ハイブリッド複合材料の複素弾性係数*

吉 田 治 夫**

Complex Modulus of Elasticity of Hybrid Composites

by

Haruo YOSHIDA

(Osaka Municipal Technical Research Institute, Osaka)

In case fiber reinforced plastics are used as construction members, they are often used as the form of combination of different FRP so called hybrid composites.

It is necessary for designing the constructions to investigate the dynamical viscoelastic behavior of this material when it is subjected to forced vibration.

Analysis of complex modulus of elasticity which expresses not only the rigidity of the material but also the degree of energy absorption as the vibration or sonic absorber is very advantageous problem for this material. For this purpose, the author established a theoretical method which relates the complex modulus of elasticity and the alignment of unit composites to the dynamical behavior of the hybrid composite.

Resonance vibration tests by bending were carried out with test specimens, and the appropriateness of this method were verified. For the mathematical calculation, a new programming soft ware for electronic computer was developed.

By this study we can control the dynamical viscoelastic properties of hybrid composite materials at the preparing process. Thus raw materials of composites are able to be used efficiently and the fundamental data for designing become to be obtainable.

(Received Oct. 22, 1975)

1 緒 言

強化プラスチック (FRP) が構造部材として用いられるとき、構成素材を有効に使用して補強効果を高めるために、異種強化材を組み合わせたハイブリッド複合材料として使用される場合が多くなりつつある。この場合は部材は巨視的にも部材内の場所によって力学的特性の異なる異種材料連続体となる。このような材料が強制振動を受ける場合、粘弾性体としての動的挙動を解明しておくことは、構造物の設計上必要なことであり、また最近複合材料が防振あるいは防音材として注目をあびている折から、その振動特性として、とくに振動エネルギー吸収性の判定資料となる複素弾性係数について検討を加えておくことは、実用面においてもきわめて意義のあることと考える。

複合材料が異種強化材によって積層されている場合は厚さ方向について異質性を有するが、強化材が織物でありとくに異種繊維束による交織である場合には、積層板の平面方向についてもまた異質性を有すること

になる。たとえばガラス繊維束と炭素繊維束とがある一定の配列順序によって交織されている織物を強化材として用いる場合とか、ガラス FRP 板の所要所に炭素繊維の帯を補強して積層した場合などがこの例である。このように厚さ方向および平面方向ともに異質性をもったハイブリッド複合材料の板の動的曲げ粘弾性を明らかにすることはかなりの手数を要することがらであるが、これの解明の手順としてこの材料をある程度モデル化し、厚さ方向および長手方向の二次元について異質性をもつはりを考え、これについて粘弾性を考慮したはりの曲げ理論を適用し、材料の粘弾性特性を表明する指標となる複素弾性係数の理論的算出法を誘導し、実験値との対比を行なった。複素弾性係数の定義^{1,2)}については粘弾性関係の多くの成書、文献に見られ、また前報³⁾において詳しく述べたのでここでは本報文内容の説明に必要な最小限度の記述にとどめる。

線形粘弾性体において応力 σ が時間 t に関して正弦波的に変化するとき、ひずみ ϵ もまた正弦波となるが、材料の内部粘性のためにエネルギー損失が起こり、ひずみは応力よりも正弦波位相として δ だけ遅れる。

* 原稿受理 昭和50年10月22日

** 正 会 員 大阪市立工業研究所 大阪市北区北畠町

この関係をベクトルまたは複素平面上にて表示すれば、 $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$, $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)}$ となる。 σ_0 は応力振幅、 ε_0 はひずみ振幅、 ω は振動率、 i は虚数軸単位 $\sqrt{-1}$ である。このとき複素弾性係数 E^* もベクトルであり、

$$E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = |E^*| \cos \delta + i |E^*| \sin \delta = E' + iE''$$

$$d = \frac{E''}{E'} = \tan \delta,$$

$|E^*| = \sigma_0 / \varepsilon_0$ であり、これを複素弾性係数の絶対値、 E' を複素弾性係数の実数部（動的弾性係数）、 E'' を虚数部（動的損失）、 d を損失係数という。

2 理 論

2・1 厚さ方向に異質材料が積層されている場合

複合積層はりの厚さは、はりの長さに対して小であるからはりの横断面ははりが曲げられた後も平面を保つとして曲げ剛性を考える。はりの縦軸方向の座標を x 、はりが曲げられたときの縦主軸の曲率半径を ρ 、はりの断面において、中立軸に関する各層の断面二次モーメントを I_i 、断面一次モーメントを S_i 、各層の断面積を A_i 、中立軸から厚さ方向への距離を y 、縦主軸の変位（たわみ）を v 、曲げモーメントを M とする。複合積層を構成する各層の材料の複素弾性係数を E_i^* とし、はりが正弦波外力を受けて曲げ共振状態にあるときは、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{\sigma}{E_i^* y}, \quad E_i^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (1)$$

応力の平衡条件として

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{A_i} \sigma dA_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^k \int_{A_i} \frac{E_i^*}{\rho} y dA_i &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^k E_i^* S_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{A_i} \sigma y dA_i &= M, \\ M &= \sum_{i=1}^k \frac{E_i^*}{\rho} y^2 dA_i = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^k E_i^* I_i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\sum_{i=1}^k E_i^* I_i} = - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4)$$

複合はり全体の振動挙動を、巨視的にみて均質材料の挙動とみなして得た総合的な見掛け上の複素弾性係数を E^* 、中立軸に関する全断面についての断面二次モーメントを I とすれば、 $1/\rho = M/(E^* I)$ が成立し、(4)式とともに、次の関係が得られる。

$$E^* I = \sum_{i=1}^k (E_i^* I_i) \quad (5)$$

(5)式の両辺はいずれも複素数として表わされるものであるから、実数部および虚数部はそれぞれ等しくなければならない。

$$\text{Real}(E^* I) = \sum_{i=1}^k \text{Real}(E_i^* I_i) \quad (6)$$

$$\text{Imag.}(E^* I) = \sum_{i=1}^k \text{Imag.}(E_i^* I_i) \quad (6')$$

したがって

$$E' = \sum_{i=1}^k \frac{I_i}{I} E_i' = \sum_{i=1}^k \frac{I_i}{I} |E_i^*| \cos \delta_i \quad (7)$$

$$E'' = \sum_{i=1}^k \frac{I_i}{I} E_i'' = \sum_{i=1}^k \frac{I_i}{I} |E_i^*| \sin \delta_i \quad (7')$$

$$d = \frac{E''}{E'} \quad (7'')$$

もしハイブリッド複合材料が、強化材が微粒子または短繊維などによる均一分散強化形であれば、それぞれの強化材の体積含有率を β_i とすれば、 $\beta_i = I_i / I$ となる。もし強化材が一種類だけである場合は長繊維クロスであってもこのことは成立する。この場合、強化材を f 、マトリックスを m なる記号で表わすと、(7)式は

$$\begin{aligned} |E^*| \cos \delta &= E' = \beta_f |E_f^*| \cos \delta_f + (1 - \beta_f) |E_m^*| \cos \delta_m \\ &= \beta_f E_f' + (1 - \beta_f) E_m' \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} |E^*| \sin \delta &= E'' = \beta_f |E_f^*| \sin \delta_f + (1 - \beta_f) |E_m^*| \sin \delta_m \\ &= \beta_f E_f'' + (1 - \beta_f) E_m'' \end{aligned} \quad (8')$$

したがって実数部、虚数部ともに強化材体積含有率に関する複合則が成立する。固体材料の場合は一般に損失係数は $0 \sim 0.2$ 程度の小さい値であるから $d = \tan \delta \approx \sin \delta \approx \delta$, $\cos \delta \approx 1$, (8), (8') 式より

$$d = \frac{\beta_f E_f' d_f + (1 - \beta_f) E_m' d_m}{\beta_f E_f' + (1 - \beta_f) E_m'} \quad (9)$$

d を変数 β_f の関数として考えれば(9)式は $d = (E_f'' - E_m'') / (E_f' - E_m')$, $\beta_f = -E_m' / (E_f' - E_m')$ を漸近線とする双曲線となる。

以上のことから多種類の積層においても一体となつて曲げ振動が起こるのであるからこのときの総合的な複素弾性係数を求める理論式が誘導された。

2・2 長さ方向に異質材料が連続している場合

一般に線形粘弾性体の応力 σ とひずみ ε に関する材料特性は、時間を t とすれば(10)式に表わされる。

$$P(\sigma) = Q(\varepsilon) \quad (10)$$

$$P(\cdot) = \sum_{k=0}^m p_k \frac{\partial^k(\cdot)}{\partial t^k}, \quad Q(\cdot) = \sum_{k=0}^n q_k \frac{\partial^k(\cdot)}{\partial t^k}$$

係数 $p_0 \cdots p_m$, $q_0 \cdots q_n$ は 0 または正の実数であり、 m , n は正の整数で $m \leq n$, σ および ε は場所および時間の関数である。(10)式で表わされる力学特性をもつはりが、はりの長手軸方向座標を x とし、縦主軸のたわみを $v(x, t)$ とし、軸方向に垂直に $f(x, t)$ なる荷重分布関数をもつ外力を受けたとき、このはりの運動方程式は(11)式にて表わされる。

$$P\left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}\right) + \frac{I}{m} Q\left(\frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4}\right) = \frac{1}{m} P(f(x, t)) \quad (11)$$

この式において、 m ははりの単位長さあたりの質量であり、 I ははりの断面の中立軸に関する断面二次モ

メントである。(11)式を s を補助変数として t についてラプラス変換を行なうと

$$\begin{aligned} 2\bar{v}(x, s) = & \frac{1}{q_s^2} \int_0^x \bar{\phi}(\xi, s) \{ \sinh(q_s(x-\xi)) \\ & - \sin(q_s(x-\xi)) \} d\xi \\ & + \bar{v}(0, s) \{ \cosh(q_s x) + \cos(q_s x) \} \\ & + \frac{1}{q_s} \bar{v}'(0, s) \{ \sinh(q_s x) + \sin(q_s x) \} \\ & + \frac{1}{q_s^2} \bar{v}''(0, s) \{ \cosh(q_s x) - \cos(q_s x) \} \\ & + \frac{1}{q_s^3} \bar{v}'''(0, s) \{ \sinh(q_s x) - \sin(q_s x) \} \end{aligned} \quad (12)$$

$\bar{v}(x, s)$ は $v(x, t)$ を t に関し s を補助変数としてラプラス変換した変換形を表わし、 $\bar{v}(0, s)$, $\bar{v}'(0, s)$, $\bar{v}''(0, s)$ はそれぞれ $\bar{v}(x, s)$ を x について1次, 2次, 3次微分したものに $x=0$ を代入した値である。 ξ は $0 \leq \xi \leq x$ の範囲の値をとる変数である。また

$$q_s^4 = -\frac{ms^2}{IE^*(s)} \quad (13)$$

ここで m は、はりの単位長さあたりの質量である。

$$E^*(s) = \sum_{k=0}^n q_k s^k / \sum_{k=0}^m p_k s^k \quad (14)$$

ここで $\sum$ の上限の m は(10)式における m である。

$$\bar{\phi} = \bar{f}(x, s) / (IE^*(s)) \quad (15)$$

$\bar{f}(x, s)$ は $f(x, t)$ の t に関するラプラス変換形である。

はりが Fig. 1 に示すように、はりの全長 l の間に分布荷重 $f_d(x, t)$ の他に、 $x=a_1, \dots, a_k$ の位置にそれぞれ $P_1(t) \dots P_k(t)$ なる k 個の集中荷重が作用し、 $x=b_1 \dots b_r$ の位置に支点が合計 r 個あってそれぞれの支点反力を $R_1(t), \dots, R_r(t)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x, t) = & f_d(x, t) + \sum_{j=1}^k \{ P_j(t) \delta(x-a_j) \} \\ & + \sum_{j=1}^r \{ R_j(t) \delta(x-b_j) \} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数であり、集中荷重を x の関数として分布荷重の形で表わすために用

Fig. 1. Combination beam.

いたもので、() 内の値が0のときのみある値をもつ。

はりに作用する外力が集中荷重のみであるときは、(12)式は(17)式にて表わされる。ただし以下

$$\begin{aligned} S^+(x) &= \sinh(q_s x) + \sin(q_s x), & S^-(x) &= \sinh(q_s x) - \sin(q_s x) \\ C^+(x) &= \cosh(q_s x) + \cos(q_s x), & C^-(x) &= \cosh(q_s x) - \cos(q_s x) \end{aligned}$$

を意味するものとする。

$$\begin{aligned} 2\bar{v}(x, s) = & \bar{v}(0, s) C^+(x) + \bar{v}'(0, s) S^+(x) / q_s \\ & + \bar{v}''(0, s) C^-(x) / q_s^2 + \bar{v}'''(0, s) S^-(x) / q_s^3 \\ & + \frac{1}{IE^*(s) q_s^3} \left[\sum_{j=1}^k \{ u(x-a_j) \bar{P}_j(s) S^-(x-a_j) \} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^r \{ u(x-b_j) \bar{R}_j(s) S^-(x-b_j) \} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$u(\cdot)$ は単位ステップ関数を表わし、() 内の値が $<0, >0$ に従って0, 1の値をとる。 $\bar{P}_j(s)$, $\bar{R}_j(s)$ は $P_j(t)$, $R_j(t)$ の t に関するラプラス変換形である。(17)式を x について逐次微分し、第3次微分まで求める(18)~(20)式を得る。

$$\begin{aligned} 2\bar{v}'(x, s) = & \bar{v}(0, s) q_s S^-(x) + \bar{v}'(0, s) C^+(x) \\ & + \bar{v}''(0, s) S^+(x) / q_s + \bar{v}'''(0, s) C^-(x) / q_s^2 \\ & + \frac{1}{IE^*(s) q_s^2} \left[\sum_{j=1}^k \{ u(x-a_j) \bar{P}_j(s) C^-(x-a_j) \} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^r \{ u(x-b_j) \bar{R}_j(s) C^-(x-b_j) \} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} 2\bar{v}''(x, s) = & \bar{v}(0, s) q_s^2 C^-(x) + \bar{v}'(0, s) q_s S^-(x) \\ & + \bar{v}''(0, s) C^+(x) + \bar{v}'''(0, s) S^+(x) / q_s \\ & + \frac{1}{IE^*(s) q_s} \left[\sum_{j=1}^k \{ u(x-a_j) \bar{P}_j(s) S^+(x-a_j) \} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^r \{ u(x-b_j) \bar{R}_j(s) S^+(x-b_j) \} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 2\bar{v}'''(x, s) = & \bar{v}(0, s) q_s^3 S^+(x) + \bar{v}'(0, s) q_s^2 C^-(x) \\ & + \bar{v}''(0, s) q_s S^-(x) + \bar{v}'''(0, s) C^+(x) \\ & + \frac{1}{IE^*(s)} \left[\sum_{j=1}^k \{ u(x-a_j) \bar{P}_j(s) C^+(x-a_j) \} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^r \{ u(x-b_j) \bar{R}_j(s) C^+(x-b_j) \} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

はりの右端における境界条件は(17)~(20)式において $x=l$ とおいた値である。支点 $x=b_c$ においては変位(たわみ)は0であるから、(17)式より

$$\begin{aligned} 2\bar{v}(b_c, s) = & \bar{v}(0, s) C^+(b_c) + \bar{v}'(0, s) S^+(b_c) / q_s \\ & + \bar{v}''(0, s) C^-(b_c) / q_s^2 + \bar{v}'''(0, s) S^-(b_c) / q_s^3 \\ & + \frac{1}{IE^*(s) q_s^3} \left[\sum_{j=1}^k \{ u(b_c-a_j) \bar{P}_j(s) S^-(b_c-a_j) \} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^r \{ u(b_c-b_j) \bar{R}_j(s) S^-(b_c-b_j) \} \right] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

同じく各支点について(21)式が成立し、合計 r 個の条

件式が得られる。以上で長さ l なるはり全体についての未知数は、両端の境界条件すなわち、 $\bar{v}(0, s)$, $\bar{v}'(0, s)$, $\bar{v}''(0, s)$, $\bar{v}(l, s)$, $\bar{v}'(l, s)$, $\bar{v}''(l, s)$, $\bar{v}'''(l, s)$ および支点反力 $\bar{R}_1(s) \cdots \bar{R}_r(s)$ の合計 $(4+4+r)$ 個である。条件方程式は(17)~(20)の4個の境界条件式と各支点について(21)式より得た r 個の式の合計 $(4+r)$ 個の方程式が得られる。

$\bar{v}(x, s)$, $\bar{v}'(x, s)$ は、はりの縦主軸のたわみおよび傾斜のラプラス変換形であり、またはりの曲げモーメント $M(x, t)$ およびせん断力 $S(x, t)$ のラプラス変換形を $\bar{M}(x, s)$, $\bar{S}(x, s)$ とすれば

$$\bar{v}(x, s) = -\frac{\bar{M}(x, s)}{IE^*(s)}, \quad \bar{v}'(x, s) = -\frac{\bar{S}(x, s)}{IE^*(s)} \quad (22)$$

なる関係が成立するから、はりの両端における境界条件(自由端, 支点端, 固定端)からさらに4個の条件式を追加設定することができるので未知数の個数と条件式の個数が一致し、ここで未知数全部の値を求めることができる。これを(22)式に代入し逆変換を行なうことによってはりの運動状態を知ることができる。

これまででは、はりが全長にわたって材質が一樣なものでありかつ断面の形状寸法も一定の場合について論じてきたが、つぎに、それぞれ独自の力学特性をもち、断面形状および長さの異なる異質材料のセグメントが長手方向に数多く連続してつながって一つのはりを形成している場合について考える。この場合にも各セグメントについてはもちろんいままで述べたことはすべて成立する。はり全体を形成するセグメントの数を f とし、以下所屬するセグメントを明示する必要がある場合は、変数(軸方向位置 x も含む)および常数に添字としてセグメント番号 i を付けることにする。連続はりであるから、セグメントの境界においては、左右の両セグメントについての、たわみ、傾斜、曲げモーメントおよびせん断力はそれぞれ等しくなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_i(l_i, s) &= \bar{v}_{i+1}(0, s), & \bar{v}'_i(l_i, s) &= \bar{v}'_{i+1}(0, s) \\ \bar{M}_i(l_i, s) &= \bar{M}_{i+1}(0, s), & \bar{S}_i(l_i, s) &= \bar{S}_{i+1}(0, s) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(23)式と関連して

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}''_i(l_i, s) &= \frac{I_{i+1}E_{i+1}^*(s)}{I_iE_i^*(s)} \bar{v}''_{i+1}(0, s), \\ \bar{v}'''_i(l_i, s) &= \frac{I_{i+1}E_{i+1}^*(s)}{I_iE_i^*(s)} \bar{v}'''_{i+1}(0, s) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

(23), (24)式の関係から、(17)~(21)式を用いて、隣接する二つのセグメントを関連づける $(8+r_i)$ 元一次連立方程式(式の数 $(4+r_i)$ 個)が得られる。これを行列の形で表わすと(25)式が得られる。ただし書きに示す各行列の右下に示すセグメント番号 (i) の記号は、この行列の要素について各セグメントごとにそれぞれ特

有の値をとるものはすべて i セグメントについての値をとることを意味する。

$$\begin{pmatrix} V_i & B_i & N_i \\ V_{c,i} & B_{c,i} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{o,i} \\ R_i \\ V_{o,i+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_i \\ A_{c,i} \end{pmatrix} \quad (25)$$

ただし各記号は次に示す行列を意味する。

$$\begin{aligned} & \text{(4列)} \\ \text{(4行)} \quad V_i &= \begin{pmatrix} C^+(l) & S^+(l)/q_s & C^-(l)/q_s^2 & S^-(l)/q_s^3 \\ S^-(l)q_s & C^+(l) & S^+(l)/q_s & C^-(l)/q_s^2 \\ C^-(l)q_s^2 & S^-(l)q_s & C^+(l) & S^+(l)/q_s \\ S^+(l)q_s^3 & C^-(l)q_s^2 & S^-(l)q_s & C^+(l) \end{pmatrix} \quad (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(r列, 支点の数)} \\ \text{(4行)} \quad B_i &= \begin{pmatrix} S^-(l-b_1)/q_s^3 & S^-(l-b_2)/q_s^3 & \cdots & S^-(l-b_r)/q_s^3 \\ C^-(l-b_1)/q_s^2 & C^-(l-b_2)/q_s^2 & \cdots & C^-(l-b_r)/q_s^2 \\ S^+(l-b_1)/q_s & S^+(l-b_2)/q_s & \cdots & S^+(l-b_r)/q_s \\ C^+(l-b_1) & C^+(l-b_2) & \cdots & C^+(l-b_r) \end{pmatrix} \quad (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(4列)} \\ \text{(r行)} \quad V_{c,i} &= \begin{pmatrix} C^+(b_1) & S^+(b_1)/q_s & C^-(b_1)/q_s^2 & S^-(b_1)/q_s^3 \\ C^+(b_2) & S^+(b_2)/q_s & C^-(b_2)/q_s^2 & S^-(b_2)/q_s^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C^+(b_r) & S^+(b_r)/q_s & C^-(b_r)/q_s^2 & S^-(b_r)/q_s^3 \end{pmatrix} \quad (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(r列)} \\ \text{(r行)} \quad B_{c,i} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S^-(b_2-b_1)/q_s^3 & 0 & 0 \\ S^-(b_3-b_1)/q_s^3 & S^-(b_3-b_2)/q_s^3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S^-(b_r-b_1)/q_s^3 & S^-(b_r-b_2)/q_s^3 & \cdots \end{pmatrix} \\ & \text{(対角線を含めて右上半分の要素はすべて0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(4列)} \\ \text{(4行)} \quad N_i &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\varphi \end{pmatrix} \quad (i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(4列)} \\ \text{(4行)} \quad O &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\varphi(i) = (I_{i+1}E_{i+1}^*(s))/(I_iE_i^*(s))$, $i=f$ のときのみは $\varphi(f) = 1/(I_fE_f^*(s))$

$$\begin{aligned} & \text{(1列)} \\ \text{(4行)} \quad A_i &= \begin{pmatrix} \frac{1}{IE^*(s)q_s^3} \sum_{j=1}^k \{\bar{P}_j(s) S^-(l-a_j)\} \\ \frac{1}{IE^*(s)q_s^2} \sum_{j=1}^k \{\bar{P}_j(s) C^-(l-a_j)\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A_{c,i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{IE^*(s)q_s^3} \sum_{j=1}^k \{\bar{P}_j(s) S^+(l-a_j)\} \\ \frac{1}{IE^*(s)q_s^3} \sum_{j=1}^k \{\bar{P}_j(s) C^+(l-a_j)\} \\ \text{(1列)} \\ (r \text{ 行}) \begin{pmatrix} \frac{1}{IE^*(s)q_s^3} \sum_{j=1}^k \{u(b_1-a_j) \bar{P}_j(s) S^-(b_1-a_j)\} \\ \frac{1}{IE^*(s)q_s^3} \sum_{j=1}^k \{u(b_2-a_j) \bar{P}_j(s) S^-(b_2-a_j)\} \\ \vdots \\ \frac{1}{IE^*(s)q_s^3} \sum_{j=1}^k \{u(b_r-a_j) \bar{P}_j(s) S^-(b_r-a_j)\} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (i)$$

$u(\cdot)$ は単位ステップ関数であるから、 $A_{c,i}$ の各行はいま考えている支点（行番号と同じ番号の支点）より左の位置に作用する外力のみに関係する。

$$V_{o,i} = \begin{pmatrix} \text{(1列)} \\ (4 \text{ 行}) \begin{pmatrix} \bar{v}_i(0, s) \\ \bar{v}_i'(0, s) \\ \bar{v}_i''(0, s) \\ \bar{v}_i'''(0, s) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad R_i = \begin{pmatrix} \text{(1列)} \\ (r \text{ 行}) \begin{pmatrix} R_1(s)/(IE^*(s)) \\ \bar{R}_2(s)/(IE^*(s)) \\ \vdots \\ R_r(s)/(IE^*(s)) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (i)$$

$$V_{o,i+1} = \begin{pmatrix} \text{(1列)} \\ (4 \text{ 行}) \begin{pmatrix} \bar{v}_{i+1}(0, s) \\ \bar{v}_{i+1}'(0, s) \\ \bar{v}_{i+1}''(0, s) \\ \bar{v}_{i+1}'''(0, s) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (i)$$

以上で隣接したセグメント間の関係が求められたからこれを全セグメントに適用する。このとき境界条件を定めるはりの軸方向位置は、いま考えている点 x に $+\infty$ 方向から限りなく近づいた位置すなわち x^+ を基準にとる。すなわち各セグメントにおける $x=0^+$ の位置とする。したがってはり全体の最左端が固定または支点のときは、ここに働く支点反力および不静定曲げモーメントは第1セグメントに作用しないので第0セグメントに作用するものとして第1セグメントの左端境界条件に含まれる。ただしはり全体の最右端が固定または支点のときは、ここに働く支点反力および不静定曲げモーメントは前記定義からすれば当然最終セグメント（第 f セグメント）に属するものであるが、連立方程式における未知変数の個数を少なくするためにこれは仮想の第 $(f+1)$ セグメントに作用するものとして、 $\bar{v}_{f+1}(0, s)$ 、および $\bar{v}_{f+1}'(0, s)$ に含ませることにする。すなわち $i=f$ においては行列 N_f 中の要素である $\varphi(f)$ の分子の値は実在しないものであるから、 $\varphi(f)=1/(I_f E_f^*(s))$ とし、 $I_{f+1} E_{f+1}^*(s)$ に相当する値は(20)式の連立方程式の未知変数の中に含ませることにする。したがって(20)式より $V_{o,f+1}$ の第3行目の要素は $-\bar{M}_{f+1}(0, s)$ 、第4行目の要素は $-\bar{S}_{f+1}(0, s)$ となる。これらははりの最右端における曲げモーメントおよびせん断力の変換形に負符号をつけたものである。

したがってはりの最左端および最右端支点はそれぞれのセグメントの支点数に加えない。以上のことから、異質材料連続はり全体の平衡条件として(20)式の多元一次連立方程式が得られる。未知変数の個数は $4(f+1) + \sum_{i=1}^f r_i = z$ 個（ f ：セグメント総数、 r_i ： i セグメント内の支点数）あり、両端の支え方の条件式を含めて z 個の方程式が得られる。

(z 元正行列)

$$\begin{pmatrix} V_1 & B_1 & N_1 \\ V_{c,1} & B_{c,1} & O \\ & V_2 & B_2 & N_2 \\ & V_{c,2} & B_{c,2} & O \\ & & V_3 & B_3 & N_3 \\ & & V_{c,3} & B_{c,3} & O \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & V_f & B_f & N_f \\ & & & & V_{c,f} & B_{c,f} & O \\ L_1 & & & & & & L_{f+1} \end{pmatrix}$$

(z 行1列) (z 行1列)

$$\begin{pmatrix} V_{o,1} \\ R_1 \\ V_{o,2} \\ R_2 \\ V_{o,3} \\ R_3 \\ \vdots \\ V_{o,f} \\ R_f \\ V_{o,f+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_1 \\ A_{c,1} \\ A_2 \\ A_{c,2} \\ A_3 \\ A_{c,3} \\ \vdots \\ A_f \\ A_{c,f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

0 は要素がすべて0であることを意味する。 L_1 、 L_{f+1} は最左端、最右端の区別なく、(a)固定端、(b)支点端、(c)自由端に従って次の行列の形をとる。

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(20)式の連立方程式を解くことによってすべての未知数すなわち各セグメントの境界条件およびすべての支点反力を求めることができる。これらを(17)式に代入することによって、はりの任意の位置のたわみのラプラス変換形 $\bar{v}_i(x, s)$ を求めることができる。このとき

$$\bar{v}_i(x, s) = Y_i(x, s)/D(s) \quad (27)$$

の形で表わされる。 $D(s)$ は(20)式の左辺の係数行列をそのまま要素とする行列式の値である。 $Y_i(x, s)$ は外力 $\bar{P}_{ji}(s)$ 、(i セグメントの j 番目の外力)を含み s の次数は $D(s)$ よりも小さい。

外力として振幅は異なるが周波数および位相の共通

な正弦波外力が多数一せいに作用したときは

$$Y_i(x, s) = \bar{F}(s) Q_i(x, s),$$

$$\bar{F}(s) = L \sin(\omega t) = \omega / (s^2 + \omega^2)$$

L はラプラス変換を意味する。 ω は振動率。

$$\bar{v}_i(x, s) = \frac{\bar{F}(s) Q_i(x, s)}{D(s)} = \frac{\bar{F}(s)}{Z(x, s)}$$

$$= \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2) Z(x, s)} \quad (28)$$

(28)式をラプラス逆変換すると

$$v_i(x, t) = \omega \left[\frac{e^{i\omega t}}{2i\omega Z(x, i\omega)} + \frac{e^{-i\omega t}}{-2i\omega Z(x, -i\omega)} \right. \\ \left. + \sum_k \left\{ \frac{e^{s(k)t}}{(s^2 + \omega^2) Z(x, s(k))} \right\} \right] \quad (29)$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad Z(x, s) = D(s) / Q_i(x, s),$$

$$Z(x, s) = \partial Z(x, s) / \partial s$$

$s(k)$ は $Z(x, s) = 0$ を満足する s の値である。(29)式の第3項は $s(k)$ の値が複素平面上において虚数領域にあれば振動を意味し、 $s(k)$ の実数部が+, 0, -に従って振幅は時間とともに増大, 一定, 減衰の経過をたどる。 $s(k)$ が虚数部をもたないときは振動は起こらない。第1項と第2項の和は外力による強制振動であり、第3項ははりの自由振動を表わし、時間の経過とともに減衰しついに消滅し、定常状態として強制振動のみとなる。 $Z(x, i\omega)$ と $Z(x, -i\omega)$ とは共役複素数であるから

$$v_i(x, t) = \text{Imag.} \left(\frac{e^{i\omega t}}{Z(x, i\omega)} \right) \quad (30)$$

これでこの粘弾性はりが強制振動を受けたときのたわみの理論式が求められた。実際の計算には外力としては荷重振幅値のみを与えておき、求めようとする周波数に相当する $i\omega$ の値を(29)式の s に代入しコンピュータによる数値解析を行なった。このために新しく演算プログラムを開発した。 $1/Z(x, i\omega)$ の値を複素平面上に記録すると、はりの各位置のたわみ振幅と加振力との時間的位相差を求めることができる。この一例をFig. 6に示す。

3 実 験

前節における理論が妥当性を有することを確認するために、これに必要な構造の試験片を製作し、これらを片持はりとし、自由端に正弦波曲げ強制振動荷重を与え加振周波数とはりのたわみとの関係から試験材料の複素弾性係数を求め、理論計算値との対比を行なった。実験装置はブリュエル・ケア社製複素弾性係数測定装置を用いた。

3・1 厚さ方向に異質材料が積層されている場合

ハイブリッド積層を構成する強化材として、(1)ガラスマット (グラスロンマット CM-385FA, 旭ファイバーグラス (株)), (2)長繊維ガラス繊維束および長繊維炭素繊維束を交互に並べて縦糸とした交織クロス

(トレカクロス2001, 東レ(株))の2種類を使用し、樹脂としてはエポキシ樹脂 (エピコート 828, シェル化学(株))を使用した。これらの強化材による各一層を単位 FRP として、材質(1)によるものを記号M, 材質(2)によるものを記号Cにて表わすことにし、これらの積層順序を変化させて計5種類の積層板を製作した。なおガラスマットの巻取方向とガラス・炭素繊維交織クロスの縦糸方向とを一致させて積層し、この方向に試験片の長手方向をとったものを記号Lとし、これに直角方向のものを記号Tにて表わした。試験片寸法は、幅 14 mm, 長さ 188 mm, 厚さは 1.4~3.4 mm である。これら各種試験片について20℃にて複素弾性係数を測定し、単一強化材積層による各材質の特性値を基礎にしてハイブリッド積層に関する前記理論を適用し

Fig. 2. Complex modulus of elasticity of hybrid composites (2nd mode).

Fig. 3. Complex modulus of elasticity of hybrid composites (3rd mode).

て計算を行ない実験結果とともに Figs. 2, 3 に示す. 計算値と実験値とは, 各共振モードにおいてよく一致していることが認められ理論が適正であることが確認された.

3・2 長さ方向に異質材料が連続している場合

強化材としてガラスロービングクロス (EWR-55, 日本硝子繊維 (株)), 樹脂としてポリエステル樹脂 (エポラック G153L, 日本触媒化学工業 (株)) を用い, 寸法はいずれも幅 20 mm, 長さ 260 mm (つかみ部を除く), 厚さ 2.8 mm の試験片 4 種類を製作した. 材質は記号 S はクロス 4 層によって試験片全長にわたって強化されたもの, 記号 R は樹脂のみの試験片, 他は材質 S と R とが交互に長さ 26 mm ずつ長手方向につながり, それぞれ 5 セグメントずつ合計 10 セグメントの異質材料連続体であり, 片持りとしての固定端に接する第 1 セグメントが材質 S ではじまるものを記号 CF, 第 1 セグメントが材質 R ではじまるものを記号 CR とした. それぞれの試験片について 28℃ にて実測した複素弾性係数の絶対値 E_{abs} および損失係数 d を 2~7 次の共振モードについて Fig. 4 に示す. 試験片 S および R による測定値をそれぞれの材質の特性値としてこれを前記 2・2 に適用し, 試験片 CF お

Fig. 4. Complex modulus of elasticity (Experimental).

Fig. 5. Complex modulus of elasticity (Theoretical).

Fig. 6. Deflection of beam expressed by vector (2nd mode).

Fig. 7. Peak of deflection amplitude diagram versus frequency at the resonance of 2nd mode. (Loss factor).

および CR について理論計算を行なった結果を Figs. 5 ~ 10 に示す. Fig. 5 は第 2, 3, 4 次共振点について計算された複素弾性係数の絶対値と損失係数であり実測値とよく一致しており計算理論が適正であることを実証している. Fig. 6 は自由端に作用する正弦波荷重を基準として 2 次共振点付近におけるはりの各部のたわみ振幅と位相とをベクトル表示したもので共振点 ($\omega/\omega_r = 1.000$, ω_r は共振振動率) において振幅は極大値をとり, たわみ位相は荷重に対して 90° 遅れとなり, この前後の周波数において位相が反転する様子が

Fig. 8. Bending moment (2nd mode).

Fig. 9. Curvature of neutral axis (2nd mode).

Fig. 10. Deflection of beam (2nd mode).

うかがえる。図中 CR は CF とほとんど同じ位置にゐるので省略した。Figs. 7~10は計算過程を示す。なお荷重単位は 1 kg で計算を行なったが実験では数グラムの荷重である。

4 結 言

それぞれ独自の動的粘弾性特性を有する複合材料によって混成されたハイブリッド複合材料の動的粘弾性特性を、これを構成する要素複合材料の動的粘弾性特性とこれらの要素複合材料の配列状態とから予測するための理論計算方法を確立した。

計算方法が適正であることを実証するために、厚さ方向に異種材料が積層された板および平面方向に異種材料が分布している板を製作し、これらから、はりとしての試験片を採取し、曲げ共振法によりこれらの材料の複素弾性係数を測定し、実験値と計算値とを対比した。その結果両者はよく一致し理論計算法が正しいことが確認された。

計算を容易にするために、要素複合材料の配列状態と全く同一パターンにて入力カードを並べて自動計算のできるコンピュータ用プログラムを開発した。

本研究により、ハイブリッド複合材料を構成材として使用する際に、その使用目的に応じた動的粘弾性特性を与えるように成形過程において制御することが可能となった。したがって素材を有効適切に使用することができるのみならず機械設計において必要な基礎資料を得ることができる。

また計測技術の問題としては、ある材料の複素弾性係数を求めようとする際に、材料特性または寸法的な理由で測定に適合した試験片形状寸法が得られない場合に、他の剛性材料に貼付または結合させることによって測定することができるようになり、さらに疲労試験片などにおいて局部的に疲労を受ける場合に、その局部の複素弾性係数の変化を計測することが可能となる。

(昭和50年3月27日 第4回 FRP シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) 小野木重治, "レオロジー要論", p. 76 (1960) 槇書店
- 2) Wilhelm, F., "Viscoelasticity", p. 54 (1967) Blaisdell Pub.
- 3) 吉田治夫, 材料, 19, 948 (1970).