の記号を使うことにする。

$$\eta = -\frac{e}{\rho} \text{tr} \, \mathbf{s} - ET \quad (3)$$

で与えられる。ここで $*$ は偏差テンソルを表わす。4階テンソル $\mathbf{P}$ の6次元 T 表示は(Ⅱ・26)-(Ⅱ・31)によって与えられている。

降伏条件は(Ⅱ・24)より

$$\frac{1}{2} (2\beta + \gamma) (\sigma_{11}^{*2} + \sigma_{22}^{*2} + \sigma_{33}^{*2}) + 2\beta (\sigma_{23}^{*2} + \sigma_{31}^{*2} + \sigma_{12}^{*2}) = K \quad (4)$$

となる。ここで K は物質定数である。これより(Ⅱ・31)で定義した量 G は

$$G = 2(2\mu + \nu) (2\beta + \gamma) K - 4\beta (2\mu\gamma + 2\nu\beta + \gamma\nu) \times (\sigma_{23}^{*2} + \sigma_{31}^{*2} + \sigma_{12}^{*2}) \quad (5)$$

となる。 G として(5)式を使った構成式(1)は、もちろん塑性流動中で成り立つ関係式である。

ある弾・塑性体の構成式を考える場合、二つの選択(a), (b)が可能である。(a)は弾性状態と塑性状態に、それぞれ別個の構成式を配分する方法である。(b)は両状態に共通な一つの構成式を採用する方法である。(a)の立場として Prager³⁾ その他の研究があり、(b)の立場として Prandtl-Reuss 型弾・塑性体に関する Thomas⁴⁾, Green⁵⁾, Truesdell⁶⁾ の研究がある。またトレスカ型降伏に従う弾・塑性体の単純せん断変形について解析した徳岡⁷⁾ の研究がある。このような(b)の立場の構成式は、いずれも降伏流動状態で成立する式をそのまま無負荷

の自然状態から連続して成立すると仮定したものである。本論文でも(b)の立場より立方異方性弾・塑性体の単純伸び変形を解析することにしよう。

構成式(1)の左辺は偏差応力テンソルの物質時間微分を表わし、第1報第4節の初めに述べたように、2次以上の項を省略してえられたものである。この物質時間微分は応力テンソルの時間変化が観測者に依存しないという基準系無差別の原理をみたしていない。この原理をみたす応力テンソル速度は無限に多く作れるが、ここでは物体粒子とともに剛体回転している観測者からみた時間変化を表わす、共回転時間微分

$$\dot{\sigma}^* \equiv \dot{\sigma}^* - \omega \sigma^* + \sigma^* \omega \quad (6)$$

を採用しよう。⁸⁾ここに ω はスピン・テンソルであって、速度ベクトル v によって

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

で定義される。(1)式の左辺を(5)で置きかえて

$$\dot{\sigma}^* = \mathbf{P} d^* \quad (8)$$

をえる。構成式(2)、(3)が基準系無差別の原理をみたすためには、その中に現われる ϵ としては、有限変形のひずみテンソルをとらなければならないことを強調しておく。

立方異方性弾・塑性構成式として、(5)の G をもつ(8)と、(2)、(3)から成ると定義しよう。もし(5)の G の代わりに(4)よりせん断応力成分を法線応力成分で表現して、それを(Ⅱ. 31)の G の第2項に代入してえられるものを採用するならば、別の構成式をえることになる。本論文では(5)の G を採用して議論を進めることにする。

3 単純伸び

次の変形を考える。

$$v_i = \{d(t) + d_i(t)^*\} x_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (9)$$

$$d_1(t)^* + d_2(t)^* + d_3(t)^* \equiv 0. \quad (10)$$

ここで $d(t)$ 、 $d_i(t)^*$ は時間 t の任意関数である。(9)式より

$$\left. \begin{aligned} d_{ii} &\equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = d(t) + d_i(t)^*, \\ d_{ij} &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となり、

$$\left\| \begin{array}{cc} d_1(t)^* & 0 \\ & d_2(t)^* \\ 0 & & d_3(t)^* \end{array} \right\| \quad (12)$$

は偏差ひずみ速度テンソルを与える。これは場所に無関係な時間だけの関数であるから、(9)式で定義された変形は均一変形である。本論文では繰り返された指標についての和の規約はとらないものとする。(9)式より $\partial v_i / \partial x_j = 0$ ($i \neq j$)となるから、スピン・テンソル(7)は恒等的に零になる。よってこの変形では(8)式は(1)式に還元される。 $v_i = dx_i / dt$ として(9)式を積分して $t=0$

で $x_i = X_i$ として

$$x_i = X_i \exp \left\{ \int_0^t (d + d_i^*) dt \right\}, \quad (13)$$

をえる。これより変位ベクトルは $u_i = x_i - X_i$ となり、伸びの大きさを表わす量として

$${}_L \epsilon_i \equiv \frac{u_i}{X_i} = \exp \left\{ \int_0^t (d + d_i^*) dt \right\} - 1, \quad (14)$$

$${}_E \epsilon_i \equiv \frac{u_i}{x_i} = 1 - \exp \left\{ - \int_0^t (d + d_i^*) dt \right\} \quad (15)$$

の二種類が定義できる。(14)をラグランジュの伸び、(15)をオイラーの伸びと呼ぶことにする。

単純伸びの場合には、対称性から

$$\left. \begin{aligned} d_2^* &= d_3^*, \\ \sigma_{22} &= \sigma_{33}, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

と仮定することができる。よって

$$\left. \begin{aligned} d_1^* &\equiv d^*, \quad d_2^* = d_3^* = -\frac{1}{2} d^*, \\ {}_L \epsilon_1^* &\equiv {}_L \epsilon^*, \quad {}_L \epsilon_2^* = {}_L \epsilon_3^* = -\frac{1}{2} {}_L \epsilon^*, \\ {}_E \epsilon_1^* &\equiv {}_E \epsilon^*, \quad {}_E \epsilon_2^* = {}_E \epsilon_3^* = -\frac{1}{2} {}_E \epsilon^*, \\ \sigma_{11}^* &\equiv \sigma^*, \quad \sigma_{22}^* = \sigma_{33}^* = -\frac{1}{2} \sigma^* \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となる。よって(Ⅱ. 28)-(Ⅱ. 31)、(5)から

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= (2\mu + \nu) \\ &\times \left\| \begin{array}{ccc} 1 - \Gamma \sigma^{*2} & \frac{1}{2} \Gamma \sigma^{*2} & \frac{1}{2} \Gamma \sigma^{*2} \\ \cdot & 1 - \frac{1}{4} \Gamma \sigma^{*2} & -\frac{1}{4} \Gamma \sigma^{*2} \\ \cdot & \cdot & 1 - \frac{1}{4} \Gamma \sigma^{*2} \end{array} \right\|, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{C} = 2\mu \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right\|,$$

$$\Gamma \equiv \frac{2\beta + \gamma}{2K}$$

となる。ここで行列の中の点は対称な成分を表わす。これらの量を(Ⅱ. 27)に代入すると構成式(8)は唯一つの独立な関係

$$\frac{d\sigma^*}{dt} = (2\mu + \nu) \left(1 - \frac{3}{2} \Gamma \sigma^{*2} \right) d^* \quad (19)$$

に帰着される。

一方体積変化と温度変化による $\nu \sigma$ と η は(16)の条件の下で(14)か(15)よりひずみ ϵ を計算して構成式(2)と(3)に代入すれば、与えられた温度変化 T のもとでのそれらの量を計算することができる。この計算は省略する。

ここでは(19)の方程式より σ^* を求めよう。簡単に積分できて、初期条件として $t=0$ で $\sigma^*=0$ と仮定して

$$\sigma^* = \sigma_0^* \frac{\exp\left(n \int_0^t d^* dt\right) - 1}{\exp\left(n \int_0^t d^* dt\right) + 1} = \sigma_0^* \tanh\left(\frac{1}{2} n \int_0^t d^* dt\right), \quad (20)$$

$$\sigma_0^* = 2\sqrt{\frac{K}{3(2\beta + \gamma)}}, \quad n = (2\mu + \nu)\sqrt{\frac{3(2\beta + \gamma)}{K}} \quad (21)$$

をえる。等方性の場合には Prager は(20)の結果と類似の応力-伸び関係を提出している。(20)より

$$-\sigma_0^* < \sigma^* < \sigma_0^* \quad (22)$$

をえる。

さてこれまでに現われた量を無次元化しよう。 n ,

$$\int_0^t d^* dt \text{ および } \sigma^* = \frac{\sigma^*}{2\mu}, \quad \nu = \frac{\nu}{2\mu}, \quad \gamma = \frac{\gamma}{2\beta}, \quad K' = \frac{K}{8\mu^2\beta} \quad (23)$$

で定義された量は無次元量である。(21)と(23)より

$$\sigma_0^* = 2\sqrt{\frac{K'}{3(1+\gamma')}}, \quad n = (1+\nu')\sqrt{\frac{3(1+\gamma')}{K'}} \quad (24)$$

とすると、応力-伸び関係式(20)は

$$\sigma^* = \sigma_0^* \frac{\exp\left(n' \int_0^t d^* dt\right) - 1}{\exp\left(n' \int_0^t d^* dt\right) + 1} = \sigma_0^* \tanh\left(\frac{1}{2} n' \int_0^t d^* dt\right) \quad (25)$$

となる。

伸びの定義(14), (15)に従って x_1 方向の偏差伸びを

$$\left. \begin{aligned} L\varepsilon^* &\equiv \exp\left(\int_0^t d^* dt\right) - 1, \\ E\varepsilon^* &\equiv 1 - \exp\left(-\int_0^t d^* dt\right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

で定義しよう。これらはもちろん無次元量である。これより

$$-1 \leq L\varepsilon^* < \infty, \quad -\infty < E\varepsilon^* \leq 1 \quad (27)$$

となる。(24)と(26)より

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_0^*} = \frac{\sigma^*}{\sigma_0^*} = \frac{(1+L\varepsilon^*)^n - 1}{(1+L\varepsilon^*)^n + 1} = \frac{1 - (1-E\varepsilon^*)^n}{1 + (1-E\varepsilon^*)^n} \quad (28)$$

となる。この関係より、あきらかに $\sigma^* \rightarrow -\sigma^*$, $L\varepsilon^* \rightarrow -E\varepsilon^*$ のおきかえが可能である。したがって $\sigma^* \sim L\varepsilon^*$ 線図と $\sigma^* \sim E\varepsilon^*$ 線図は原点 $\sigma^* = 0$, $\varepsilon^* = 0$ について互いに点対称である。

4 考 察

変形が充分小さい場合 $|L\varepsilon^*| \ll 1$, $|E\varepsilon^*| \ll 1$ であるから(28)より $L\varepsilon^* \sim E\varepsilon^*$ であり、(28)より

$$\sigma^* \sim (2\mu + \nu)L\varepsilon^* \sim (2\mu + \nu)E\varepsilon^* \quad (29)$$

となる。この関係は純粋弾性変形を表わしている。また変形が充分大きい場合には $L\varepsilon^* \gg 1$, $E\varepsilon^* \sim 1$ である場合には

$$\sigma^* \sim \sigma_0^* \quad (30)$$

となり、また $L\varepsilon^* \sim 1$, $E\varepsilon^* \ll -1$ である場合には

$$\sigma^* \sim -\sigma_0^* \quad (31)$$

となる。(30)は伸びが充分大きい場合応力が一定値 σ_0^* に、また(31)は縮み変形が充分大きい場合 $-\sigma_0^*$ に漸進的に移行することを示している。

(28)は立方異方性弾・塑性体の単純伸び変形の応力-伸び関係は無次元量 $n = n'$ のみに依存することを示している。 n は(21)より $K, \mu, \nu, \beta, \gamma$ に、あるいは(24)より無次元量 K', ν', γ' に依存している。等方性弾・塑性体では $\nu = \gamma = 0$ であるから n は

$$n_{iso} = \sqrt{\frac{3}{K'}} \quad (32)$$

となる。よって単純伸びの場合、立方異方性弾・塑性体はその降伏値 K が

$$K_{iso} = \left(\frac{2\mu}{2\mu + \nu}\right)^2 \left(\frac{2\beta}{2\beta + \gamma}\right) K \quad (33)$$

の値をもつ等方性体と同一の行動をすることがわかる。

前節では変形(9), (13)のもとでの構成関係(8)の解を求めた。一方すべての物体は質量の保存則

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (34)$$

と線型運動量の保存則

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \dot{\rho} \mathbf{v} \quad (35)$$

をみたさなければならない。運動量モーメントの保存則は対称な応力テンソルによって自動的にみたされている。ここで $\mathbf{b}$ は単位質量あたりの体力である。

(34)に(9)を代入して

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-3 \int_0^t d^* dt\right) \quad (36)$$

をえる。一方単純伸び変形の場合変形は均一であり、したがって応力は均一になるから(35)式の左辺第一項は零である。そして加速度は零ではないから(36)式が成り立つためには適当な体力を加えなければならない。しかし普通の塑性流動状態では加速度は充分小さいとみなせるから、線型運動量の保存則は体力が零の近似で充分成り立つと考えることができる。それゆえ、このような条件のもとで第3節で求めた結果は有効であると考えることができる。

参 考 文 献

- 1) 徳岡辰雄, 材料, **23**, 444 (1974).
- 2) 徳岡辰雄, 材料, **23**, 448 (1974).
- 3) Prager, W., Proc 5th Int. Congr Appl Mech., Cambridge, Mass., 234 (1938).
- 4) Thomas, T. Y., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **41**, 720 (1955), *ibid*, **42**, 908 (1955).
- 5) Green, A E, Proc Roy Soc London, **A234**, 46(1956).
- 6) Truesdell, C, J Appl. Phys., **27**, 441 (1956).
- 7) Tokuoka, T, Bull. Acad. Polonaise Soc. Ser. Sci. Tech, (Poland) **20**, 437 (1972); Int J Non-Linear Mech., **8**, 41 (1973); 材料, **22**, 403 (1973).
- 8) Truesdell, C, and R. Toupin, "The Classical Field Theories", Encyclopedia of Physics, Ed by S. Flügge, Vol. III/1 (1960) Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg