要素分布モデルによる繰返しせん断応力-せん断ひずみの解析*

井上 久爾男** 中 川 憲 治**

Analysis of Cyclic Shear Stress-Shear Strain Behavior of Material Using Distributed Element Model

by

Kunio INOUE and Kenji NAKAGAWA

(Faculty of Engineering, Osaka University, Suita)

The distributed element model, which had been proposed previously by the authors, was applied to the analysis of cyclic shear stress-shear strain behavior which changes with the number of cycles. In order to examine the applicability of the model, cyclic torsion tests were carried out under a constant shear strain amplitude. From the comparison of experiments with the theory, it appears that the model is suitable for describing the cyclic shear stress-shear strain behavior, and that the deformation behavior of materials under cyclic loading may be predicted reasonably well by the model. It is also shown that the cyclic hardening of materials can be explained based on the increase in the rate of hardening, H_t , and the distribution shift toward high yield strain with the number of cycles.

(Received June 13, 1975)

1 緒 言

材料が大きな塑性変形を伴った繰返し変形をうけ、破断までの繰返し回数が 10^4 回程度以下であるような、短寿命領域における疲労を、低サイクル疲労と呼ぶ。低サイクル疲労においては、弾塑性変形に伴って、材料はしだいに加工硬化あるいは加工軟化する¹⁾²⁾。その結果、材料の応力-ひずみ関係は繰返し数とともに変化する³⁾⁴⁾。変形挙動を解析し、疲労破壊の限界値を明確にするためには、まず繰返し数とともに変化する一般化された応力-ひずみ関係を明らかにする必要がある。著者らは以前、繰返し荷重下での応力-ひずみ関係を統一的に表示できる要素分布モデルを提案した。また、その有効性は繰返し曲げ試験において確かめられた。そこで本報では、もう一種類の試験である繰返しねじり試験の場合に要素分布モデルを適用し、その有効性を確かめるとともに、繰返し過程中的変形挙動を調べる。

2 要素分布モデルによるねじりモーメント-せん断ひずみ関係の表示式

単調引張試験で得られる応力-ひずみ曲線を、要素分布モデルを用いて表示する方法については、前報で

述べた。同様にして、せん断の場合にも要素分布モデルを適用すると、せん断応力-せん断ひずみ関係は、次式のように表示できる。(Fig. 1)

$$\tau = G\gamma \left(1 - \int_0^{\gamma} g(r_i) dr_i \right) + \int_0^{\gamma} G r_i + H_t(r - r_i) \{ g(r_i) dr_i \\ = \frac{G - H_t}{\lambda_i} \left\{ 2 - (2 + \lambda_i \gamma) e^{-\lambda_i \gamma} + \frac{H_t}{G - H_t} \lambda_i \gamma \right\} \quad (1)$$

ここで、 τ 、 γ 、 G 、 H_t は、それぞれせん断応力、せん断ひずみ、剛性率および加工硬化係数を表わす。また $g(r_i)$ は、材料を構成している要素の降伏せん断ひずみの分布密度関数であり、ここでは次式で表わされた Γ 関数を採用する。(付録1 参照)

$$g(r_i) = \lambda_i^2 r_i e^{-\lambda_i r_i} \quad (2)$$

Fig. 1. (a) Stress-strain curve of a material
(b) Stress-strain relation of elastic-plastic elements.
(c) Frequency distribution of yield strain, γ_i .

* 原稿受理 昭和50年6月13日

** 正会員 大阪大学工学部 吹田市山田上

Fig. 2. Shear strain- and shear stress-distributions in a twisted cylindrical solid specimen; (a) Shear strain-distribution, (b) Shear stress-distribution.

ここに、 r_i は降伏せん断ひずみを表わす。つぎに、(1)式で表示できる、せん断応力-せん断ひずみ関係をもつ材料の、ねじりモーメント-せん断ひずみ関係の表示式を求める。

半径 \$R\$ の中実丸棒試験片に、ねじりモーメントのみ負荷したとき、断面は、軸のまわりに回転するだけであると仮定すると、ねじりモーメント \$T\$ は次式で表わせる。

$$T = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr \quad (3)$$

ここで、 τ は、軸心から \$r\$ の距離にある点における、せん断応力である。

せん断ひずみは、Fig. 2 (a) に示したように、半径方向に直線的に変化しているものと仮定すると、軸心から \$r\$ の距離にある点のせん断ひずみ \$\gamma\$ は、

$$\gamma = \frac{r}{R} \gamma_m \quad (4)$$

で表わせる。ここに、 γ_m は試験片最外皮のせん断ひずみである。

(4)式を(3)式に代入して

$$T_m = \frac{2\pi R^2}{\gamma_m^3} \int_0^{\gamma_m} \tau \gamma^2 d\gamma \quad (5)$$

なる関係を得る。さらに、(5)式の \$\tau\$ に(1)式を代入すると、\$T\$ と \$\gamma_m\$ との間には、

$$T = \frac{2\pi R^3 (G - H_t)}{\lambda_t^4 \gamma_m^3} \left[\frac{2}{3} (\lambda_t \gamma_m)^3 + \{ (\lambda_t \gamma_m)^3 + 5 (\lambda_t \gamma_m)^2 + 10 (\lambda_t \gamma_m) + 10 \} e^{-\lambda_t \gamma_m} - 10 \right] + \frac{\pi R^3}{2} H_t \gamma_m \quad (6)$$

なる関係が存在することがわかる。(6)式が要素分布モデルによるねじりモーメント-せん断ひずみ関係式である。なお、\$H_t\$ および \$\lambda_t\$ の値は、実験で得たねじりモーメント-せん断ひずみ曲線から、次のようにして定めることができる。

(6)式は、\$\gamma_m\$ の充分大きい範囲では、

$$T = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{G - H_t}{\lambda_t} + \frac{\pi R^3}{2} H_t \gamma_m \quad (7)$$

なる関係で近似できる。Fig. 3 において、曲線 OA は、ねじりモーメント-せん断ひずみ曲線である。この曲線が(6)式で表わせるならば、せん断ひずみの充分大きい点で引いた接線 AB は、(7)式で近似できる。いま、

Fig. 3. Determination of the values for \$H_t\$ and \$\lambda_t\$ from torque-shear strain curve.

この接線の傾きを \$k\$、\$T\$ 軸との交点 \$B\$ のねじりモーメントの値を \$T_B\$ とおくと、(7)式を考慮して、

$$\left. \begin{aligned} H_t &= \frac{2k}{\pi R^3} \\ \lambda_t &= \frac{4\pi R^3}{3} \frac{G - H_t}{T_B} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

なる関係を得る。すなわち、ねじりモーメント-せん断ひずみ曲線上で、ひずみの充分大きい点で接線を引き、\$k\$ および \$T_B\$ の値を求めれば、(8)式から \$H_t\$ および \$\lambda_t\$ の値を定めることができる。このようにして得た \$H_t\$ と \$\lambda_t\$ の値を(6)式に代入して、\$T\$ と \$\gamma_m\$ の関係を計算できる。以上は単調負荷の場合について述べたが、つぎに繰返し負荷の場合の取り扱い方について述べておく。

3 繰返しせん断応力-せん断ひずみ関係

定ひずみ振幅で繰返しねじり試験を行なうと、材料の繰返し加工硬化に伴って、Fig. 4 (a) に示したような、せん断応力-せん断ひずみ履歴曲線が得られる。そこで、この連続的に変化している履歴曲線を、次のように書き換える。すなわち、Fig. 4 (b) に示すように、各

Fig. 4. Analysis of cyclic shear stress-shear strain curves.

繰返し数ごとに閉じたヒステリシスループを描き、繰返し数の増加とともに、せん断応力-せん断ひずみ関係は、段階的に変化していくものと仮定する。このような仮定のもとに、種々のひずみ振幅で繰返し試験を行なって得た同一の繰返し数におけるヒステリシスループを同一の図に描くと、(c)図のようなループ群を得る。これらのループの各頂点を結ぶと一つの曲線が得られる。この曲線を、単調負荷の場合に得られる Fig. 1 (a) の曲線と区別するため、繰返しせん断応力-せん断ひずみ曲線とよび、(d)図のように、各繰返し数に対して存在する。以上のようにして得られた(d)図のような曲線は、Fig. 1 (a) の曲線と同様に取り扱うことができ、要素分布モデルでは、(1)式で表示することができる。また、同様にして繰返しねじりモーメント-せん断ひずみ曲線も(6)式で表示できる。なお、繰返しせん断応力-せん断ひずみ曲線 OAC とヒステリシスループ APBQ の関係については(付録 2)に示す。

以上のような繰返し負荷における考え方のもとに、一定ひずみ振幅で繰返しねじり試験を行ない、得られた繰返しねじりモーメント-せん断ひずみ曲線を、(6)式で表示できるかを調べ、要素分布モデルの有効性を検討する。

4 実験

実験に用いた材料は、市販の純銅 (JIS CuB1 相当) および 6:4 黄銅 (JIS B₅BM₂ 相当) の丸棒である。Fig. 5 に示す試験片形状に機械加工した後、アルゴン気流中で 650℃、45分焼なましを行なう。使用した試験機は、シェンク形の繰返しねじり試験機で、繰返し数は 10~30 rpm である。概観図を Fig. 6 に示す。試験は定ひずみ振幅で行なった。ねじりモーメントおよ

Fig. 5. Dimensions of test specimen.

Fig. 6. General view of the testing apparatus.

びせん断ひずみは、それぞれねじり応力棒、試験片の中央に接着したひずみゲージにより測定した。

5 実験結果

定ひずみ振幅繰返しねじり試験を行なって得た、繰返し数に対するねじりモーメント振幅の変化を Fig. 7 に示す。銅、黄銅のいずれにおいても、試験開始後、ねじりモーメント振幅は急激に増加し、その後繰返しによる加工硬化が飽和し、ほぼ一定となる。加工硬化の程度は、ひずみ振幅が大きいくほど大であり、しかも、少ない繰返し数で飽和している。ねじりモーメントがほぼ一定となる定常状態が続いた後、き裂がひろがりはじめ、モーメント振幅が急激に減少する。やがて最終の破断にいたる。ひずみ振幅の大きいほどねじりモーメント振幅の減少は激しい、すなわち、き裂伝ば速度が大きい。

つぎに、Fig. 7 の実験結果を、各繰返し数に対して、ねじりモーメント振幅とせん断ひずみ振幅の関係に書き換え、得られた関係を(7)式で表示できるかどうかを調べる。

Fig. 7. Variations of torque amplitude during cyclic torsion tests for various levels of imposed shear strain amplitude.

6 要素分布モデルの検討

Fig. 8 は、繰返しねじりモーメント-せん断ひずみ曲線である。各種の丸印は、Fig. 7 からプロットした実験値である。これらの実験値を結んで得る曲線のもとに、(8)式から求めた、 H_t および λ_t の値を Fig. 9 に示す。Fig. 8 の実線は、Fig. 9 に示した H_t および λ_t の値を用い、(6)式から計算した値である。

Fig. 8 において、せん断ひずみのごく小さい範囲では実験値と(6)式から得た計算値に若干の差がみられるが、全般的に両者はよく一致していることがわかる。すなわち、繰返しねじりモーメント-せん断ひずみ関係を(6)式で表示できることが明らかになった。

加工硬化係数 H_t は、Fig. 9 から明らかなように、

Fig. 8. Cyclic torque-shear strain curves; (a) Copper, (b) Brass

Fig. 10. Transition of frequency distributions of yield strain.

Fig. 9. Changes in the values of H_t and λ_t with number of cycles.

繰返しの初期段階で増加し、10回程度の繰返しの後には、ほぼ一定となる。 H_t の繰返し数に対する変化の仕方は、銅と黄銅でよく似ており、その絶対値のみ異なる。

一方、 λ_t の値は、繰返し数の増加とともに減少する。この λ_t の減少は、要素の降伏ひずみの分布が高ひずみ側への推移を意味している。すなわち、繰返しねじりに伴って要素が硬化し、降伏ひずみの大きい要素の割合が増し、材料全体が加工硬化したことになる。これは、Fig. 7におけるねじりモーメント振幅の増加として現われる。Fig. 10に繰返し数に伴った降伏ひずみ分布の推移を示す。この図からも明かなように、要素分布モデルでは、繰返し加工硬化特性を、降伏ひ

Fig. 11. Cyclic stress-strain curves calculated by Eq. (1).

ずみの分布の高ひずみ側への推移でもって説明することができる。

以上のことから、繰返しねじりに伴って変化するねじりモーメント-せん断ひずみ関係を(6)式で表示できることが明らかになり、要素分布モデルの有効性が確かめられた。なお、(1)式を用いて計算した、繰返しせん断応力-せん断ひずみ曲線を Fig. 11に示す。

7 結 論

要素分布モデルをねじりに適用し、ねじりモーメント-せん断ひずみ関係式を導いた。この妥当性を確認するため、定ひずみ振幅繰返しねじり試験を行ない、

次の結論を得た。

(1) 実験値と計算値の比較から、繰返しねじりモーメント-せん断ひずみ曲線を(6)式で表示することが明らかになった。これより、ねじりにおける変形挙動の解析に、要素分布モデルの有効性が確認できた。

(2) 要素分布モデルでは、材料の繰返し加工硬化特性を、降伏ひずみの分布の推移で説明できる。

(3) パラメータ H_i は、繰返し数の増加につれて増加し、 λ_i は減少する。

参考文献

- 1) Wadsworth, N. J., Acta Met., **11**, 663 (1963).
- 2) Feltner, C. E., and C. Laird, Acta Met., **15**, 1621 (1967).
- 3) Landgraf, R. W., JoDean Morrow, and T. Endo, J. Mater. Sci., **4**, 176 (1969).
- 4) 中川隆夫, 材料, **21**, 739 (1972).
- 5) 井上久爾男, 中川憲治, 材料, **22**, 969 (1973).

〔付 録 1〕

要素分布モデルによるせん断応力-せん断ひずみ関係式、本文の(1)式の第1式の両辺を γ で2回微分を行なうと、次式を得る。

$$\frac{d^2\tau}{d\gamma^2} = -(G - H_i)g(r)$$

これより、 $g(r)$ は

$$g(r) = -\frac{1}{G - H_i} \frac{d^2\tau}{d\gamma^2} \quad (\text{A-1})$$

で表わせることがわかる。すなわち、材料のせん断応力-せん断ひずみ曲線がわかっているときには、降伏ひずみの分布密度関数 $g(r)$ は (A-1) 式から求まる。銅のような材料のせん断応力-せん断ひずみ曲線は、Fig. 1 (a)に示したような、明りょうな降伏点のない、なめらかな曲線である。この曲線を(1)式で表示できるとすると、 $d^2\tau/d\gamma^2$ と γ の関係は、Fig. A-1 のような曲線となる。この曲線は、 F 分布関数に類似している。そこで本論文では、(A-1) 式および Fig. A-1 から、 $g(r_i)$ として(2)式を採用した。

Fig. A-1. Relation between γ and $-\frac{d^2\tau}{d\gamma^2}$.

〔付 録 2〕

試験片を構成している要素は、すべて移動硬化材であると仮定する。いま、ひずみ振幅 r_a で繰返し試験

を行ない、試験片のせん断応力-せん断ひずみ応答が、Fig. A-2 (a)に示すようなヒステリシスループを描いているとき、各要素の応力-ひずみヒステリシスループは Fig. A-2 (b) のようになる。なお、曲線 BOAC は、繰返しせん断応力-せん断ひずみ曲線であり、(1)式で表示できる。ここで、負荷曲線 BA 上の任意の点 Q におけるせん断応力 τ とせん断ひずみ γ の関係式を求める。

Fig. A-2. Stress-strain hysteresis loops of kinematic hardening elements.

Fig. A-2 (b)に示した各要素の応力とひずみの関係は、降伏ひずみの大きさによって、Fig. A-3 のように3組に分類できる。㊶図は、せん断ひずみ範囲 $(-r_a \sim r_a)$ の間では降伏しない要素の応力-ひずみ関係を、㊵図は、 $(-r_a \sim r)$ の間では降伏せず、 $(r \sim r_a)$ の間で降伏する要素のそれを、また㊴図は、 $(-r_a \sim r)$ の間で降伏する要素のそれを示す。それぞれの応力-ひずみ関係は、降伏ひずみ r_i の大きさによって、

Fig. A-3. Three types of stress-strain relation of elements.

次のように表わせる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } r_a < r_i \text{ のとき, } \tau = G\gamma \\ \text{(ii) } \dot{r} < 2r_i - \dot{r}_a < r_a \text{ のとき,} \\ \quad \tau = (G - H_t)r_a + G\gamma - (G - H_t)r_i \\ \text{(iii) } -r_a < 2r_i - r_a < r \text{ のとき,} \\ \quad \tau = (G - H_t)r_i + H_t\gamma \end{array} \right\} \quad (\text{A-2})$$

(A-2) 式を考慮して、試験片の応力 τ とひずみ γ の関係は、降伏ひずみの分布密度関数 $g(r_i)$ を用いて次式で表わせる。

$$\begin{aligned} \tau &= (G - H_t) \int_0^{(\tau + r_a)/2} r_i g(r_i) dr_i + H_t \gamma \int_0^{(\tau + r_a)/2} g(r_i) dr_i \\ &\quad + (G - H_t) \int_{(\tau + r_a)/2}^{r_a} g(r_i) dr_i + G\gamma \int_{(\tau + r_a)/2}^{r_a} g(r_i) dr_i \\ &\quad - (G - H_t) \int_{r_a}^{\tau} r_i g(r_i) dr_i + G\gamma \int_{r_a}^{\infty} g(r_i) dr_i \end{aligned}$$

上式に(2)式を代入すると、

$$\tau = \frac{G - H_t}{\lambda_t} \left[2 - (\lambda_t \gamma + \lambda_t r_a + 4) e^{-\{(\tau + r_a)/2\} \lambda_t} + (2 + \lambda_t \gamma) e^{-\lambda_t r_a} + \frac{H_t}{G - H_t} \lambda_t \gamma \right] \quad (\text{A-3})$$

なる関係を得る。(A-3) 式が要素分布モデルによるヒステリシスループの表示式である。

ここで、点Bを座標原点とする新しい座標系 $(\bar{\tau} - \bar{\gamma})$ を考える。曲線 BOAC は、繰返しせん断応力-せん断ひずみ曲線であり、(1)式で表示できることから、 γ と $\bar{\gamma}$ 、および τ と $\bar{\tau}$ の間には次の関係が存在する。

$$\left. \begin{array}{l} r = \bar{r} - r_a \\ \tau = \bar{\tau} - \frac{G - H_t}{\lambda_t} \left[2 - (2 + \lambda_t r_a) e^{-\lambda_t r_a} + \frac{H_t}{G - H_t} \lambda_t r_a \right] \end{array} \right\} \quad (\text{A-4})$$

(A-4) 式を (A-3) 式に代入し、整理すると、ヒステリシスループは、 $(\bar{\tau} - \bar{\gamma})$ 系では、

$$\bar{\tau} = \frac{G - H_t}{\lambda_t} \left[4 - (4 + \lambda_t \bar{\gamma}) e^{-\lambda_t (\bar{\gamma}/2)} + \frac{H_t}{G - H_t} \lambda_t \bar{\gamma} \right] \quad (\text{A-5})$$

なる関係で表わすことができる。(A-5) 式はさらに、次のように書き換えできる。

$$\frac{\bar{\tau}}{2} = \frac{G - H_t}{\lambda_t} \left[2 - \left(2 + \lambda_t \frac{\bar{\gamma}}{2} \right) e^{-\lambda_t (\bar{\gamma}/2)} + \frac{H_t}{G - H_t} \lambda_t \frac{\bar{\gamma}}{2} \right] \quad (\text{A-6})$$

以上のようにして得た (A-6) 式は、曲線 BQA を表わし、一方、曲線 OA は(1)式で表示できる。(1)式と (A-6) 式を比較して次のことがいえる。すなわち、曲線 OA を2倍に拡大し、点Oを点Bに一致させることにより、曲線 BQA が得られる。ゆえに、繰返しせん断応力-せん断ひずみ曲線を要素分布モデルを用いて解析し、定式化しておけば、要素の変形特性を仮定することによって、ヒステリシスループの形状が求まり、また繰返し荷重下における材料の変形挙動を解析することができる。