低炭素鋼の上降伏点の応力分布依存性 に関する統計的取り扱い*

坂 田 勝** 青 木 繁** 川 島 克 之***

A Statistical Approach to Upper Yield of Low Carbon Steel under Non-uniform Stress Distribution

by

Masaru SAKATA, Shigeru AOKI and Katsuyuki KAWASHIMA

(Tokyo Institute of Technology, Tokyo)

An experiment has been made to investigate the effect of stress distribution on the upper yield of low carbon steel. Tension, torsion and bending tests were carried out on solid cylinders of low carbon steel and tension test on notched plates. It has been found that the upper yield point increases as the stress concentration increases.

A statistical approach is tried to combine the Cottrell's model of dislocation pinning with the weakest link concept. (Received July 5, 1975)

1 緒 言

低炭素鋼の降伏については、設計や加工などに対する実用的な重要性からばかりでなく、特異な現象そのものに対する興味から、従来より多くの研究がなされて^{1)~7)14)~18)*1}いる。その結果、低炭素鋼の上降伏点は化学成分、結晶粒度、顕微鏡組織、ひずみ速度、試験温度、試験機の剛性、試験片の寸法、応力分布、表面あらさなど種々の因子の影響を受けることが明らかにされてきている。また、上降伏点は下降伏点や極限強度などに比べてばらつきが大きいことが100本の引張試験を用いた横堀¹⁴⁾の実験および約80本の引張試験片と約230本の圧縮試験片を用いた佐藤らの実験^{*1}により明らかにされている。

ばらつきの比較的小さい下降伏点（または上降伏点が現われない場合の降伏応力）の応力分布依存性¹³⁾¹⁷⁾¹⁸⁾については種々の研究が行なわれているのに対して、ばらつきの大きい上降伏点の応力分布依存性については、上降伏点は引張りよりも曲げの方が高い値を示すことおよび曲げにおいては試験片¹⁷⁾の断面形状の影響を受けることなどが知られているが、ばらつきを考慮した充¹⁷⁾分な研究はいまだ行なわれていないようである。多く

の試験片を用いた実験と統計的な取り扱いが必要と考えられる。

そこで、本論文では合計約180本の試験片を用いて、低炭素鋼丸棒の引張り・ねじり・4点曲げ試験および円弧形切欠きによる応力集中をもつ低炭素鋼平板の引張試験を行ない、種々の応力こう配の下における上降伏点の分布を求めた。また、Cottrell^{8)~12)}の転位のくぎづけモデルを考慮し、最小値確率論に基づくWeibull分布を用いて考察を行ない、上降伏点の応力分布依存性に関する上述の実験の結果に対して統計的説明を試みた。

なお、横堀¹⁸⁾は上降伏点に与えるひずみ速度や温度などの影響を確率過程論に基づいて説明し、さらに時間を応力に変換してWeibull分布と同じ形の式を導き、最小値確率論で説明できる問題は確率過程論によりすべて説明可能であることを主張しているが、上降伏点の応力分布依存性について実験結果との具体的な比較は行なっていないようである。本論文では、上降伏点の応力分布依存性を説明するために、確率過程論まで立ち入ることなく最小値確率論のみに基づいて考察し、実験結果との比較を行なった。

2 丸棒の引張り・ねじりおよび4点曲げ試験

2・1 実験方法

試験片は同一ロットの15mm ϕ ×4mの低炭素鋼丸棒（化学成分をTable Iに示す）から、NC旋盤を

* 原稿受理 昭和50年7月5日

** 正会員 東京工業大学 東京都目黒区大岡山

*** 東京工業大学 東京都目黒区大岡山

*1 未発表, 佐藤和郎, 村田正也。

Table I. Chemical composition of low carbon steel (cylinder) in wt. %.

C	Si	Mn	Ni	Cr	Cu	Mo	P	S
0.18	0.01	0.41	0.01	0.01	0.01	0.01	0.014	0.023

Fig. 1. Cylinders for tension, torsion and bending tests.

用いて削り出し表面を800番サンドペーパーで研磨して、Fig. 1の形状・寸法に仕上げた。肩部から降伏が生じないように、試験片にはゆるやかな曲率（曲率半径400 mm）をもたせている。加工後、900℃1時間の真空焼なましを行なった。焼なまし後の結晶粒の大きさは平均約40 μであった。

これらの試験片を用いて、引張り・ねじりおよび4点曲げ試験を室温でそれぞれ約30本ずつ行ない、試験機の置き針を利用して上降伏点を測定した。ひずみ速度の影響を一定にするために、いずれの試験においても最大せん断ひずみ速度がほぼ一定（ $0.6 \sim 0.7 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ ）になるようにした。引張りおよび4点曲げ試験に使用した試験機とねじり試験に使用した試験機は同一ではないので、厳密には測定値は試験機の剛性の影響を受けると考えられるが、両試験機とも高い剛性をもっているからその影響は小さいものとして無視した。

2・2 実験結果

試験後フライの試薬を用いて腐蝕させた試験片の写真をFig. 2に示す。いずれの試験においても、この写真のように降伏は試験片のほぼ中央部で生じており、

Fig. 2. Lüder's bands. (a) Tension (b) Torsion (c) Bending

肩部の応力集中の影響はないものと推定された。

試験片につけたゆるやかな曲率による応力集中は0.4%以下であり、また標点間（20 mm）における断面積の相違は高々5.6%にすぎないので、標点間の応力は一様（ねじり・4点曲げの場合には軸方向に一様）と近似して、次式で与えられる最大せん断応力 τ_m で実験値を整理した。

$$\left. \begin{aligned} \text{引張り} \quad \tau_m &= \frac{2W}{\pi d^2} \\ \text{ねじり} \quad \tau_m &= \frac{16T}{\pi d^3} \\ \text{4点曲げ} \quad \tau_m &= \frac{16M}{\pi d^3} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 W 、 T および M はそれぞれ上降伏点における引張荷重、ねじりモーメントおよび曲げモーメントであり、 d は試験片中央部の直径である。

Table IIに示すように直径 d には若干のばらつきがあるので、各試験片の d の実測値を(1)式に代入して τ_m を求めた。

Table II. Mean and standard deviation of the diameter of test cylinders.

	Mean diameter	Standard deviation
Tension	9.015	0.042
Torsion	9.060	0.027
Bending	9.055	0.033

Fig. 3. Probability distribution function for upper yield points of cylinders vs. maximum shear stress.

Fig. 3に各試験の実験結果をそれぞれ○, ●, ◇印で示す。横軸には τ_m をとり、たて軸には最大せん断応力が τ_m 以下で降伏が起こる確率すなわち上降伏点の確率分布関数 $F(\tau_m)$ をとっている。ただし、実測値から $F(\tau_m)$ を求める際には、Gumbel⁹⁾に従って、次の式を用いた。

$$F(\tau_m) = \frac{j}{N+1} \quad (2)$$

ここで、左辺は実験値の総数 N 個の内 j 番目に小さい

上降伏点に対する確率分布関数である。

Fig. 3 から、引張り・ねじり・4点曲げの順に上降伏点が高くなっていることがわかる。

3 切欠き平板の引張試験

3・1 実験方法

供試材料の化学組成を Table III に、試験片の形状・寸法を Fig. 4 に示す。Fig. 4 (a)の試験片にはチャック部から降伏が生じないようにゆるやかな曲率（曲率半径 400 mm）をもたせている。このための応力集中は約 1% であり、また標点間（40 mm）における断面積の相違は高々 5% にすぎないので、以下の取り扱いでは標点間の応力は一樣とみなし、この試験片を平滑材と呼ぶことにする。Fig. 4 (b)と(c)の試験片はそれぞれ応力集中係数 α が 1.23 および 1.52 の円弧形切欠きをもっている。なお、いずれの試験片も最小断面の幅は同一で 20 mm である。

Table III. Chemical composition of low carbon steel (plate) in wt. %.

C	Si	Mn	P	S	Ni	Cr	Cu	Mo
0.03	0.01	0.29	0.008	0.015	0.01	0.03	0.01	0.01

Fig. 4. Notched plates for tension tests.
 α : Stress concentration factor.

これらの試験片は 2m × 1m × 1 mm の平板から圧延方向が荷重方向と直角になるように切り出し、フライス盤で Fig. 4 の寸法に仕上げたものである。同種類の試験片は同時に加工したので、寸法のばらつきは小さい。加工後、丸棒の場合と同様に 900℃ 1 時間の真空焼なましを行なった。焼なまし後の結晶粒の大きさは平均約 60 μ であった。

丸棒の引張試験と同様に、試験機の置き針によって上降伏点を測定した。三種類の平板の全試験を通じて最大せん断ひずみ速度が一定 ($0.3 \sim 0.6 \times 10^{-4} \text{sec}^{-1}$) になるようにした。

3・2 実験結果

Fig. 5 に試験後の試験片の写真を示す。平滑材はほぼ中央で降伏しており、チャック部の応力集中の影響はないことが推定できる。

実験値は次式で与えられる最大せん断応力で整理した。

$$\tau_m = \frac{W}{2S} \cdot \alpha$$

ここで、 α は応力集中係数、 W は上降伏時の引張荷重、 S は試験片の最小断面の面積である。

Fig. 5. Lüder's bands. (a) $\alpha = 1.01 \pm 1.0$ (b) $\alpha = 1.23$ (c) $\alpha = 1.52$

Fig. 6. Probability distribution function for upper yield points of plates vs. maximum shear stress.

Fig. 6 に各試験片の実験結果をそれぞれ○, ●, ◇印で示す。この図から α が大きいほど（応力分布が急なほど）上降伏点は高い値をとることがわかる。

なお、切欠き平板については上述の試験片の他に、(f)板幅 $D = 40$ mm, 最小板幅 $D' = 20$ mm, 切欠き底の半径 $r = 0.5$ mm (U字形切欠き), $\alpha = 5.2$, (g) $D = 24$ mm, $D' = 20$ mm, $r = 0.5$ mm (U字形切欠き), $\alpha = 4.0$, (h) $D = 45$ mm, $D' = 30$ mm, $r = 15$ mm (円弧形切欠き), $\alpha = 1.52$ の試験片についても実験を行なったが、切欠きの先端近くで局所的な降伏を生じ、

上降伏点は生じなかった（ただし、(v)の場合には上降伏点が生ずるものも若干存在した）。

4 考 察

4・1 確率論的モデル

低炭素鋼に上降伏点が生ずるモデルの典型的なものとして、転位のくぎづけからの解放が考えられる。⁵⁾ いま簡単のため、1個の転位がくぎづけから解放されると、連鎖的に他の多くの転位も解放され、これらの転位が最初に解放されたときの応力よりも低い応力で動きつづけ、その結果のびを固定された（または剛性の高い試験機にとり付けられた）試験片の荷重が低下し、上降伏点が現われると仮定する。くぎづけ力の強さは各転位ごとに異なっていると考えられるので、決定論的取り扱いが困難なため確率論的に取り扱うことを考える。

上の仮定に従えば、上降伏点は試験片中の最も解放されやすい状態にある転位（くぎづけ力の強さとその位置のせん断応力の大きさによるものと考えられる）によって定まることになる。これは、無数の欠陥を含むぜい性材料の強度が最も危険な状態にある欠陥（欠陥の強さとその位置の引張応力の大きさによる）によって定まるとの類似している。そこで、引張応力をせん断応力に置き換えて、ぜい性材料の強度に関する最弱リンクモデル（Weibull の取り扱い^{8)~12)}を上降伏点に適用すると、上降伏点の確率分布関数 $F(\tau_m)$ は次式で与えられる。

$$F(\tau_m) = \begin{cases} 1 - \exp \left\{ - \int_0^{\tau_m} \left(\frac{\tau - \tau_u}{\tau_0} \right)^m dV \right\} : \tau_m \geq \tau_u \\ 0 : \tau_m < \tau_u \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $\tau = \tau(\tau_m)$ は試験片各部のせん断応力、 τ_m は試験片の最大せん断応力、 dV は体積要素である。 $\tau < \tau_u$ のところでは、(3)式の被積分関数を 0 とおく。また、Weibull のパラメータ m 、 τ_u 、 τ_0 は次の性質をもつ材料定数であり、引張試験の結果から定められる。

m : ばらつきの尺度

τ_u : それ以下では降伏が起こる確率が 0 であるせん断応力

τ_0 : スケールを調整するための定数

4・2 パラメータの決定

丸棒の引張りや平板の平滑材のように応力こう配が無視できる場合には、 $\tau = \tau_m =$ 試験片内で const. であるから、(3)式は

$$F(\tau_m) = \begin{cases} 1 - \exp \left\{ - V \cdot \left(\frac{\tau_m - \tau_u}{\tau_0} \right)^m \right\} : \tau_m \geq \tau_u \\ 0 : \tau_m < \tau_u \end{cases} \quad (4)$$

となる。ここで、 V は試験片の体積であり $V = L \cdot S$

（ L : 標点間距離、 S : 断面積）と表わされる。(4)式は $\tau_m \geq \tau_u$ に対して、次式のように変形できる。

$$Y = mX - m \log \tau_0 + \log V \quad (5)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} X &= \log \ln \frac{1}{1 - F(\tau_m)} \\ Y &= \log(\tau_m - \tau_u) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6)式において、 τ_u を適当に選び、 τ_m と $F(\tau_m)$ に丸棒の引張りまたは平板平滑材の実験値を代入して X 、 Y を求め、 X - Y 座標上にプロットすれば、各点は直線状に並ぶ。(5)式により、この直線の傾きから m が決定され、 Y 軸の交点から τ_0 が定められる。これは Weibull のパラメータを定める普通の手法である。各パラメータの値は次のように求められた。^{*2)}

$$m = 12.4, \tau_u = 9.0, \tau_0 = 8.5 : \text{丸棒} \quad (7)$$

$$m = 6.3, \tau_u = 5.8, \tau_0 = 13.4 : \text{平板} \quad (8)$$

4・3 丸棒の上降伏点

4・1 節の考え方に従い、前節のパラメータを用いて、丸棒の引張り・ねじりおよび 4 点曲げにおける上降伏点の相違について考察する。

(i) 丸棒の引張りに対する上降伏点の確率分布関数 $F(\tau_m)$ は前述のように(4)式で与えられる。

(ii) ねじりに対しては、Fig. 7 (a)を参照し、 $r_m = d/2$ 、 $\tau = \tau_m \cdot (r/r_m)$ 、 $r_u = r_m \cdot (\tau_u/\tau_m)$ 、 $dV = 2\pi L r dr$ などを(3)式に代入すると $F(\tau_m)$ は

$$F(\tau_m) = \begin{cases} 1 - \exp \left\{ - \int_{r_u}^{r_m} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^m \left(\frac{\tau_u}{\tau_0} \frac{r}{r_m} - 1 \right)^m 2\pi L r dr \right\} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} : \tau_m \geq \tau_u \\ : \tau_m < \tau_u \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \exp \left\{ - \frac{2\pi L r_m^2}{(m+1)(m+2)} \left(\frac{\tau_u}{\tau_0} \right)^m \left(m+1 - \frac{m}{x} - \frac{1}{x^2} \right) (x-1)^m \right\} : \tau_m \geq \tau_u \\ 0 : \tau_m < \tau_u \end{cases} \quad (9)$$

となる。ここで $x = \tau_m/\tau_u$ とおいた。

(iii) 4 点曲げに対しては、Fig. 7 (b)を参照し、 $y_m = d/2$ 、 $\tau = \tau_m \cdot (y/y_m)$ 、 $y_u = y_m \cdot (\tau_u/\tau_m)$ 、 $dV = 4L \times \sqrt{y_m^2 - y^2} \cdot dy$ などを(3)式に代入すると $F(\tau_m)$ は

*2) もし、応力こう配が全然存在しない理想的な試験片かてきは、標点間距離 L は明確に定まる。しかし、現実には肩部またはチャック部の応力集中が必ず存在するので、その影響を避けるために、試験片の形状をたとは Fig. 1 または 4 (a) のようにせざるを得ない。これらの試験片においては L を明確に定めかたい。本論文では便宜的に応力の不均一が約 6 割以内に入るように $L = 20$ mm (丸棒) または 40 mm (平板) とした。仮に、 $L = 10$ mm (丸棒) または 20 mm (平板) とすると、 m 、 τ_u の値は不変で τ_0 が $\tau_0 = 8.1$ (丸棒)、12.0 (平板) となる。しかし、 L をあまり小さくとりすぎると、標点間以内のみでなく標点間以外のところで降伏した試験片を含むデータからパラメータを定めることになるおそれがある。

Fig. 7 Stress distribution in a cylinder.

$$F(\tau_m) = \begin{cases} 1 - \exp \left\{ - \int_{y_u}^{y_m} \left(\frac{\tau_u}{\tau_0} \right)^m \left(\frac{\tau_m}{\tau_u} \frac{y}{y_m} - 1 \right)^m \right. \\ \quad \times 4L \sqrt{y_m^2 - y^2} dy \Big\} : \tau_m \geq \tau_u \\ \quad \quad \quad : \tau_m < \tau_u \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \exp \left\{ - 4Ly_m^2 \left(\frac{\tau_u}{\tau_0} \right)^m \int_{1/x}^1 (xt-1)^m \right. \\ \quad \times \sqrt{1-t^2} dt \Big\} : \tau_m \geq \tau_u \\ \quad \quad \quad : \tau_m < \tau_u \end{cases} \quad (10)$$

となる。ここで、 $x = \tau_m / \tau_u$ 、 $t = y / y_m$ とおいた。

(7)式のパラメータを用いてこれらの式を計算した結果を Fig. 3 に実線で示した。計算結果は、上降伏点が引張り・ねじり・4点曲げの順に上昇するという実験結果の傾向をよく説明している。

ねじりと4点曲げの計算結果を比較すると、応力こう配は両方とも直線的であるにもかかわらず、4点曲げの上降伏点の方が高い値を示している。これは丸棒では4点曲げの方が応力の高い領域が狭いので、同じ τ_m 下では降伏が生ずる確率が小さくなるのが計算結果に現われたためと考えられる。

実験結果との一致は、4点曲げはねじりよりもよくない。この理由の一つとして、応力の高い領域が狭い場合には 4・1 節の1個の転位が解放されるとき上降伏点が生ずるとした仮定が成り立ちにくいことが考えられる。

4・4 切欠き平板の上降伏点

前節と同様に、切欠き平板の確率分布関数 $F(\tau_m)$ を(3)式より求め、上降伏点の応力分布依存性について考察する。

円弧形切欠きのある平板に引張荷重を加えるときの応力分布は解析的には求められていないので、有限要素法によって応力分布を求めた。対称性を考慮して試験片の1/4を Fig. 8 (a), (b)のように分割した。 $\alpha = 1.23$ の試験片については要素数575、節点数329、 $\alpha = 1.52$ の試験片については要素数598、節点数344である。上降伏点の確率分布関数 $F(\tau_m)$ は(3)式の積分を和で

Fig. 8. Meshes for finite element analysis.

近似することにより,

$$F(\tau_m) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \sum_{i=1}^N \left(\frac{\tau_i - \tau_u}{\tau_0} \right)^m \cdot 4\Delta v_i \right] & : \tau_m \geq \tau_u \\ 0 & : \tau_m < \tau_u \end{cases} \quad (11)$$

で与えられる。ここで、 N は Fig. 8 (a)または(b)の要素総数であり、 i は要素番号である。 τ_i は要素 i の最大せん断応力、 Δv_i はその体積(板厚が1mmであるから面積に等しい)であり係数の4は各象限に同じ要素が一つずつ合計4個あるために付けられている。 $\tau_i < \tau_u$ であるような要素に対しては、(3)式の和への寄与を0とする。

(8)式のパラメータを用いて、上述の方法で計算した結果を Fig. 6 に実線で示した。計算結果は、応力集中係数 α が大きいほど、すなわち応力こう配が急なほど、上降伏点が高くなるという実験結果の傾向をよく説明している。

なお、前述のように α の非常に大きい試験片や幅の広い試験片では局部的な降伏が生じ、上降伏点が生じなかった。上降伏点が生ずるときは転位がいったんくぎづけから解放されると、試験片幅の大部分を横断するようなすべりが生ずるときと考えられる。これがどのような条件で定まるかは明らかでない。本論文の手法は上降伏点が生ずるときに適用されるものである。

5 結 言

(1) 合計約180本の試験片を用いて、低炭素鋼丸棒の引張り・ねじり・4点曲げおよび切欠き平板の引張りにおける上降伏点の分布を求めた。その結果、丸棒については、引張り・ねじり・4点曲げの順に上降伏点が高くなるという従来からいわれている傾向を統計的に確認することができた。また、切欠き平板については、応力集中係数が大きいほど上降伏点が高い値を示すことが統計的に明らかになった。

(2) Cottrell の転位のくぎづけモデルを考慮し最弱リンクモデルを用いて、上降伏点の応力分布依存性について統計論的考察を行ない、上述の実験結果を説明した。

なお、実験値との定量的な一致はいまだ不十分であり、今後はさらに精密なモデルによる解析が必要であろう。最後に、実験の一部を担当していただいた堀内富雄氏に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) 横堀武夫, “材料強度学”, p.66 (1964) 岩波書店
- 2) 横堀武夫, “材料強度学”, p.36 (1955) 技報堂
- 3) 中西不二夫, 佐藤和郎, “材料力学”, p.6 (1970) 岩波書店
- 4) McLean, D., “Mechanical Properties of Metals”, p.186 (1962) John Wiley & Sons
- 5) Cottrell, A.H., and B.A. Bilby, Proc. Phys. Soc. Lond., **62**, 49 (1949).
- 6) Johnston, W.G., J. Appl. Phys., **33**, 2716 (1962).
- 7) Ichikawa, M., H. Kuroda, and T. Yokobori, Rep. Res. Inst. Strength and Fracture of Materials, Tohoku Univ., **9**, 11 (1973).
- 8) Freudenthal, A. M., “Fracture”, **2**, p.591 (1968) Academic Press
- 9) Gumbell, E., “Statistics of Extremes” (1958) Columbia Univ. Press
- 10) Oh, H., and I. Finnie, Int. J. Frac. Mech., **6**, 287 (1970).
- 11) 坂田 勝, 精密機械, **39**, 9 (1973).
- 12) 青木 繁, 坂田 勝, 材料, **23**, 264 (1974).
- 13) 山田嘉昭, “コンピュータによる構造工学講座”, II-2-A (1972) 培風館
- 14) 横堀武夫, 材料強度学会誌, **4**, 76 (1969).
- 15) 西原利夫, 平 修二, 機械学会論文集, **18-65**, 84 (1952); **18-65**, 90 (1952).
- 16) 西原利夫, 平 修二, 黒江秀男, 居内正好, 機械学会論文集, **18-68**, 65 (1952).
- 17) Yokobori, T., K. Shimizu, and M. Tanaka, “Physical Basis of Yield and Fracture: Conference Proceedings”, p.100 (1966) Institute of Physics and Physical Society, London
- 18) 横堀武夫, “材料強度学第二版”, p.161 (1974) 岩波書店