側傾法によるX線応力測定における X線入射方法の測定値に及ぼす影響*

吉 岡 靖 夫**

Influences of X-Ray Incidence Direction on Stress Determination by Side Inclination Method

by

Yasuo YOSHIOKA

(Musashi Institute of Technology, Tokyo)

There are two directions of counter scanning when the stress measurement is made by means of X-rays. In the conventional method, the plane determined by the stress direction and the normal of the specimen is coincident with the plane determined by the direction of the incident X-ray and the direction of counter scanning. On the other hand, those two planes are perpendicular in the side inclination method, and in addition, X-ray beams must be irradiated from $-\eta$ direction to the plane determined by the stress direction and the normal of the specimen. This side inclination method for stress measurement by means of X-rays is useful for measuring the stress in a complicated shape specimen.

When the measurement by the side inclination method is adopted with the apparatus used for the conventional method, however, it occurs quite often that the direction of X-ray beam has to be adjusted to coincident with the plane determined by the stress direction and the normal of the specimen. The value of stress calculated by the $\sin^2\psi$ method differs from the true value, depending upon the angle between the direction of stress and the principal axis.

In this study, the stress analysis is performed on the above incidental condition of X-ray beams and the values of stress are calculated numerically for several examples. Moreover, some results of the stress measurements are presented to prove the propriety of the present analysis.

(Received Aug. 8, 1975)

1 緒 言

側傾法によるX線応力測定法は、従来の方法（以後、普通法と呼ぶ）に比べて、R部や歯底残留応力の測定などの複雑形状物の応力測定がある程度可能であるのに加えて、X線の試料への吸収がX線入射角の如何にかかわらず一定のため回折強度の入射角依存がなく、応力値の吸収補正の必要もなく、また理論的には低角度側での測定も可能であるなどの特長を有している。

このため、今後の残留応力測定にあたっては、側傾法が多く採用されることが予想されるが、現在のところ開発されてからの日が浅く、測定にあたっては、普通法用の装置をそのまま流用していることが多い。この点について理論的および実験技術的な検討が必要で

ある。

本研究は、理論的検討の一つとして、X線の試料への入射方法によって生ずるX線の測定値の誤差について解析を行ない、実際例についてその妥当性を確かめたものである。

2 解 析

普通法は Fig.1 (a)に示すように、 σ_x を測定応力とすると、X線を σ_x 方向と試料法線 OZ を含む面内で、 OZ に対して ϕ_0 傾けて入射せしめ、検出器はやはりこの面内で、X線入射点 O を回転中心として走査する。したがって、得られる回折線は試料表面と $(\phi_0 + \eta)$ 傾いた格子面からのものである。

一方、側傾法は、Fig.1 (b)のように OZ より σ_x 方向に ϕ だけ傾き、 OY を含む面内で OZ' より $-\eta$ 傾けた方向よりX線を O 点へ向けて入射させる。そうし

* 原稿受理 昭和50年8月8日

** 正 会 員 武蔵工業大学 東京都世田谷区玉堤

Fig. 1. Geometric illustrations for X-ray stress measurement.

て検出器はこの面内で O を回転中心として $+\eta$ 側を走査させる。すると OYZ' 平面に垂直な格子面の回折が得られる。

しかし、普通法用の装置を用いる場合、 OZ' 軸より σ_y 方向に $-\eta$ 傾けて入射することができなくて、 OZ' 軸に一致させて X 線を入射、すなわち Fig. 2 (a) のような角度関係で測定を行なうのが側傾法の本来の方法であるのに対して、Fig. 2 (b) の角度関係で測定を行なってしまうことが現実には起こりうる。この場合、応力測定値にどの程度の誤差が生ずるかを検討する。なお、本報では、本来の方式を η 補正付側傾法、後者を η 補正無側傾法と呼ぶ。

Fig. 3 (a) は普通法または η 補正付側傾法の応力とひずみの方向である。 OP 方向のひずみ $\varepsilon_{\phi\psi}$ は次式で与えられる。

Fig. 2. Relation between X-ray incident beam and diffraction plane.

Fig. 3. Direction of stress and strain on the X-ray stress measurement.

$$\varepsilon_{\phi\psi} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_x \cdot \sin^2\psi - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1)$$

一方、 η 補正なし側傾法では、(b) のように OP' 方向のひずみ $\varepsilon_{\phi\psi}$ を測定することになる。この $\varepsilon_{\phi\psi}$ は次式で示される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\phi\psi} = & \varepsilon_1 [\cos^2\phi \cdot \sin^2\psi \cdot \cos^2\eta + \sin^2\phi \cdot \sin^2\eta \\ & - \frac{1}{2} \sin 2\phi \cdot \sin \psi \cdot \sin 2\eta] \\ & + \varepsilon_2 [\sin^2\phi \cdot \sin^2\psi \cdot \cos^2\eta + \cos^2\phi \cdot \sin^2\eta \\ & + \frac{1}{2} \sin 2\phi \cdot \sin \psi \cdot \sin 2\eta] \\ & + \varepsilon_3 \cdot \cos^2\phi \cdot \cos^2\eta \end{aligned} \quad (2)$$

ここで応力とひずみの関係を代入して整理すると(2)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\phi\psi} = & \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \cdot \sigma_x \cdot \cos^2\eta \cdot \sin^2\psi \right. \\ & + (1+\nu) \sigma_y \cdot \sin^2\eta - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \\ & \left. - \frac{1+\nu}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \tan 2\phi \cdot \sin \psi \cdot \sin 2\eta \right] \\ = & \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \cdot \sigma_x \cdot \cos^2\eta \cdot \sin^2\psi \right. \\ & + (1+\nu) \sigma_y \cdot \sin^2\eta - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \\ & \left. - \frac{1+\nu}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\phi \cdot \sin \psi \cdot \sin 2\eta \right] \end{aligned} \quad (3)$$

この式は(1)に比べて、 ϕ , η , σ_y の項が加わり、 $\varepsilon - \sin^2\psi$ 関係が直線でなくなる場合が条件によって起こりうる。したがって σ_x の厳密解を求める場合は二次式として取り扱う必要が生ずる。この方法は後述するが、まず $\varepsilon_{\phi\psi}$ と $\sin^2\psi$ の関係を直線として求めた応力値の誤差の検討を行なう。

3 $\sin^2\psi$ 法による測定値の誤差

η 補正を行わず測定を行ない、 $\sin^2\psi$ 法で応力を求めた場合の応力を σ_x' とし、普通法や η 補正付側傾法で求められる応力測定値 σ_x と区別する。そうして(3)式で σ_1 , σ_2 および ϕ の取りうる値について σ_x' を求める。

$$(i) \quad \sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \phi = 0$$

(3)式第4項が0となるから、 $\sin^2\psi$ 線図は直線となり、こう配は次のように示される。

$$\frac{\partial \varepsilon_{\phi\psi}}{\partial \sin^2\psi} = \frac{1+\nu}{E} \cos^2\eta \cdot \sigma_x \quad (4)$$

したがって

$$\sigma_x' = \cos^2\eta \cdot \sigma_x \quad \text{または} \quad \sigma_x = \sec^2\eta \cdot \sigma_x' \quad (5)$$

$$(ii) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_y$$

(i)と同じである。

$$(iii) \quad \sigma_1 \neq \sigma_2, \quad \phi \neq 0$$

$\varepsilon_{\phi\psi} - \sin^2\psi$ 関係は直線ではなくなる。そこで、 ψ が 0° から 45° までの間では

$$\sin \psi \simeq m \cdot \sin^2\psi \quad (6)$$

が近似的に成立するものとして、 $\phi=0^\circ, 25^\circ, 35^\circ$ および 45° の値から m および相関係数 R を求めると、

$$m=1.384, R=0.962$$

となりほぼ直線近似ができるので、この m を(3)に代入してこう配を求めると

$$\frac{\partial \varepsilon_{\phi\eta}}{\partial \sin^2 \phi} = \frac{1+\nu}{E} \left[\cos^2 \eta \cdot \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\phi \cdot \sin 2\eta \cdot m \right] \quad (7)$$

これより

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= \cos^2 \eta \cdot \sigma_x - \frac{m}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\phi \cdot \sin 2\eta \\ &= \cos^2 \eta \cdot \sigma_x - \frac{m}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \tan 2\phi \cdot \sin 2\eta \quad (8) \end{aligned}$$

となる。

このように、 η 補正を行なわないと、 σ_x と主応力 σ_1 および σ_2 の関係によって測定される応力 σ_x' と真の応力 σ_x の間に誤差が生ずる。そこで、(a) Cr-K α 線で α -Fe (211) 面および(b) Cr-K α 線でオーステナイト系ステンレス γ (220) 面の応力測定を行なう場合の σ_x と σ_x' の関係を数値計算で調べてみる。用いる数値は α -Fe(211) では $2\theta=156.41^\circ$, γ (220) では $2\theta=129.04^\circ$ である。

(i) $\sigma_x=\sigma_1, \sigma_y=\sigma_2, \phi=0$

(ii) $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_x=\sigma_y$

$$\left. \begin{aligned} \text{(a) } \alpha \text{ (211)} \quad \sigma_x' &= 0.96 \sigma_x, \sigma_x = 1.04 \sigma_x' \\ \text{(b) } \gamma \text{ (220)} \quad \sigma_x' &= 0.82 \sigma_x, \sigma_x = 1.23 \sigma_x' \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

α (211) の場合は影響は少ないが、 γ (220) では測定値 σ_x' は真値の82%であり無視できない。

(iii) $\sigma_1 \neq \sigma_2, \phi \neq 0$

ϕ の値によって、 σ_x' の値が異なるため、 ϕ の代表的な値について σ_x' を計算した結果を Table I に示す。なお、 σ_x の値は ϕ の符号には関係しないが、 σ_x' は符号が関係するので注意を要する。

さて、この結果を用いて α (211) の場合について、

Table I. Values of stress measured by non η corrected side inclination method. ϕ is angle between the directions of determining stress and principal stress.

ϕ	α -Fe(211)	γ -Fe(220)
0°	$0.96 \sigma_x$	$0.82 \sigma_x$
15°	$0.81 \sigma_x + 0.15 \sigma_y$	$0.51 \sigma_x + 0.31 \sigma_y$
30°	$0.51 \sigma_x + 0.45 \sigma_y$	$-0.12 \sigma_x + 0.94 \sigma_y$
45°	$0.96 \sigma_x - 0.26 (\sigma_1 - \sigma_2)$	$0.82 \sigma_x - 0.54 (\sigma_1 - \sigma_2)$
60°	$1.41 \sigma_x - 0.45 \sigma_y$	$1.76 \sigma_x - 0.94 \sigma_y$
75°	$1.11 \sigma_x - 0.15 \sigma_y$	$1.13 \sigma_x - 0.31 \sigma_y$
90°	$0.96 \sigma_x$	$0.82 \sigma_x$

実際の数値計算を行なってみる。始めは一軸引張状態で $\sigma_1=30 \text{ kg/mm}^2, \sigma_2=0 \text{ kg/mm}^2$ 、ついで単純せん断状態で $\sigma_1=30 \text{ kg/mm}^2, \sigma_2=-30 \text{ kg/mm}^2$ の場合であり、それぞれの計算結果を Table II に示す。たとえば、一軸引張りの場合、 $\phi=45^\circ$ では σ_x は 15 kg/mm^2 であるのに対して、 η 補正なし側傾法では 6.6 kg/mm^2 と測定されることになる。

以上のように η 補正なし側傾法では測定条件によって誤差が生ずるが、(3)式を二次回帰で求めれば、 σ_x の値のみならず原理的には主応力解析が可能であるのでこの方法と、技術的見地よりこのような測定が可能か否かについてつぎに検討を行なった。

Table II. Some numerical examples on the values of stress determined by non η corrected side inclination method.

(a) Uniaxial tension (b) Pure shearing

(a) $\sigma_1=30 \text{ kg/mm}^2, \sigma_2=0 \text{ kg/mm}^2$			
ϕ	σ_x	σ_y	σ_x'
0°	30	0	28.8
15°	28	2	23.0
30°	22.5	7.5	14.9
45°	15	15	6.6
60°	7.5	22.5	0.5
75°	2	28	-2.0
90°	0	30	0
(b) $\sigma_1=30 \text{ kg/mm}^2, \sigma_2=-30 \text{ kg/mm}^2$			
ϕ	σ_x	σ_y	σ_x'
0°	30	-30	28.8
15°	26	-26	17.2
30°	15	-15	0.9
45°	0	0	-15.6
60°	-15	15	-27.9
75°	-26	26	-32.8
90°	-30	30	-28.8

4 主応力測定法

(3)式は $\sin \phi$ の二次式であるから、3種以上の $\sin \phi$ の値に対する $\varepsilon_{\phi\eta}$ を求めれば σ_x, σ_y および ϕ が求まる。(3)式の $\sin^2 \phi$ と $\sin \phi$ の係数を A, B 、定数項を C としてこの A, B, C を最小二乗法で求めると、

$$\sigma_x = \frac{A}{(1+\nu) \cdot \cos^2 \eta} E \quad (10)$$

$$\sigma_y = \frac{C + \nu \sigma_x}{(1+\nu) \sin^2 \eta - \nu} \cdot E \quad (11)$$

$$\tan 2\phi = \frac{2B}{(1+\nu) (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\eta} \quad (12)$$

となるので、主応力 σ_1, σ_2 が求められる。普通法では σ_x のみが求まるのに対して、 η 補正なし側傾法で

は、一回の測定で主応力が求まることになる。

しかし、X線応力測定では、直接 $\varepsilon_{\phi\psi\eta}$ が測定されるのではなく、格子面間隔 d を 2θ を通じて $\varepsilon_{\phi\psi\eta}$ に変換するため、(10)、(11)は次のようになる。

$$\sigma_x = \frac{E \cot \theta_0}{2(1+\nu) \cdot \cos^2 \eta} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot A \quad (13)$$

$$\sigma_y = \frac{E \cot \theta_0}{2(1+\nu)[(1+\nu)\sin^2 \eta - \nu]} \cdot \frac{\pi}{180} [C - 2\theta_0] + \nu \sigma_x \quad (14)$$

この式によって σ_x , σ_y の測定を行なう場合の精度を検討する。第一は(14)式中の $2\theta_0$ の値である。普通、応力測定の場合、 θ_0 が係数項にある場合は θ_0 は回折テーブルの値を引用してあまり精度的には問題とならないが $[C - 2\theta_0]$ 項の計算にあたっては、測定条件を厳密に規定し、しかもその被測定材料について精密に測定しなければ誤差が大きくなる可能性が大である。(1)で、 $\psi=0$ として主応力 $(\sigma_1 + \sigma_2)$ を求めることが原理的には行なえても、実際には θ_0 が正確に求められないため行なわれないのと同じで、(14)より σ_y を求めることは、精度上からは不可能である。

第二は、係数、 A , B および C の測定精度である。(3)は $\sin \psi$ の二次式ではあるが、 ψ が 0° から 45° までの範囲では直線に近似されるほどのものである。このような場合の A の測定精度は直接 σ_x に関係してくる。そこで実際の数値によって精度に関する検討を行なった。

(3)を 2θ で表わすと

$$\begin{aligned} 2\theta_{\phi\psi\eta} = & -\frac{2}{E \cdot \cot \theta_0} \left[(1+\nu) \cdot \sigma_x \cdot \cos^2 \eta \cdot \sin^2 \psi \right. \\ & - \frac{1+\nu}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \\ & \times \tan 2\phi \cdot \sin 2\eta \cdot \sin \phi \\ & \left. + (1+\nu) \sigma_y \cdot \sin^2 \eta - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] + 2\theta_0 \end{aligned} \quad (15)$$

となる。今、 $\sigma_1 = 40 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_2 = 0 \text{ kg/mm}^2$ の一軸引張状態の $\phi = 45^\circ$ 方向の応力測定を考える。すると $\sigma_{45} = 20 \text{ kg/mm}^2$ となる。 $\alpha\text{-Fe}(211)$ の測定を考えると、 $\sigma_x = 20 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.28$, $2\theta_0 = 156.41^\circ$, $\phi = \pm 45^\circ$ を代入して、 ψ を 5° おきに計算すると Table III のような値が得られ、また $\sin^2 \psi$ および $\sin \psi$ 線図を作ると Fig. 4 のようになる。図中、点線は $2\theta - \sin^2 \psi$ 線図で、求めた応力値は $\phi = 45^\circ$ の場合が 8.8 kg/mm^2 , $\phi = 135^\circ$ の場合が 29.6 kg/mm^2 であり、この値は Table I の式で求めたものとよく一致する。なお、 $\Delta\sigma$ は95%信頼限界の値である。一方、Table III の値を用いて逆に二次回帰を行なって応力を求めるとこの表のとおり小数点以下四桁までとれば、 ϕ が 45° でも 135° でも 20.0 kg/mm^2 となるが、実際の測定では 2θ は高々小数点以下二桁までが測定可能であること

Table III. An example of relation between 2θ and ϕ in the directions of 45° and 135° from principal axis, when the uniaxial stress was loaded.

	$\phi = 45^\circ$	$\phi = 135^\circ$
ϕ	$2\theta_{\phi\psi\eta}$	$2\theta_{\phi\psi\eta}$
0	156.7054	156.7054
5	.7239	.6772
10	.7325	.6396
15	.7316	.5931
20	.7218	.5387
25	.7038	.4776
30	.6786	.4110
35	.6476	.3406
40	.6121	.2680
45	.5735	.1950

Fig. 4. Relation between 2θ and $\sin \psi$ or $\sin^2 \psi$ in the directions of 45° and 135° from principal axis, when the uniaxial stress was loaded. (Numerical simulation)

を考えて、四捨五入して二桁までの数値で計算を行なうと

$$\phi = 45^\circ \text{ の場合 } \sigma = 19.6 \text{ kg/mm}^2$$

$$\phi = 135^\circ \text{ の場合 } \sigma = 18.8 \text{ kg/mm}^2$$

と誤差が生ずる。実際の測定ではさらに多くの誤差が生ずるのが普通であり、この方法により高精度の測定を行なうことは困難であることが推察される。

5 実 測 例

以上、3および4で η 補正なし側傾法の原理的な問題から生ずる誤差について数値的な検討を行なってきたが、実際の測定によってこの誤差を検討した結果を報告する。

実験は曲げを与えた鋼試験片を用いて行なった。特性X線は $\text{Cr-K}\alpha$ 線で $\alpha\text{-Fe}(211)$ 面の応力を測定した。実験目的はまず η 補正なし側傾法の測定値を $\sin^2 \psi$ 法で整理した場合の誤差の検討を、ついで二次

曲線とした場合の測定値の検討の二つである。

実測例1 SUP6 材を 850℃より油焼入れしたのち、600℃で二時間保持して油冷した曲げ試験片に曲げ応力を与えた。この場合、曲げ方向の応力を主応力の σ_1 として、種々の ϕ に対する応力を測定した。まず普通法および補正付側傾法では $\phi=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ および 135° (側傾法のみ)を、ついで、 η 補正なし側傾法では ϕ を 0° より 15° おきに応力を測定した。この結果を Fig. 5 に示す。図中の破線は普通法で測定した σ_1 と σ_2 より計算した ϕ 方向応力値である。実線は同じく σ_1 と σ_2 より(8)式で計算した η 補正なし側傾法で測定される応力 σ_x' の値である。普通法および η 補正付側傾法の測定値は破線上に、 η 補正なし側傾法の測定値は実線にはばのっており、解析の妥当性と η 補正の必要なが示されている。

Fig. 5. Relation between the direction of stress from principal axis and stresses measured by conventional method, η corrected side inclination method and non η corrected side inclination method.

実測例2 1と同じ試験片に約 40 kg/mm² の曲げ応力を与えてまず普通法で σ_1 と σ_2 を測定したのち、 η 補正なし側傾法で $\phi=45^\circ$ および 135° 方向の応力を測定した。 ϕ は 0° から 45° まで 5° おきに10点の測定を行なった。その結果を Fig. 6 に示す。普通法で求めた σ_1, σ_2 はそれぞれ 39.8 kg/mm², -5.5 kg/mm²

である。したがって $\phi=45^\circ$ および 135° 方向の応力は 17.2 kg/mm² である。まず $\phi=45^\circ$ 方向について、(13)式で応力を求めると 1.0 kg/mm² となり非常に大きな誤差を生じている。これに対して $\phi=135^\circ$ 方向では 16.9 kg/mm² とほぼ一致している。また、 $\sin^2\psi$ 法で計算すると 45° 方向では -1.9 kg/mm², 135° 方向で 26.1 kg/mm² と(8)式よりの計算値にほぼ近い値が得られ、バラツキ値 $\Delta\sigma$ (95%) はそれぞれ 2.23 および 2.58 kg/mm² と小さいことから考えて、 45° 方向測定値で得られた大きな誤差をもつ測定値もひんぱんに起こりうる可能性があり、このような二次曲線のあてはめは現段階ではさけるべきと考える。

Fig. 6. Relation between 2θ and $\sin\psi$ or $\sin^2\psi$ in the directions of 45° and 135° from principal axis, when the uniaxial stress was loaded. (Experimental result)

6 結 論

側傾法によるX線応力測定で、X線を試料 σ_y 軸に直角入射をしたときに生ずる測定値の原理的な誤差について理論的および実験的検討を行なった。その結果、まず、 $\sin^2\psi$ 線図を直線と考えて応力を求める場合は測定応力 σ_x が主応力 σ_1 となす角 ϕ の値によって誤差の現われ方が変化する。そうして、特に $2\theta_0$ の値が小さいものほど、誤差が大きくなるので η 補正が必要である。さらに、もし二次回帰を行なえば理論的には主応力解析が可能ではあるが、測定精度の良い値を期待することは困難でさけるべきであるとの結論を得た。(昭和50年7月18日 第12回材料強度に関するシンポジウムにて講演)