振動下における木材の静摩擦係数*

藤原 勝 敏** 野 口 昌 巳*** 杉 原 彦 一****

Coefficient of Static Friction of Wood under Vibration

by

Katsutoshi FUJIWARA

(Faculty of Agriculture, Kyoto University, Kyoto)

Masami NOGUCHI

(Faculty of Agriculture, Tokyo University of Agriculture and Technology, Fuchu)

and Hikoichi SUGIHARA

(Faculty of Agriculture, Kyoto University, Kyoto)

In order to obtain some informations concerning the effect of vibration in vibratory cutting of wood, the coefficient of static friction under vibration was investigated. The experiments were carried out using a sample of wood block and as an antisample, a brass plate vibrating with low frequency 20-100 Hz.

The coefficient of static friction under vibration could apparently be reduced. And the greater the acceleration of vibration, the more reduction of the apparent coefficient of static friction was obtained. Furthermore, the experimental results were in good agreement with the theoretical results.

Under a sinusoidal vibration with one degree of freedom, the apparent coefficients of static friction in the three directions, μ_x (parallel to the direction of vibration), μ_y (perpendicular to the direction of vibration), $\mu_{\pi/4}$ (45°-direction to the direction of vibration), are given by the following formulas respectively,

$$\mu_x = \mu_0 - \lambda, \quad \mu_y = \sqrt{\mu_0^2 - \lambda^2}, \quad \mu_{\pi/4} = \sqrt{\mu_0^2 - \frac{\lambda^2}{2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

where μ_0 is the true coefficient of static friction and $\lambda = a\omega^2/g$ (a =amplitude, ω =angular frequency, g =acceleration of gravity) is the ratio of accelerations.

Under three-dimensional vibration, furthermore, the apparent coefficient of static friction in the y -direction, μ_y , is given by the following formula,

$$\mu_y = \frac{\sqrt{\mu_0^2 (g + \ddot{z})^2 - \dot{x}^2 - \ddot{y}}}{g}$$

where $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ and $\ddot{z}$ are the acceleration of vibration in the x -, y - and z -direction respectively.

(Received Apr. 30, 1975)

1 緒 言

互いに接触している物体相互間に振動が作用した状態では、静および動摩擦係数とも著しく小さいことが認められている^{1)~6)}。振動下での摩擦挙動に関するこれらの基礎的知見は振動切削において生じる種々な現象（たとえば切削力の減少、工具摩耗の減少、仕上面粗さの減少等）を解析する上で大切であると考えられる。

本研究は木材の低周波振動切削機構の解析を行なうための基礎実験として行なったものであり、低周波振動下における静摩擦挙動をメカニカルな観点から理論的および実験的に検討した。すでに横山は傾斜平面を振動させて実験を行ない、金属間の静摩擦挙動に関して理論的關係と実験結果の良好一致を見いだしている。本実験は比較的实验装置が簡単な水平振動板を使用し、主として一次的に振動する真ちゅう製の水平振動板と木材の間の静摩擦挙動を検討した。この場合、物体をある外力で引張り、物体がすべる瞬間の力を測定する必要がある。そこでこの力をロードセルで測定する

* 原稿受理 昭和50年4月30日

** 京都大学農学部 京都市左京区北白川追分町

*** 正 会 員 東京農工大学農学部 府中市幸町

**** 正 会 員 京都大学農学部 京都市左京区北白川追分町

方法を採用したが、ここで問題となるのは正弦振動をしている振動板上の物体の振動の影響をロードセルに入れない方策である。そのために振動板の振動数 (20 ~ 100 Hz) よりはるかに低い固有振動数 (約 5 Hz) のゴムひもを介して引張ることとした。本実験の測定方法は比較的簡便で、測定精度もかなり良いと考えられる。

2 理 論

低周波振動下における静摩擦係数の挙動を理論的に次のように考える。いま Fig.1 のような直交三軸座標を考え、矢印の方向を正とする。三次元的に振動する x - y 水平面の原点に質量 M の物体がのっているとすると、物体に作用する力の三軸成分は x 方向において

Fig. 1. Forces acting on the block of mass M placed on the x - y horizontal plane which is subjected to three-dimensional vibration.

ては振動慣性力 $M\ddot{x}$, y 方向においては $M\ddot{y}$ として z 方向においては重力 Mg と $M\ddot{z}$ である (ただし物体は相対的にすべることなく、また x - y 水平面からの跳躍はないものとする)。ここで a は振動振幅、 ω は角振動数、そして g は重力加速度を表す。この状態において x - y 面上で物体を x 軸に対して時計回りに θ の方向に引張り、引張力を大きくしていったとき、物体がすべる瞬間の力を F_θ とする。ここで $M\ddot{x}$ と $M\ddot{y}$ の合力を F_r とし、さらに F_r と F_θ の合力を $F_{r,\theta}$ とすると (物体は $F_{r,\theta}$ の方向にすべる)、(1)、(2) 式が成立する。

$$F_r^2 = (M\ddot{x})^2 + (M\ddot{y})^2 \quad (1)$$

$$(F_{r,\theta})^2 = F_\theta^2 + F_r^2 - 2F_\theta \cdot F_r \cdot \cos(\pi - \alpha) \quad (2)$$

ところで、 $F_{r,\theta}$ は摩擦すなわち静摩擦係数 μ_0 と垂直力 $(Mg + M\ddot{z})$ の積に等しいはずであるから、(3) 式が成立する。

$$F_{r,\theta} = \mu_0 (Mg + M\ddot{z}) \quad (3)$$

また、 α は(4)式で示される。

$$\alpha = \theta - \beta = \theta - \tan^{-1} \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} \quad (4)$$

(1)、(3) として(4)式を(2)式に代入して整理すると、 F_θ の二次方程式として(5)式が成立する。

$$F_\theta^2 + 2F_\theta \sqrt{(M\ddot{x})^2 + (M\ddot{y})^2} \cos\left(\theta - \tan^{-1} \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right) + (M\ddot{x})^2 + (M\ddot{y})^2 - \mu_0^2 (Mg + M\ddot{z})^2 = 0 \quad (5)$$

(5) 式を解いて、正の値を採用し、 F_θ/Mg の形で表わし、これを μ_θ とおくと(6)式が成立する。

$$\mu_\theta = \frac{F_\theta}{Mg} = \frac{1}{g} \sqrt{\mu_0^2 (g + \ddot{z})^2 - \ddot{x}^2 - \ddot{y}^2 + (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) \cos^2\left(\theta - \tan^{-1} \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right)} - \frac{1}{g} \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \cos\left(\theta - \tan^{-1} \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right) \quad (6)$$

ここで、 μ_θ を見掛けの静摩擦係数と定義する。(6) 式において y , z の加速度成分が 0 の場合に、 x 方向 ($\theta = 0$) に引張ったときの μ_θ は(7)式で示される。

$$\mu_\theta = \mu_0 - \frac{\ddot{x}}{g} \quad (7)$$

(7) 式において μ_θ を μ_x とおき、 $\ddot{x}/g$ を加速度比 λ と定義すると、(8) 式が成立する。

$$\mu_x = \mu_0 - \lambda \quad (8)$$

同様にして y 方向 ($\theta = 90^\circ$)、 45° 方向に引張ったときはそれぞれ(9)、(10) 式が成立する。

$$\mu_y = \sqrt{\mu_0^2 - \lambda^2} \quad (9)$$

$$\mu_{\pi/4} = \sqrt{\mu_0^2 - \frac{\lambda^2}{2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

ところで、三軸加速度成分が存在する場合に、 x 方向 ($\theta = 0$) に引張ったときは

$$\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \cos\left(-\tan^{-1} \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right) = \ddot{x}$$

の関係が成立するので、結局(6)式は(11)式のようになる。

$$\mu_x = \frac{\sqrt{\mu_0^2 (g + \ddot{z})^2 - \ddot{y}^2 - \ddot{x}^2}}{g} \quad (11)$$

同様にして y 方向 ($\theta = 90^\circ$) に引張ったときは

$$\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right) = \ddot{y}$$

の関係が成立するので、結局(6)式は(12)式のようになる。

$$\mu_y = \frac{\sqrt{\mu_0^2 (g + \ddot{z})^2 - \ddot{x}^2 - \ddot{y}^2}}{g} \quad (12)$$

3 実験方法

Fig. 2 は実験装置の模式図である。まず発振器、増幅器、振動子と接続し、振動子と直結している水平振動板を正弦振動させた。振動板の振動加速度は加速度変換器で検出し、増幅し、電磁オシログラフに記録させた。また振動板上のサンプルとロードセルをゴムひも (重さ 0.13 g, 断面 0.7 × 0.7 mm) でつなぎ、サンプルがすべるまで、ハンドルを回すことにより、ねじ駆動で引張った。このときロードセルにかかる力を増幅し、記録させた。なお、サンプルは軽すぎて実験上都合が悪いので 30.6 g の付加荷重をのせた。

Fig. 2. Schematic diagram of experimental set-up.

振動板は真ちゅう製である。振動数は 20~100 Hz の範囲とした。振動板の表面は同心円状に研磨してあり、中心より放射状に測定した中央線平均粗さは約 0.15 μm であった。振動方向は Fig. 1 の x 軸と一致させた。

サンプルは気乾状態のブナ (*Fagus crenata* Blume) 板材 (気乾比重 0.63, 含水率 9.5%) で、大きさは 21 $\times$ 15 $\times$ 7 mm であり、サンプルの長軸方向、繊維方向そして引張方向を一致させた。サンプルの接触面は 80 番のサンドペーパーで研磨し、研磨方向は繊維方向に垂直の場合と平行の場合の 2 種類とした。研磨後、研磨方向に測定した中央線平均粗さは約 5 μm であった。

実験前に振動板の表面をアセトンで拭き、油脂等を除去する程度に処理し、またサンプルの接触面のチリ等はハケで除去した。サンプルの中心と振動板の中心が一致するようにセットし、引張速度約 1.5 mm/sec で x , y そして 45° 方向に引張り、それぞれの方向における見掛けの静摩擦係数を求めた。

なお本実験は特にことわりのない限り、恒温恒湿室 (室温 20℃, 関係湿度 61%) で行なった。

4 結果および考察

実験結果を考察するまえにロードセルに作用する力について検討しておく。 $a \cdot \sin \omega t$ で振動する振動板と一体となって振動している質量 M の物体とロードセルをスプリングでつなぎ、ロードセルを一定速度 V で引張ったとする。このときロードセルに作用する力 P は引張力 P_1 と振動による力 P_2 である。したがって

$$P = P_1 + P_2 \quad (13)$$

となる。解析が複雑になるので、正弦的に変動する振

動力 $P_2 = P_0 \cdot \sin \omega t$ のみが作用する場合を考える。

Fig. 3 においてロードセルに作用する力はバネとダンパを介して伝達される。この場合の運動方程式は

$$M\ddot{x} + r\dot{x} + kx = P_0 \cdot \sin \omega t \quad (14)$$

となる。(14)式を解いて

$$x = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \frac{r^2}{r_c^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \sin(\omega t - \varphi) \quad (15)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2 \frac{r}{r_c} \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (16)$$

ここで k はバネ定数, ω は物体の角振動数, ω_n はスプリングの固有振動数, r はスプリングの粘性減衰定数, r_c はスプリングの臨界粘性減衰定数, φ は外力に対する変位のおくれ角である。

さて、ロードセルに作用する力 F は

$$F = r\dot{x} + kx \quad (17)$$

である。したがって

$$F = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \frac{r^2}{r_c^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \{k \cdot \sin(\omega t - \varphi) + r\omega \cdot \cos(\omega t - \varphi)\} \quad (18)$$

ここで F の最大値を F_0 とすると, (18)式より

$$F_0 = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{\sqrt{k^2 + r^2\omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \frac{r^2}{r_c^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \quad (19)$$

$r_c = 2M\omega_n$, $k = M\omega_n^2$ であるから(19)式は(20)式のように変形できる。

$$\frac{F_0}{P_0} = \sqrt{\frac{1 + 4 \frac{r^2}{r_c^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \frac{r^2}{r_c^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \quad (20)$$

(20)式において, $\omega/\omega_n \gg \sqrt{2}$ のときは $F_0/P_0 \approx 0$ となる。本実験で使用したゴムひもの $2(r/r_c)(\omega/\omega_n)$ は 0.15 ~ 0.3, 固有振動数は約 5 Hz であり、振動板の振動数 20~100 Hz に比較してかなり小さい。したがって、振動による影響はほとんど無視できる。すなわちロードセルには準静的な引張力 P_1 のみが作用すると考えてよい。以上の考察より、本実験の目的からすれば、力の伝達媒体としてゴムひも (うず巻バネでもよいであろう) を使用するのが適切である。

つぎに実験結果について考察する。Figs. 4~7 は x 方向の振動のみが作用する場合の結果である。なお、以下の図で μ_x の測定値は、繊維方向に研磨したサンプルにおいて得られた値である。

Fig. 4 は 80 Hz において x 方向に引張った場合の加速度振幅 (上側) と摩擦力 (下側) の記録波形である。それぞれの波形の上側および下側に示した値は加速度

Fig. 3. Measurement system of static friction force.

Fig. 4. Relation between acceleration of vibration (upper oscillogram) and friction force (lower oscillogram). λ is the ratio of accelerations and μ_x is the apparent coefficient of static friction.

比 λ および見掛けの静摩擦係数 μ_x である。ただし $\mu_x = 0.28$ は静摩擦係数の値である。明らかに λ が大きくなると μ_x は小さくなっており、理論的には(8)式が適用できるので、 $0.28 - 0.04 = 0.24$ また $0.28 - 0.09 = 0.19$ となり（以下同様）、測定値は理論値と一致している。

Fig. 5 は加速度比 λ と x 方向に引張った場合の見掛けの静摩擦係数 μ_x の関係を振動数別に示したものである。実線は(8)式で示される理論線である。これらの図で黒印のプロットは、研磨したサンプルの処女面をただちに測定に供した場合の測定値であり、それぞれの印（●, ▲, ■）の相違は、供試したサンプルの材質およびその研磨による処女面の性状の差異に起因しているものと考えられる。ところで、○印のプロットはこれら各種のサンプルのうちの1個について同じ測定を数十回繰り返していくうちに、ほぼ一定の値に収斂した値を示す。このように測定を繰返すにより測定値が一定の値に収斂することは他のサンプルについて

Fig. 5. Relation between the ratio of accelerations λ and the apparent coefficient of static friction μ_x in the x -direction.

も同じで、かつその収斂値がほぼ同じ値（ μ_0 で 0.2 前後）になる (Figs. 5~7)。なおこれらのプロットの相違（●, ▲, ■, ○などによる）は、以下の図においても同様である。Fig. 5 において、サンプルの接触面の状態が相違すると静摩擦係数（ $\lambda=0$ のとき）は相違するが、 μ_x の λ 依存性（直線的減少）は同じ傾向をもっている。20 および 30 Hz において○印のプロットの静摩擦係数の値が小さすぎるので理論線が測定値のプロットより下側に位置しているが、概していずれの振動数においても λ が大きくなるにつれて μ_x は直線的に減少し、理論的關係と良く一致している。

Fig. 6 は加速度比 λ と y 方向に引張った場合の見掛けの静摩擦係数 μ_y の関係を示している。実線は(9)式で示される理論線である。また Fig. 7 は λ と 45° 方向に引張った場合の $\mu_{\pi/4}$ の関係を示しており、実線は(10)式で示される理論線である。これらの場合も測定値のプロットは理論的關係と良く一致する傾向を示している。

Fig. 6. Relation between the ratio of accelerations λ and the apparent coefficient of static friction μ_y in the y -direction.

Fig. 7. Relation between the ratio of accelerations λ and the apparent coefficient of static friction $\mu_{\pi/4}$ in the 45° -direction.

なお例示しなかったが、他の振動数における三方向別の見掛けの静摩擦係数も同様の傾向を示した。

以上、例示した三方向別の見掛けの静摩擦係数の挙動はそれぞれの方向別の理論的關係と良く一致し、理論的取り扱いの妥当性を裏付けているといえる。

つぎに、三次元的に振動が作用する場合を若干考察しておく。三次元的な振動を発生させるために、旋盤

の往復台に金属板を片持梁のように固定し、その板の上に振動子をのせ、旋盤を 120 rpm で回転させることにより約 30 Hz で三次元的に振動させた。そしてこの振動に振動子の振動を重ねさせた。なお、この実験は実験室内で行なった。

Fig. 8 (a)は振動子を 30 Hz で振動させ、 y 方向に引張った場合の見掛けの静摩擦係数の理論値($\mu_{y,theo.}$)と測定値($\mu_{y,meas.}$)の対応を示したものである。なお理論値は(12)式より求めた。プロットが 45° の直線になれば理論値と測定値が完全に一致したことになる。0.2 以上の値は完全に直線になっているが、これは静摩擦係数の値である。理論値と測定値は比較的良く一致しており、相関係数は 0.99 で理論値が小さくなる場合は測定値も小さくなっていることを明確に示している。ところで Fig. 8 (b)は(a)と同じ測定結果であるが、(12)式において y 、 z 方向の加速度成分を 0 と仮定した場合である。理論値と測定値はかなり相違しており、相関係数も 0.72 である。これらの結果は三軸加速度を考慮した理論式の妥当性を示しているといえる。なお 60 Hz においても同様の結果が得られた。

以上、低周波振動下における木材の静摩擦挙動について検討した結果、低周波振動下における見掛けの静

摩擦係数を求める場合に、静摩擦係数と振動加速度を考慮した本実験の理論式を適用することの妥当性を実験的に裏付けることができた。

5 結 論

二物体間に振動が作用した状態では見掛け上静摩擦係数は減少し、理論的に次のように表わされる。

一次元的に x 方向に振動が作用するとき、

(1) x 方向(振動方向)の見掛けの静摩擦係数 μ_x は

$$\mu_x = \mu_0 - \lambda,$$

(2) y 方向(振動方向に垂直)の見掛けの静摩擦係数 μ_y は

$$\mu_y = \sqrt{\mu_0^2 - \lambda^2},$$

(3) 45° 方向(振動方向に対して)の見掛けの静摩擦係数 $\mu_{\pi/4}$ は

$$\mu_{\pi/4} = \sqrt{\mu_0^2 - \frac{\lambda^2}{2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

で表わされる。

三次元的に振動が作用するとき、

(4) y 方向の見掛けの静摩擦係数 μ_y は

$$\mu_y = \frac{\sqrt{\mu_0^2 (g + \ddot{z})^2 - \ddot{x}^2 - \ddot{y}^2}}{g}$$

で表わされる。

(昭和50年4月6日 第25回日本木材学会大会にて講演)

参 考 文 献

- 1) Blekhman, I. I., and G. Y. Dzhanlidze, *Izvy Akad Nauk SSSR, OTN*, No 7, 98 (1958).
- 2) Fridman, H. D., and P. Levesque, *Journal of Applied Physics*, **30**, 1572 (1959).
- 3) Pohlman, R., and E. Lehfeltdt, *Ultrasonics*, October, 178 (1966).
- 4) 横山恭男, 精密機械, **32**, 403 (1966).
- 5) 石坂昭夫, 小滝富雄, 西村源六郎, 精密機械, **33**, 659 (1967).
- 6) Lenkiewicz, W., *Wear*, **13**, 99 (1969).
- 7) 福田基一, 奥田襄介, “騒音対策とその消音設計”, 6 章 (1973) 共立出版

Fig. 8. Correspondence between theoretical value of the apparent coefficient of static friction $\mu_{y,theo.}$ and measured one $\mu_{y,meas.}$ in the y -direction under three-dimensional vibration. The values of $\mu_{y,theo.}$ in (a) were calculated from Formula (12), the ones in (b) from the same formula under the assumption $\ddot{y}=0$ and $\ddot{z}=0$.