輪郭法による粒子の形状係数について*

中 野 産 治** 遠 藤 外 雄***

On the Shape Factor of Particles by 'Curve-Fitting Method'

by

Sanji NAKANO

(Faculty of Science and Engineering, Ritsumeikan University, Kyoto)

and Sotou ENDO

(Hiroshima-Denki Institute of Technology, Hiroshima)

A minimum circle circumscribing the projection of a particle is divided into four parts by defining the circumcenter to the origin of a Cartesian coordinate system.

The shape index of the projection α ; is obtained by fitting the contour of each parts of the projection to a mathematical equation $y = b^n/a^n(a^n - x^n)^{1/n}$.

The degree of ratio to circle, φ_p defined as the ratio of an area of a figure by curve-fitting to that of a minimum circumscribed circle of the projection is given as follows; $\varphi_p = a(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_4 b_4) / (\pi/4) d_0^2$, where d_0 is the diameter of the minimum circumference and is related to the major axis of the projection by $a_n = a = d_0/2$, and b is the minor axis of the projection.

This type of analysis for a shape factor of projection is named as 'Curve-fitting method'.

The ratio to sphere, $\Psi_i = \varphi_i \sqrt{\varphi_i'}$ which is determined by the ratio of true area of the projection of a model particle to the area of a circumscribed circle for the same projection, coincides well with that determined by the 'Curve-fitting method'.

By using various kinds of model particles, the comparisons among the Wadells' degree of true sphericity, the space filling factor and the degree of ratio to sphere are carried out.

The results clearly demonstrate that the value of Ψ_p determined by the 'Curve-fitting method' falls in between the other two quantities and that the degree of ratio to sphere for these model particles calculated from the ratio of the true area of the projection agrees fairly well with the ideal value.

(Received Jan. 22, 1975)

1 緒 言

粒子の形状係数の測定方法には種々あるが、本報告では投影法で考察したものである。

粒子の形状係数を考えるとき、種々の形状の粒子が混合している場合と均一規則形状の粒子群の場合を区別する必要がある。さらに、粒子の表面のうねり・あらさの度合を考慮する必要が感じられる。しかし、ここでは精度をある程度犠牲にして、投影像の輪郭線に近似する数学的な曲線に置き換えてその近似面積を求め、この近似面積と投影像の最小外接円の面積の両面積比を平面的形状係数、似円率 φ_p とし、側面の似円率を φ_p' とした。これらから立体的な形状係数の似

球率 Ψ_p を算出して輪郭法と名付けることにする。²⁾

この方法と Wadell の真の球形度とある種の充足率の三者を比較、検討し、さらに精度を確かめるため計算により面積、体積を求められるモデル粒子で試した。

2 投影像の性格

一般に投影像は同一粒子でも投影の仕方によって種々の形状を示す。³⁾ これは粒子の丸・四角・三角などのような基本的形状のみならず、粒子の長さ、幅および厚みなどの寸法比によって投影像の形状は異なる。したがって、本報告は安定の座りにおいての投影と仮定した。この条件のもとでは平面投影像は投影線に対して粒子の向きが変化してもその長さ a と幅 b の寸法の変化はなく、その向きが変化するのに対して、側面投影像のときは投影方向に対する粒子の向きにより、厚み c は一定であるが、側面像における長さにはかなりの変化

* 原稿受理 昭和50年1月22日

** 正 会 員 立命館大学理工学部 京都市北区等持院北町

*** 正 会 員 広島電機大学 広島市瀬野川町中野

を生ずる。このような場合、数多くの側面投影像から得られる形状係数の平均値を側面投影像の代表値として用いるのが妥当と考える。これらのことから、平面投影のみで側面投影像を測定しない粒子の形状係数の値は誤差が大きいこととなる。

3 似円率の定義

投影像に外接する最小円を描き、この円を丸穴ふり目の直径と考えれば、この穴を通過できる最大面積の投影像の形状は円であり、他の一般の形状の投影像の面積は円よりも小さい。それゆえに、投影像の最小外接円と一般形状の投影像との両面積比を似円率とする。別の考え方をすれば、最小外接円の面積は二次元的（平面的）に一般形状の投影像が巡回運動をした場合、他の投影像がこの円内に入り込まない限り平面的に自由な巡回が可能である。ところが、投影像の面積は一般には円形より小さい。それゆえ充てんなどの場合、最小外接円内に他の投影像が入り込む。その割合は投影像の形状によって異なる。さらに詳細に考察すると投影像とその最小外接円の接点では、この点より内側に他の投影像の侵入を許さないが、他の位置ではそれぞれ異なる侵入ができる。最も深く最小外接円内に他の投影像が入り込む限界は最小外接円とこれと同心の投影像の最大内接円とすると、他の投影像が侵入できる代表値は投影面積円相当径と仮定すれば最小外接円の面積 A_0 と上記の近似的面積円相当径 d_m の面積 A_m との比が一つの平面的な粒子の形状を示すとし、これを似円率 φ とする。これを式で示すと(1)式になる。側面投影像のものには、' をつけて区別をする。

$$\varphi = \varphi' = \frac{A_m}{A_0} = \frac{(\pi/4)d_m^2}{(\pi/4)d_0^2} = \frac{d_m^2}{d_0^2} \quad (1)$$

4 輪郭法による似円率

粒子の投影像の輪郭線は一般的に比較的大きい振幅の起伏、すなわち、うねりと細かい起伏の表面あらさで形づくられているが、うねりと表面あらさを無視すると、概念的に輪郭線は比較の簡単な曲線をもって置き換えることができる。これを Figs. 1, 2 に示す。しかし、Fig. 1 のように投影像の全輪郭線を円とか直

Fig. 1. Schematic illustration of drawing means of contour line for projection.

Fig. 2. The means of obtaining the projected area of particles through a 'Curve-fitting method'.

線で囲むのでは誤差が大きいと考えられる。

そこで、Fig. 2 に示すように投影像に最小外接円を描き、この外接円と輪郭線の接点における角度の鋭い点と中心点を結ぶ基線を引き、基線に直交線を引きとこの円は四等分されるとともに投影像も四個の部分に分割される。

形状係数は形状指数に相当するものと寸法比によって定まる。したがって各分割部分においても同様であるから、各分割部分別に、たとえば次節に示す性格のわかった五種類の線のうち、投影像の輪郭線に最も近似的な線で置き換えることによって、この線のもつ形状指数に相当する係数 α_i が得られる。

つぎに寸法比として、投影像の分割部分の長径 a_i は基線と最小外接円の交点からこの円の中心点までの距離とすると外接円の半径となる。短径 b_i は基線から直角に投影像の輪郭線の最大距離を測定すれば、投影像の 1/4 の近似面積が得られる。これらの四部分の面積を加算すれば一個の投影像の近似的な全面積が求められる。

この近似的な投影像の面積と投影像の最小外接円の面積との比を似円率 φ_p とし、側面投影像から得られるものを φ_p' として区別をした。

5 投影像の輪郭線に近似する線

投影像の輪郭線に近似する曲線を考えるとき、数学的に明確な数多くの曲線があるが、ここでは投影像に外接する最小円を用いることと、一般の粒子の形状はだ円体に近いものが多いであろうことから、だ円の式の指数を変化させた線群を選んでみたのが下式である。

$$y = \frac{b_i}{a_i}(a_i^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}, \quad A_i = \frac{3\pi}{32} a_i b_i \doteq 0.295 a_i b_i \quad (2)$$

$$y = \frac{b_i}{a_i}(a_i - x), \quad A_i = \frac{1}{2} a_i b_i = 0.500 a_i b_i \quad (3)$$

$$y = \frac{b_i}{a_i}(a_i^{3/2} - x^{3/2})^{2/3}, \quad A_i \doteq 0.675 a_i b_i \quad (4)$$

$$y = \frac{b_i}{a_i}(a_i^2 - x^2)^{1/2}, \quad A_i = \frac{\pi}{4}a_i b_i = 0.785 a_i b_i \quad (5)$$

$$y = \frac{b_i}{a_i}(a_i^3 - x^3)^{1/3}, \quad A_i \div 0.884 a_i b_i \quad (6)$$

上式の a_i と b_i は平面的な長径と短径を表わす。

(2)~(6)式の間の比較を容易にするため a_i と b_i を定数として、その軌跡を Fig. 3 に示す。図の各線の番号は上記の式の番号より一番若い番号に対応し、面積 A_i は a_i , b_i の軸線とそれぞれの曲線で囲まれた面積である。

Fig. 3. Approximate curve for project's contour line.

1の線は星芒形である。2の線は直線でその面積は三角形である。3の線は直線とだ円曲線の中間的である。したがってこの面積 A_i は三角形とだ円の面積の中間的値をとる。4の線はだ円で $a_i = b_i$ のとき円となる。5の曲線の面積はだ円より大きい。そこで似円率の測定にさいして、長径 a_i は投影像の最小外接円の半径と同値であるが、短径 b_i は同じ最小外接円をもつ投影像でも像の形状によって異なる値をとる。それゆえに、 a_i に対して b_i が比較的大きい値の場合、(6)式の曲線は最小外接円よりはみだすことがあるから注意を要する。(2)~(6)を一般式に書き換えると次式となる。

$$y = \frac{b_i}{a_i}(a_i^n - x^n)^{1/n}, \quad A_i = \alpha_i a_i b_i \quad (7)$$

(7)の左式の指数 n が定まれば右式の面積 A_i の式の形状指数に相当する α_i も一定値をとる。

似円率を求める場合、一個の投影像を四等分し、各分割部分別の形状指数に相当する $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ と投影像の短径 b_1, b_2, b_3, b_4 は一般に異なる。しかし a_1, a_2, a_3, a_4 は投影像の最小外接円の半径と同一値であるから似円率 φ_p は次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{A_0} \\ &= \frac{\alpha(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_4 b_4)}{(\pi/4)d_0^2} \end{aligned} \quad (8)$$

$a = a_1 = a_2 = a_3 = a_4, d_0 = 2a, d_0$ は最小外接円の直径

6 似 球 率

粒子の平面的形状係数の似円率から立体的形状係数の似球率を算出する場合、平面の似円率 φ_p と側面の似円率 φ_p' の平方根を平均して、単に三乗して立体化するよりは、2節の投影像の性格から立体の寸法的表現するとき、 $a \times b$ (面積) $\times c$ (厚み) $= V$ (体積)を表わすと同様に考えれば、長さ a と幅 b の二軸方向の寸法が明確な平面投影像の似円率 φ_R (面積的)に側面投影像の厚み c の一軸のみが正確な、数多くの似円率の平均値の平方根 $\sqrt{\varphi_p'}$ (長さ)を乗じた値の立体的な似球率 Ψ_p の方がより正確な表現であると考ええる。これらのことから、似球率は粒子の体積と粒子の最小外接だ円体との体積比となる。すなわち、平面投影面積円相当径 d_m の自乗と側面投影面積円相当径 d_m' を用いて $V_i = (\pi/6)d_m^2 d_m'$ のだ円体として表わされる。したがって、粒子の最小外接だ円体の体積 V_0 も同様に $V_0 = (\pi/6)d_0^2 d_0'$ となり似球率 Ψ_p は次式となる。

$$\Psi_p = \frac{V_i}{V_0} = \frac{(\pi/6)}{(\pi/6)} \times \frac{d_m^2 d_m'}{d_0^2 d_0'} = \frac{d_m^2}{d_0^2} \times \frac{d_m'}{d_0} = \varphi_p \sqrt{\varphi_p'} \quad (9)$$

ここで最小外接だ円体としたのは一般に粒子の平面・側面の投影像の最小外接円の直径は異なる、このように平面的な粒子の長径が変化する、この粒子が転動する場合はある一軸を回転軸にし回転するとすれば、回転に必要な空間は回転体となり、特別の場合は球体であるが、一般形状の粒子では平面と側面の投影像の最小外接円の直径は異なる。ところが回転に必要な空間が球体とすれば、平面と側面の投影像の最小外接円の直径が同値でなければならない。しかし、一般形状の粒子ではこのようなことは生じない。上記の例は単に概念であって、似円率は面積比であるから無次元で実際の寸法には無関係である。したがって、(9)式の適用については φ_p と φ_p' はできる限り数多くの投影像から得られた平均値を用いることが望ましい。同一規則粒子でも投影方向により側面投影像の形状が大きく異なることがあるから注意する必要がある。さらに(9)式で φ_p か φ_p' のいずれかの値が極限値0であれば Ψ_p は0になるが、 $\sqrt{\varphi_p}$ と $\sqrt{\varphi_p'}$ の平均値を三乗した似球率では0にならない不合理がある。

7 Wadell の真の球形度と一種の充足率

Wadell の真の球形度の測定に当たっては、定義に従って、粒子の表面積とこれと同体積の球の表面積を算出し両表面積比から得る。

充足率とは粒子に外接する直方体の体積と粒子の実際の体積との比である³⁾とされている。ところが先に述べたように、粒子がいかなる方向にもすなわち三次元的に自由に自転するに必要な空間は粒子の最小外接球

の空間であり、この空間の体積と粒子の実際の体積との比をある一種の充足率とすると、完全球体の粒子の場合には最小外接球空間の体積と粒子の実際の体積が同一であるから、ここで述べる充足率は1となる。しかし、球以外の一般の粒子では形状の変化に応じて種々の値を取る。

以上二種類の形状係数は簡単な幾何学的形状の粒子以外は計算が困難であるから、不規則な一般形状の粒子をさけて、次に述べるモデル粒子を想定して比較を試みた。

8 モデル粒子

モデル粒子は Fig. 1 に示す偏長だ円体、偏平だ円体、円柱、円板、角柱および角板の六種類の形状の粒子を仮定し、これらの粒子の長さ、幅、厚みをそれぞれ a , b , c とするとき、 $a \geq b = c$ を柱状（偏長だ円体、円柱、角柱）とし、 $a = b \geq c$ のものを板状（偏平だ円体、円板、角板）とした。別の考え方をすれば、

Fig. 4. Several model-shapes of a particle.

たとえば円柱の長さ a を直径（幅 b , 厚み c ）より小さくしたとき円板となる。したがって、円柱と円板は基本的に同じ形状と考える。このことから偏平・偏長だ円体をだ円体類、円柱と円板を円柱類、角柱と角板を角柱類と分類し、この六種類のモデルの c/a を変化させて平面と側面投影像を作図して、面積計算公式による真実の面積比を φ_i , 側面の似円率の最大・最小値の平均値を便宜上側面の似円率 φ_i' とした。これを(9)式で計算した似球率を Ψ_i で示した。これは理想的なものであるが、これに対して実験的な立場として、輪郭法で前述と同様に、平面・側面の似円率 $\varphi_p \cdot \varphi_p'$ を(9)で計算した値を Ψ_p とした。なお Wadell の真の球形度とある種の充足率は定義に従って公式計算で求めた結果である。

9 結果および考察

Figs. 5~7 はだ円体類、円柱類、角柱類のモデル粒子の厚み c と長さ a との比、すなわち、 c/a の変化に対する各種の形状係数の変化と各形状係数間の関係を示した。1の番号の線は真の球形度。2の線はモデ

Fig. 5. Schematic illustration of getting the projected area of particles for ellipsoids.

Fig. 6. Schematic illustration of obtaining the projected area of particles for columns.

Fig. 7. Schematic illustration of the projected area of particles for square columns.

ル粒子の計算による真実の面積比の似円率から $\varphi_i \sqrt{\varphi_i'}$ の式(9)を用いて求めた似球率 Ψ_i である。3の線は一種の充足率でモデル粒子を公式計算したものである。さらに同番号の線のうち実線は柱状、点線は板状を示し、○は輪郭法による柱状、●は輪郭法の板状の値を示し、各線は理想値で各点示は実験値に相当する。

9・1 だ円体類

Fig. 5 に示すだ円体類は三種類の形状係数はともに c/a の変化に応じて、比例的に 0 から 1 の間を変化するが、中間の径路は三者ともにそれぞれ異なる。

番号 1 の線の真の球形度は c/a が 0 から約 0.3 までは変化が激しいが、0.3 以上では変化が少なく上に凸の曲線を描く、柱状の実線と板状の点線の差がほとんどなく、他の形状係数よりかなり大きい値を示した。

番号 3 の線の充足率は板状の点線では c/a が 0 から 1 まで直線であるが、柱状の実線では c/a が 0 から約 0.4 までは変化が少なく、0.4 以上では比較的变化の大きい上凹の曲線を描き、板状と柱状の係数値の開きは真の球形度より大きい。

番号 2 の線の似球率は曲線のあり方が形状係数の値の上からも前二者の中間的である。板状の点線は上に凸、柱状の実線ではわずかに上に凹の曲線をもち、柱状と板状の線の開きは三形状係数中最大差を示す。

9・2 円柱類

Fig. 6 の円柱類は三種類の形状係数はともに c/a の値の増加に対して 0 から 1 にならず、0 からそれぞれの形状係数の一定値に集まる傾向がある。

真の球形度の 1 の線では c/a が 0 から約 0.5 までは比較的变化が大きい、0.5 以上では非常に変化が少なく上に凸の曲線を描き、他の形状係数に比して柱状と板状の値の差が小さい。とくに c/a が約 0.5 以上では柱状と板状の形状の異なりは明確にできない。

充足率の 3 の線の場合は板状では c/a が約 0.6 以上で減ずる傾向がある。柱状では幾分 S 字形の曲線となる。柱状と板状の数値上の差は明確である。

似球率の 2 の線はその数値と曲線の傾向はともに上記の両者の中間に位置する。また柱状と板状の値の開きも比較的大きい。

円柱類では c/a が 1 で柱状と板状は同一形状の粒子であるが柱状と板状の値に差を生ずるのは粒子の円柱面と端面のいずれを平面像と想定するかで各投影像の図形が異なり、似円率が変化し、その結果が似球率の値に大きい差を生じた。しかし、これは特定の 1 個の粒子を想定したものである。これで三種類の形状係数を比較し、輪郭法の両似球率の精度を確かめるための図であるが、実際には数多くの粒子の投影像の平均値を用いれば、平面投影像に円柱面と端面像が適当に入り乱れて、同一形状粒子の場合、同一条件の下では一定値を示すと思われる。

9・3 角柱類

Fig. 7 の角柱類では c/a が 0 から 1 に向かうに従って、各形状係数の値の増加の割合は他の粒子形状より少ない、各曲線はともに上に凸の曲線となる。

真の球形度は 1 の線では c/a が約 0.5 までは変化が激しいが、約 0.5 以上では横軸に平行的で、さらに柱状と板状の形状係数の値の差は誤差範囲内である。

充足率の 3 の線は Figs. 5~7 中最小の変化で柱状では幾分 S 字形の曲線となる。板状は c/a が 0 の近傍で比較的大きく、1 に近づくに従って変化は少ない。

似球率の 2 の線は前二図と同様に形状係数の値とその曲線の傾向が真の球形度と充足率の中間的で、柱状と板状の数値の開きも三者中最大差を示す。

9・4 理想的似球率と輪郭法による似球率の比較

理想的な似球率 Ψ_t の曲線と輪郭法による実験的な Ψ_p の値の点示は比較的一致した。しかし、円柱類と角柱類で幾分誤差が大きいのは輪郭法による似円率の値を求める過程で、輪郭線に合致する数学的近似曲線の種類の間隔が広いことと、数学的近似曲線を投影像の輪郭線に適合させる場合の技術上の精度に問題があると思う。

10 結 言

Wadell の真の球形度、一種の充足率、理想的な似球率の三種類の形状係数と c/a の関係曲線の Figs. 5~7 で共通点は c/a が 0 から 1 に向かうに従って、その値が増加する。しかし、 c/a が 1 のときだ円体類では全形状係数の値が 1 であるが、円柱類と角柱類については各形状係数は 1 以外のそれぞれ一定値を示す。

Wadell の真の球形度は c/a が約 0.5 を境に 0 に向かうに従って形状係数の値の変化が著しく、逆に c/a が 1 に近づけば形状係数の値の差が明らかにできない。

充足率は曲線の接線の傾きの変動が比較的小なく、柱状と板状の差も比較的確である。

似球率は形状係数の値と曲線の性格は前二者の中間的存在である。すなわち、理想的な似球率は曲線の接線の傾きの変動が Figs. 5~7 中最小で、柱状と板状の数値的な差もかなりある。これらのことはそれ相当に正確に粒子の形状を表現していると思われる。輪郭法による似球率は理想的な似球率の曲線に比較的一致しているから、不規則な一般形状の粒子でも数多くの粒子群を測定した結果の平均値は比較的精確に粒子の形状を表現するものと思われる。

(昭和49年10月3日 第12回粉体に関する討論会にて講演)

参 考 文 献

- 1) たとえば井伊谷綱一編、粉体工学ハンドブックⅣ, p. 59 (1959).
- 2) たとえば三輪茂雄、粉粒体工学, p. 69 (1972) 朝倉書店
- 3) 久保輝一郎ら、粉体—理論と応用—, p. 75 (1962) 丸善