ク リ ー プ き 裂 の 伝 ば*

(有限要素法による解析)

大 谷 隆 一** 中 村 貞 行***

Crack Propagation in Creep

(Finite Element Analysis)

by

Ryuichi OHTANI

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

and Sadayuki NAKAMURA

(R & D Division, Daido Steel Co., Ltd., Nagoya)

The crack propagation of a center notched plate specimen in tensile creep under the plane stress condition was simulated by means of a finite element method on the finite strain theory. In the analysis, the restriction force of a nodal point in the triangular elements at the crack tip was removed whenever the strain at the point reached a critical value (*i. e.*, the fracture strain). The distributions of creep stress and strain ahead of the propagating crack, the shape of the crack, and the relations between the crack propagation rate and the crack length, the crack tip stress, the net section stress or the elastic stress intensity factor were calculated. And the effects of the values of creep exponent, α , and fracture strain, ϵ^* , on the above quantities were clarified. The crack propagation rate was found to be proportional to the creep rate at the crack tip and inversely proportional to the slope of tangent of the creep strain distribution curve at the crack tip. The history of creep deformation made the slope of strain distribution ahead of the crack flat with the crack growth, resulting the acceleration of crack propagation rate especially in the region of relatively short crack length. The crack propagation rate changed approximately linearly against the net section stress, σ_{net} , or the stress intensity factor, K_I , in a log-log diagram. For a given value of σ_{net}/σ_g or K_I/σ_g , the crack propagation rate was in proportion to the creep rate under the gross stress, σ_g , and in inverse proportion to the fracture strain of the material.

(Received Nov. 14, 1975)

1 緒 言

われわれは、高温における金属材料の破壊の特性、破壊強度の定量的評価、破壊に及ぼす力学的および材料組織学的な諸因子、ならびにクリープ破壊と高温低サイクル疲労破壊の関係を調べるために、まず、クリープ破壊に関する研究を行なってきた。クリープ破壊の特性を定量的に把握するためには、クリープにおけるき裂の発生と伝ばに焦点を合わす必要がある。とくに、クリープき裂伝ば速度はクリープ破壊の特性を表わす強度値の代表と考えられるから、クリープき裂の伝ば則をまず力学的に検討することが重要な課題であ

る。いままですでに、クリープにおいても安定な主き裂の伝ば過程の認められることが実験によって確かめられている¹⁾⁻¹³⁾。しかし、とくに引張形(モードⅠ形)のクリープ破壊は、材料非線形性のみならず、幾何学的非線形性をも有する全面降伏下の時間依存型破壊であるため、き裂の力学および破壊の力学として解析的に厳密な検討を行なうことはほとんど不可能に近いのが現状である。そのため、理論的に力学の面からの研究はほとんどなされておらず、わずかに有限要素法によってき裂伝ばをシミュレーションした筆者らの研究¹⁴⁾、非線形き裂力学をクリープ破壊に応用した坂田らの研究¹⁵⁾および非線形弾性とクリープのアナロジを用いたモードⅢ形クリープき裂の伝ばに関する大路らの研究¹⁶⁾が最近報告されているにすぎず、この意味で、これらの

* 原稿受理 昭和50年11月14日

** 正 会 員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

*** 正 会 員 大同製鋼(株)研究開発本部 名古屋市南区大同町

研究は注目すべきものといえよう。

筆者らは以前に、2(1/4)Cr-1Mo 鋼の環状切欠き丸棒における引張クリープのき裂伝ばについて有限要素法を用いた数値計算によって解析を試みた。^{11,14)}今回は、より一般的なき裂伝ば特性を調べ、材料の非線形性のみならず、破壊の条件と関連して幾何学的非線形性の効果についても検討するために、有限変形理論に基づく有限要素法を用いてクリープき裂伝ばのシミュレーションを行ない、き裂伝ばの力学的説明を試みた。

2 有限要素法による解析方法

有限要素法によるクリープ解析の基礎は弾塑性解析の場合と同じである。¹⁷⁾ただ、クリープひずみ増分を初期ひずみとして取り扱う。^{18,19)}また、最近、有限変形増分理論による有限要素法が開発されているので、これをクリープの有限変形有限要素法に適用した。なお、この方法によって切欠き材のクリープ応力およびひずみの解析を行なった結果はすでに報告した。^{25,26)}解析の骨子は次のとおりである。

要素の剛性方程式を求めるための基礎式は、仮想仕事の原理、オイラーの応力とラグランジュの応力の関係、グリーンのひずみ増分、節点力増分と応力増分の関係を示す式であって、それぞれ

$$\int_S n_i dt^{ij} \delta u_j dS = \int_V dt^{ij} (\partial \delta u_j / \partial x^i) dV \quad (1)$$

$$dt^{ij} \cong d\sigma^{ij} - (d\rho/\rho) \sigma^{ij} - (\partial du^j / \partial x^i) \sigma^{ij} \quad (2)$$

$$d\epsilon^{ij} = (\partial du^j / \partial x^i + \partial du^i / \partial x^j) / 2 \quad (3)$$

$$dF_j^r = -T(L^r n_i / 2) dt^{ij} \quad (4)$$

である。ただし、 dt^{ij} はラグランジュの応力増分であり、(1)式の積分は時刻 t における面 S と体積 V について行なう。(2)式の $d\sigma^{ij}$ はオイラー座標系でみた応力の増分で、 ρ は物体の密度である。また、(4)式は節点力と表面力のつりあいの式 $\vec{F}_j \delta u_j^r = \int_S T_j \delta u_j dS$ より得られる。ここで、2次元三角形要素の r 節点の x^j 方向の節点力を $\vec{F}_j$ 、表面力を T_j と表わし、 L^r は節点 r に向かい合う三角形の一辺の長さ、 n_j^r はその辺の法線ベクトルの j 成分、 T は要素の厚さである。

これらの式から剛性方程式を導くと

$$dF + dF_0 = (k_0 + k_1 + k_2) du \quad (5)$$

を得る。ここで、 k_0 は微小変形理論における剛性行列に等しく、 k_1 は弾性において有限変形のために余分に導入された剛性行列であり、それぞれ

$$k_0 = VT^t B^t DBT \quad (6)$$

$$k_1 = \begin{cases} S_1, & \text{平面ひずみ } (d\epsilon^{33}=0) \\ S_1 + T^t B^t S_2 BT, & \text{平面応力 } (d\sigma^{33}=0) \end{cases} \quad (7)$$

ただし、

$$S_1 = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\Sigma & \Sigma \\ \Sigma & 0 & -\Sigma \\ -\Sigma & \Sigma & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^{12} & -\sigma^{11} \\ \sigma^{22} & -\sigma^{12} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = -\frac{\nu}{1-\nu} V \begin{bmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{11} & 0 \\ \sigma^{22} & \sigma^{22} & 0 \\ \sigma^{12} & \sigma^{12} & 0 \end{bmatrix}$$

また、 dF_0 および k_2 がクリープひずみ増分によって生じた等価節点力の増分および剛性行列であって、次式で与えられる。

$$dF_0 = \begin{cases} VT^t B^t D d\epsilon^c & \text{平面ひずみ} \\ VT^t B^t D d\epsilon^c & \text{平面応力} \end{cases} + V \frac{1-2\nu}{1-\nu} (d\epsilon_e^{11} + d\epsilon_e^{22}) T^t B^t \sigma \quad (9)$$

$$k_2 = VT^t B^t D \begin{pmatrix} 2(\epsilon_e^{12} + d\epsilon_e^{12}) \\ -2(\epsilon_e^{12} + d\epsilon_e^{12}) \\ 2(\epsilon_e^{22} + d\epsilon_e^{22} - \epsilon_e^{11} - d\epsilon_e^{11}) \end{pmatrix} G^t \quad (10)$$

ここで、クリープひずみ ϵ_e^{ij} は物体に固定されたものであるから、空間固定の座標系でみた全ひずみ増分 $d\epsilon^{ij}$ 、弾性ひずみ増分 $d\epsilon_e^{ij}$ およびクリープひずみ増分 dE_e^{ij} の間に

$$d\epsilon^{ij} = d\epsilon_e^{ij} + dE_e^{ij} \quad (11)$$

なる関係があるとすれば、 dE_e^{ij} の中には物体の回転によるクリープひずみの主軸の回転が含まれている。この回転角を $d\theta$ とすると

$$d\theta = G^t du \quad (12)$$

である。

以上の解析結果の妥当性を厳密に検討する簡単な解析解がないので、ここでは一軸引張クリープの有限変形に関する解と数値解とを比較した。Fig. 1 は計算に用いた要素分割であって、平板の対称な 1/4 部分を示している。計算に用いたクリープ則は

$$\dot{\epsilon}_e^* = B\sigma^* \alpha, \quad B, \alpha: \text{材料定数} \quad (13)$$

であって、 σ^* および $\dot{\epsilon}_e^*$ は von Mises の相当応力および相当クリープ速度である。計算結果を Fig. 2 に示す。図中の実線は、公称応力 σ_n 一定の場合に(13)式より得られるところの

Fig. 1. Finite elements of a plate used in the analysis of uniaxial tensile creep.

Fig. 2. The calculated result of tensile creep by FEM, and comparison with the analytical results based on finite and infinitesimal deformation theory.

$$\exp \epsilon_c = (1 - B\alpha\sigma_n^{\alpha}t)^{-1/\alpha} \quad (14)$$

なる関係式によって導かれた解であって、有限要素法による計算結果とよく一致している。

なお、本解析では、 Δt 時間中の応力は一定として反復計算を行っていないから、クリープひずみ増分が十分に小さくなるように Δt を選ばなければ誤差が累積するおそれがある。したがって本計算では、これまでに存在する弾性ひずみに対するクリープひずみ増分の比が 0.3 となる大きさのクリープひずみ増分を与えた。ただし、計算機の能力と計算誤差とのつりあいから、便宜的にクリープひずみが 0.01 だけ増すごとに剛性行列を組み変えるという方法によって計算時間の短縮をはかった。

有限要素法によってクリープき裂の伝ばをシミュレートする場合の有限要素モデルを Fig. 3 に示す。長さ $2l_0 = 0.30$ のスリット状初期き裂を中央に有する幅 $W_0 = 2.0$ の平板試験片の 1/4 部分を示しており、 y 軸方向に一定荷重が負荷されたときの平面応力状態のき裂伝ばについて計算している。き裂伝ばの方法は、

Fig. 3. Finite element idealization of a center-notched plate under tensile loading in plane stress. Numbers of the nodal point: 140, numbers of the element: 231.

き裂先端となる節点を含む x 軸上の三つの要素の相当クリープひずみ ϵ_c^* の平均値がある限界値 ϵ_c^{*f} に達したときにその節点の拘束をはずし、さらにその節点に作用していた節点力を逆方向に加えることによってき裂を次の節点まで進ませる、というものである。次項の計算結果に示すように、有限要素法におけるき裂先端は応力やひずみの特異点とはならず、き裂面上の要素の大きさに対応する曲率半径 ρ^* を有するき裂とみなすことができるから (Fig. 4), このような方法でき裂伝ばをシミュレートした場合のクリープ破壊の条件としては、き裂先端からある特定距離 ρ^* だけ内部に入った点のひずみが破壊ひずみ ϵ_c^{*f} に達したときにき裂がさらに ρ^* だけ進展する、という考え方に等しい。なお、ここで $\rho^* = 2\rho/W_0$ は ρ を初期板幅の半分 $W_0/2$ で除して無次元化しているが、この ρ は、下記に示すような連続体として幾何学的に無次元化できるような諸量とは性質を異にする材料特性値であって、試験片寸法にはよらないものであり、無次元化する意味はない。次報にも述べるが、 ρ の値は材料や試験条件によって変わり、力学的にその大きさを決定することは困難である。ここで、有限要素法においては $\rho^* \approx 0.025$ となっているが、要素の大きさを数倍の範囲で変えて ρ^* を変化させてもき裂前方の応力やクリープひずみ分布はほとんど変わらないこと、要素の大きさによるき裂伝ば速度の変化も無視できる程度であり、わずかの差は伝ば速度を定数倍するだけであること、また、き裂面上の要素の大きさが急変すると、その点で応力およびひずみの値が急変し、き裂伝ば速度にも不連続な段を生じること、などを確かめている。き裂伝ば速度に対する ρ の影響は比較的小さく、かつ、定常伝ば域ではき裂伝ば速度曲線 (Figs. 12~15) の位置をわずかに変える (平行移動させる) 効果があることは大路らのモードⅢ形クリープき裂伝ばの解析でも明らかにされており、この点で、本計算結果は ρ 以外のき裂伝ば速度に及ぼす力学的因子を検討する上で、 ρ の大きさ (要素の大きさ) は重要な意味をもたないと考えられる。なお、本計算では、Fig. 3 に示す同一大きさの要素が並んでいる最小断面上内でき裂を伝ばさせている。

Fig. 4. Explanation of notations.

Table I. Values of elastic and creep constants and fracture strain used in the finite element analysis of creep crack propagation.

B (1/hr) (kg/mm ²) ^{-α}	α	ϵ_f^*	E (kg/mm ²)	ν
1.00×10^{-8}	5.00	0.5	1.52×10^4	0.315
3.00×10^{-14}	8.89	0.03		

Note: $\epsilon_0^* = B\sigma^{\alpha}$

計算に用いた(13)式中の材料定数 B および α の値、破壊ひずみ ϵ_f^* 、たて弾性係数 E 、およびポアソン比 ν の値は Table I に示す。なお、以下に述べる x 、 y 軸の長さ、き裂先端からの距離 r 、き裂半長 l 、き裂先端における y 軸方向の開口変位 v 、試験片平行部長さ L_0 など (Fig. 4) について、すべて初期板幅の半分 $W_0/2$ で割って無次元化した量

$$x^* = 2x/W_0, \quad y^* = 2y/W_0, \quad r^* = 2r/W_0,$$

$$l^* = 2l/W_0, \quad v^* = 2v/W_0, \quad L_0^* = L_0/W_0 \quad (15)$$

を記号として用いている。また、負荷応力 (gross section stress) σ_g および正味断面公称応力 (net section stress) σ_{net} というのは

$$\sigma_g = P/W_0 T_0, \quad \sigma_{net} = P/2 \int_l^{W/2} T dx \quad (16)$$

である。ただし、 P は引張荷重 (一定)、 T_0 、 T は初期および変形後の板厚、 W は変形後の板幅である。

3 計算結果

3.1 き裂の形状およびき裂先端開口角

$\epsilon_f^* = 0.5$ の場合について、き裂伝ばに伴うき裂面の形状を示したものが Fig. 5 である。初期き裂 $l_0^* = 0.150$ は負荷後断面収縮のためにその長さが $l^* = 0.139$ ($\alpha = 5.00$ の場合) および 0.142 ($\alpha = 8.89$ の場合) と短くなり、開口した後、その先端の角度より鋭い角度を有する V 形のクリープき裂が発生し、その後き裂面はほぼ直線をなして伝ばする。き裂先端近くを詳細にみると、Fig. 6 に示すように、き裂先端の 1 三角形要素の一边が形づくるき裂面と x 軸とのなす角 (き裂開

Fig. 5. Change in profile of a growing crack under the stress of $\sigma_g = 18 \text{ kg/mm}^2$.

Fig. 6. Change in crack opening angle at the crack tip with crack length.

口角) θ は、き裂長さが増加するにつれてわずかに減少している。

3.2 き裂前方の相当応力

Fig. 7 は、き裂面上 (x^* 軸上) でのき裂前方の相当応力 σ^* の分布を示している。 α の値が大きい方がき裂先端近傍での応力値は小さく、応力こう配がゆるやかである。 $\alpha = 8.89$ 、 $\epsilon_f^* = 0.03$ の場合は $\alpha = 8.89$ 、 $\epsilon_f^* = 0.5$ の場合とほとんど変わらない。さらに、負荷応力 σ_g の大きさが異なっても、たて軸に σ^*/σ_g の値をとれば σ_g に依存しない分布形が得られること

Fig. 7. Equivalent stress distribution ahead of a growing crack.

Fig. 8. Change in equivalent stress at the crack tip with crack length.

Fig. 9. Change in creep stress concentration factor during crack propagation.

が認められている。

き裂先端における相当応力 $\sigma_{c.t.}^*$ の l^* による変化は, Fig. 8 に示すように,

$$\log(\sigma_{c.t.}^*/\sigma_g) = a_1 l^* + b_1 \quad (17)$$

なる関係がある。ここで, 定数 a_1 は ϵ_f^* に依存するが, α にはほとんど依存せず, b_1 は逆に ϵ_f^* によらないが α によって変わる。同図中には, 正味断面公称応力 σ_{net} および応力拡大係数 K_I^* とき裂長さ l^* との関係をも併示している。ただし, この σ_{net} は板厚および板幅の変形による減少を考慮せず,

$$\sigma_{net} = \sigma_g \frac{W_0}{W_0 - 2l} = \sigma_g \frac{1}{1 - l^*} \quad (18)$$

で計算した値であり, K_I^* は有限幅の板に対する応力拡大係数 $K = \sigma_g \sqrt{\pi l [\sec(\pi l / W_0)]^{1/2}}$ を無次元化した $K_I^* = \sigma_g \sqrt{l^* \sec(\pi l^* / 2)}$ (19)

である。

平面応力状態ではき裂先端で $\sigma_{c.t.}^* = (\sigma_y)_{c.t.}$ の一軸応力下にあるから, き裂先端の応力集中度として $K_{\sigma}^* = \sigma_{c.t.}^* / \sigma_{net}$ をとって l^* との関係を見ると, Fig. 9 に示すようにき裂が短いところでは l^* とともに増加し, その後一定ないしは減少する傾向が認められる。この K_{σ}^* の値は ϵ_f^* によってあまり変わらないが, α の値によって変わる。ところが $K_{\sigma}^* \alpha^{+1}$ の値は α の値にほとんど依存しない。これより, 伝ば中のき裂についても Neuber の関係式 $K_{\sigma}^* = K_I^{2/(\alpha+1)}$ がほぼ成立すると考えられる。

3・3 き裂前方の相当クリープひずみ

Fig. 10 は, Fig. 7 の応力分布に対する相当クリープひずみ ϵ_c^* の分布を示している。クリープひずみのこう配はき裂伝ばに伴って次第にゆるやかになる。

いま, き裂先端の節点とその次のき裂前方の節点における ϵ_c^* の差 $\Delta \epsilon_c^*$ を 2 節点間の距離 Δr^* で割った値 $(\Delta \epsilon_c^* / \Delta r^*)_{c.t.}$ をき裂先端における ϵ_c^* のこう配 $-(d\epsilon_c^* / dr^*)_{c.t.}$ とし, このき裂長さ l^* に対する変化を図示すると, Fig. 11 のようになり, ほぼ

$$\log(-(d\epsilon_c^* / dr^*)_{c.t.}) = -a_2 l^* + b_2 \quad (20)$$

なる関係が成り立つ。ただし, a_2 および b_2 は α および ϵ_f^* によって異なる値をとる。また, Fig. 6 と Fig. 11 とを比較すると, $\tan \theta$ と $-(d\epsilon_c^* / dr^*)_{c.t.}$ とはかなりよい比例関係がある。一方, $\tan \theta$ はき裂先

Fig. 10. Equivalent creep strain distribution ahead of a growing crack.

Fig. 11. Change in gradient of the equivalent creep strain at the crack tip with crack length.

端における y^* 軸方向の変位 (き裂先端開口変位) v^* の x^* 軸方向のこう配 $-(dv^* / dr^*)$ に等しいと考えれば,

$$-\tan \theta = dv^* / dr^* = \rho_0^* (d\epsilon_c^* / dr^*)_{c.t.} \quad (21)$$

となる。ここで, き裂先端の三角形要素にき裂が伝ばする直前の状態を取り出して, き裂が連続的に伝ばしていると考えると, θ , v^* , $(d\epsilon_c^* / dr^*)_{c.t.}$ はき裂長さの関数であり, ρ_0^* はき裂長さや時間に無関係な定数である。

3・4 き裂伝ば速度とき裂長さの関係

以下に述べるき裂伝ば速度と力学的諸量の関係については, き裂伝ば速度として dl^* / dt を $B \sigma_g^\alpha / \epsilon_f^*$ で除した無次元化き裂伝ば速度をとる。ここで, $B \sigma_g^\alpha / \epsilon_f^*$ は, “ σ_g における平滑材のクリープ速度 / 破壊ひずみ” であり, “ σ_g における平滑材の平均破壊速度” である。このようにすれば $(dl^* / dt) / (B \sigma_g^\alpha / \epsilon_f^*)$ は少なくとも負荷応力 σ_g の大小によらない。

Fig. 12 は $(dl^* / dt) / (B \sigma_g^\alpha / \epsilon_f^*)$ と l^* との関係を示す。これより次式の関係が成り立つ。

$$\frac{dl^*}{dt} \frac{B \sigma_g^\alpha}{\epsilon_f^*} = A_1 e^{\alpha_1 l^*} \quad (22)$$

ただし, A_1 および α_1 は α および ϵ_f^* に依存する定

Fig. 12. Non-dimensional crack propagation rate as a function of non-dimensional crack length.

数である。

3・5 き裂伝ば速度とき裂先端の相当応力の関係

Fig. 8 に示したように、き裂先端での相当応力 $\sigma_{c.t.}^*$ はき裂長さ l^* と (7) 式の関係にあるから、これと (2) 式とから l^* を消去すれば、

$$\frac{dl^*}{dt} \frac{B\sigma_g^\alpha}{\epsilon_f} = A_2 \left(\frac{\sigma_{c.t.}^*}{\sigma_g} \right)^{\alpha_2} \quad (23)$$

となる。ただし、 $A_2 = A_1 / e^{(b_1/a_1)\alpha_1}$ 、 $\alpha_2 = \alpha_1 / 2.3a_1$ である。事実、(23) 式の関係が成立することは直線計算によって認められている。それを Fig. 13 に示す。この図より、直線のこう配を表わす α_2 の値はクリープ指数 α の値より少し大きいこと、および直線の位置を表わす係数 A_2 の値は α によって変わるが、 ϵ_f にほとんど依存しないことがわかる。

Fig. 13. Non-dimensional crack propagation rate as a function of equivalent stress at the crack tip.

3・6 き裂伝ば速度と正味断面公称応力の関係

Fig. 14 に $(dl^*/dt) / (B\sigma_g^\alpha / \epsilon_f)$ と σ_{net} / σ_g の関係を示す。いずれの場合も上に凸な曲線となっている。これは、Fig. 9 に示した応力集中度 $K_\sigma^* = \sigma_{c.t.}^* / \sigma_{net}$ を用いて (23) 式を書き直すと

$$\frac{dl^*}{dt} \frac{B\sigma_g^\alpha}{\epsilon_f} = A_3 \left(\frac{\sigma_{net}}{\sigma_g} \right)^{\alpha_2} \quad (24)$$

となることから、係数 $A_3 = A_2 K_\sigma^{*\alpha_2}$ の値が K_σ^* の l^* による変化に対応して変化するためであると説明できる。したがって、 α_2 の値は α より少し大きく目であるにもかかわらず、Fig. 14 では曲線がほぼ α の値に等

Fig. 14. Non-dimensional crack propagation rate as a function of net section stress.

しいこう配の直線に近い。

なお、(18) 式によって計算した σ_{net} で整理すると、Fig. 14 中の破線で示す関係が得られる。当然のことながら、 $\epsilon_f = 0.03$ の場合にはほとんど差がないが、 $\epsilon_f = 0.5$ の場合には全体として曲線が左側に移行し、傾きが急となる。

3・7 き裂伝ば速度と応力拡大係数の関係

(19) 式の無次元化した応力拡大係数 K_I^* / σ_g を用いてき裂伝ば速度を表示すると、Fig. 15 のようになる。3本の曲線の相対関係は(18)式の σ_{net} / σ_g で整理した結果と同様であるが、曲線の形は下に凸となっている。このことは、Fig. 8 の $K_I^* / \sigma_g - l^*$ 曲線と $\sigma_{net} / \sigma_g - l^*$ 曲線の関係からもうなづけることである。

Fig. 15. Non-dimensional crack propagation rate as a function of elastic stress intensity factor.

4 考 察

き裂先端から前方 (x^* 軸方向) に向かって r^* 軸をとり、それに沿って相当クリープひずみの分布を $\epsilon_c^*(r^*, t)$ と表わすと、

$$d\epsilon_c^* = (\partial \epsilon_c^* / \partial r^*) dr^* + (\partial \epsilon_c^* / \partial t) dt \quad (25)$$

ここで、クリープひずみ ϵ_c^* の値が ϵ_f^* に達したときに破壊が生ずるとすると、き裂先端から内部にある特性値 ρ^* だけ入った点 ($r^* = \rho^*$) では常に $\epsilon_c^* = \epsilon_f^*$ であるから、(25) 式より

$$dr^* / dt = (\partial \epsilon_c^* / \partial t)_{r^* = \rho^*} / -(\partial \epsilon_c^* / \partial r^*)_{r^* = \rho^*} \quad (26)$$

を得る。すなわち、破壊条件として ϵ_f^* 一定の破壊

ひずみを設定すれば, き裂伝ば速度は

$$\frac{dl^*}{dt} = \left(\frac{\partial \varepsilon_c^*}{\partial t} \right)_{c,t.} / - \left(\frac{\partial \varepsilon_c^*}{\partial r^*} \right)_{c,t.} \quad (27)$$

と表わされる。これより, き裂伝ば速度はき裂先端 ($r^* = \rho^*$ の点) におけるクリープ速度 $(\dot{\varepsilon}_c^*)_{c,t.} = B\sigma_g^{\alpha} \cdot \rho^*$ に比例し, クリープひずみのこう配 $-(\partial \varepsilon_c^* / \partial r^*)_{c,t.}$ に反比例することになる。

(17) 式の関係を用いると

$$\begin{aligned} \log(\partial \varepsilon_c^* / \partial t)_{c,t.} &= \log B\sigma_g^{\alpha} + \log(\sigma_{c,t.}^* / \sigma_g)^{\alpha} \\ &= \log B\sigma_g^{\alpha} + \alpha(l^* + b_1) \end{aligned} \quad (28)$$

また(20)式を書き直して

$$\log -(\partial \varepsilon_c^* / \partial r^*)_{c,t.} = -a_2 l^* + \log \varepsilon_f^* - b_3 \quad (29)$$

これら 2 式を(27)式に代入すれば

$$\log \left(\frac{dl^*}{dt} \frac{B\sigma_g^{\alpha}}{\varepsilon_f^*} \right) = (\alpha a_1 + a_2) l^* + (\alpha b_1 + b_3) \quad (30)$$

となる。これは(23)式と等しい。さらに, (17) 式の関係を(30)式に用いると

$$\frac{dl^*}{dt} \frac{B\sigma_g^{\alpha}}{\varepsilon_f^*} = 10^{-a_2 b_1 / a_1 + b_3} \left(\frac{\sigma_{c,t.}^*}{\sigma_g} \right)^{\alpha + a_2 / a_1} \quad (31)$$

となる。これは(23)式に等しい。(23)式の α_2 の値が α の値より少し大きく目となったのは, (31)式右辺の指数が α より $a_2/a_1 (>0)$ だけ大きいためであって, Fig. 11 に示したように, き裂長さが増加するにつれてき裂先端近傍のクリープひずみ分布のこう配がゆるやかになっていく ($a_2 > 0$) ためである。これは, 初期き裂の成長までとその後のき裂伝ば過程にき裂前方に蓄積されたクリープひずみが以後のき裂伝ば速度に影響を及ぼすこと (変形履歴の影響があること) を示すものである。上記の有限要素法による計算の結果では, ほぼ全き裂伝ば過程に履歴の影響が現われている。Figs. 8, 11 および 13 よりわかることは, α および ε_f^* の値の小さい方が a_2/a_1 の値は大きく, したがってき裂伝ば速度に及ぼす履歴の影響が大きいといえる。この他, 初期切欠きの形状や応力状態も履歴に影響する。本計算によってはこのような履歴の効果を解析的に表示することは困難であった。この履歴の効果に関しては大路らの研究が報告されているが³⁾¹⁶⁾, 筆者らも現在検討中である。

いま, き裂前方のクリープひずみ分布が r^* のみの関数で表わされ, (27)式右辺の分母が定数となる場合を考える。Fig. 7 からわかることは, 応力に関してはき裂先端近くでき裂長さによらず, r^* のみの関数で表わされる。ただし

$$\sigma^* = K_p / r^{*1/(\alpha+1)}, \quad K_p: \text{塑性応力拡大係数} \quad (32)$$

のような形よりむしろ

$$\ln(\sigma^* / \sigma_{c,t.}^*)^{\alpha+1} = -a_3(r^* - \rho^*), \quad a_3: \text{定数} \quad (33)$$

なる形の式で表示する方がよかった。(33)式を用い, き

裂前方のクリープひずみが $\varepsilon_c^* = B\sigma^{\alpha} t$ のようにその時刻の応力分布だけで決まるとすると, (27)式は

$$\begin{aligned} \frac{dl^*}{dt} &= B\sigma_g^{\alpha} \left(\frac{\sigma_{c,t.}^*}{\sigma_g} \right)^{\alpha} / -\alpha \varepsilon_f^* \left(\frac{\partial \ln \sigma^*}{\partial r^*} \right)_{c,t.} \\ &= \frac{B\sigma_g^{\alpha}}{\varepsilon_f^*} \cdot \frac{1}{a_3} \frac{\alpha+1}{\alpha} \left(\frac{\sigma_{c,t.}^*}{\sigma_g} \right)^{\alpha} \end{aligned} \quad (34)$$

となる。この式は(31)式において $a_2=0$ とおいた式と対応する。また, 非線形弾性 $\varepsilon^* = B\sigma^{\alpha}$ の場合のき裂先端近傍における応力(32)式およびひずみの解を用いて(27)式を解いた場合も(34)式と同形となる。

このように, き裂前方のひずみ分布がき裂長さによらずに一定の形となり, 履歴の効果が定常状態となれば, クリープき裂伝ば速度は(27)式の分子, すなわちき裂先端の応力場の強度だけで決定される。したがって, dl^*/dt を $B\sigma_g^{\alpha} / \varepsilon_f^*$ で除して $\sigma_{c,t.}^* / \sigma_g$ との関係を両対数グラフに示すと, 応力 σ_g の大きさによらずに 1 本の直線で表わされ, そのこう配はクリープ指数 α の値によって決まる。直線の位置は(34)式から推測されるように, α の他に材料特性値 ρ^* によって左右されるが, 同一材料, 同一温度下ではほぼ一定であると考えられる。また, クリープ破壊の条件として破断延性 $\varepsilon_f^* =$ 一定が妥当であるなら, クリープき裂伝ば速度は一定の $\sigma_{c,t.}^* / \sigma_g$ に対してクリープ速度 $B\sigma_g^{\alpha}$ に比例し, 破断延性 ε_f^* に反比例することがわかる。さらに, き裂伝ば速度は α の値, すなわち材料非線形性の影響を大きく受けるのに対して, 幾何学的非線形性の影響はほとんどない。Fig. 13 において $\varepsilon_f^* = 0.5$ と 0.03 (ともに $\alpha = 8.89$) の両直線の差は大部分履歴の影響によるものであって, この他にわずかに幾何学的非線形性の効果である, 板幅減少に基づくき裂長さの減少 (収縮) の相違に起因する差が含まれているが, これは材料非線形性の効果に比べれば無視できる。なお, このような場合には(27)式は

$$\tan \theta = \rho_0^* a_3 \frac{\alpha}{\alpha+1} \varepsilon_f^* \quad (35)$$

となって, き裂先端の開口角 θ は一定となり, Fig. 5 のき裂面は直線となる。

き裂伝ば速度と巨視的な力学的諸量の一つである正味断面公称応力 σ_{net} との関係は, Fig. 14 に示したように, 両対数グラフ上で少しわん曲した曲線となるが, き裂がある程度長くなればほぼ直線に近いとみなすことができ, そのこう配は α の値にほぼ等しい。このことは, き裂先端の応力 $\sigma_{c,t.}^*$ が σ_{net} とほぼ比例関係にあることを示している。事実, Figs. 13 と 14 の線図の位置の相対関係は類似している。また, 今まで報告されている実験結果の中にも σ_{net} による整理が有効であることを示しているものが多い。^{1)~3)}

ところが, クリープによるき裂面上の断面積の減少

を考慮せず、(18)式による σ_{net} をとると、Fig. 14 中の破線のように ϵ_f^* の大きい場合ほど曲線の位置が左方にずれ、傾きも急となる。その結果、Fig. 13 の直線の位置との対応関係がなくなる。これは Fig. 15 の弾性応力拡大係数 K_I^* についても同様である。このような幾何学的非線形性の影響は、破壊ひずみ ϵ_f^* の他に板厚（応力・ひずみ状態）によっても異なり、これを定量的に評価することはかなり困難である。ただ、Fig. 8 の $\sigma_{c.t.}^*/\sigma_g$ の計算値と σ_{net}/σ_g および K_I^*/σ_g の値を比較すると、 α の値にかかわらず、 ϵ_f^* の小さい場合には $\sigma_{c.t.}^*/\sigma_g$ と σ_{net}/σ_g の l^* による変化がよい対応を示し、結果として

$$\frac{dl^*}{dt} \left/ \frac{B\sigma_g^\alpha}{\epsilon_f^*} \right. = A_4 \left(\frac{\sigma_{net}}{\sigma_g} \right)^\alpha \quad (36)$$

がよい近似を与えるといえるようである。一方、 ϵ_f^* が大きい場合にはむしろ $\sigma_{c.t.}^*/\sigma_g$ と K_I^*/σ_g の l^* による変化がよい対応を示しており、この場合には

$$\frac{dl^*}{dt} \left/ \frac{B\sigma_g^\alpha}{\epsilon_f^*} \right. = A_5 \left(\frac{K_I^*}{\sigma_g} \right)^\alpha \quad (37)$$

なる関係式がよい近似を与えるようである。

5 結 言

き裂先端における von Mises の相当クリープひずみ ϵ_e^* がある限界値 ϵ_f^* に達した際に破壊するとして、中央き裂を有する平板の引張クリープにおける平面応力状態のき裂伝ば挙動を有限変形理論に基づく有限要素法によって解析した。

(1) き裂伝ば速度 dl^*/dt はき裂先端 ($r^*=\rho^*$) における相当クリープひずみ速度 ($\dot{\epsilon}_e^*$)_{c.t.} に比例し、相当クリープひずみの分布のこう配 $-(\partial\epsilon_e^*/\partial r^*)_{c.t.}$ に反比例する。前者はき裂先端の応力場の強度を、後者は変形履歴の効果を表わす。

(2) 変形履歴の影響が一定となり、き裂前方のひずみ分布が定常となれば、き裂伝ば速度はき裂先端の応力 $\sigma_{c.t.}^*$ の α 乗によって表わされる。 α はクリープの応力指数である。また、 $\sigma_{c.t.}^*/\sigma_g$ の同一値に対して、き裂伝ば速度はクリープ速度 $B\sigma_g^\alpha$ に比例し、破断延性 ϵ_f^* に反比例する。このように、材料非線形性の影響が大きい。

(3) り履歴の影響はとくに切欠き底近くのき裂伝ばに対して重要であるが、本計算結果では α および ϵ_f^* の値の小さい場合の方がき裂伝ば速度に及ぼす履歴の効果が大きいことがわかった。

(4) クリープによる板幅および板厚の変化を考慮して正味断面公称応力 σ_{net} を計算すれば、 σ_{net} はき裂先端の応力場の強度 $\sigma_{c.t.}^*$ を表わす応力値としてかなり有効である。しかし、断面積減少を考慮しない場合の σ_{net} をとると、平面応力で ϵ_f^* のかなり大きい場合には $\sigma_{c.t.}^*$ との対応関係がわるい。

(5) ϵ_f^* が大きい場合には、むしろ弾性応力拡大係数 K_I^* と $\sigma_{c.t.}^*$ との対応がよく、き裂伝ば速度は近似的に K_I^* に比例する。

最後に、本研究の実施に対して多大のご指導を賜った京都大学工学部 平 修二教授に深く感謝する。なお、計算には京都大学大型計算機センターの FAC-OM 230-60 を使用した。

(昭和49年3月20日 機械学会関西支部第49期定時総会；昭和49年6月6日 機械学会第7回シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) 大谷隆一, 土井健志, 中村貞行, 新田明人, 材料, **22**, 291 (1973).
- 2) Taira, S., R. Ohtani, and A. Nitta, Proc. 1973 Symp. on Mech. Behav. of Mat., Soc. Mat. Sci., Japan, 211 (1974).
- 3) 大路清嗣, 小倉敬二, 久保司郎, 機構論集, No. 740-8, 95 (1974).
- 4) 大路清嗣, 小倉敬二, 康 祥隆, 機論集, **40**, 1279 (1974).
- 5) 坂田 勝, I. Finnie, 機論集, **41**, 1089 (1975).
- 6) 川崎 正, 堀口正一, 機論集, No. 740-2, 219 (1974).
- 7) 小寺沢良一, 岩田泰男, 材料, **24**, 1114 ; 1121 (1975).
- 8) 佐々木良一, 幡谷文男, 志賀正男, 高橋慎太郎, 第13回高温強度シンポジウム前刷集, 72 (1975) 日本材料学会
- 6) Harrison, C.B., and G. N. Sandor, Engng. Frac. Mech., **3**, 403 (1971).
- 10) James, J.A., Int. J. Frac. Mech., **8**, 347 (1972).
- 11) Sivers, M.J., and A.T. Price, Int. J. Frac., **9**, 199 (1973).
- 12) Kenyon, J. L., et al., Int. Conf. on Creep and Fatigue in Elevated Temp. Appl., Philadelphia, ASME-ASTM-IME, Paper no. 156-1 (1973).
- 13) Ellison, E.G., and D. Walton, *ibid.*, Paper no. 173-1.
- 14) Taira, S., and R. Ohtani, *ibid.*, Paper no. 213-1.
- 15) 坂田 勝, 機誌, **78**, 389 (1975).
- 16) 大路清嗣, 小倉敬二, 久保司郎, 材料, **23**, 202 (1974).
- 17) Zienkiewicz, O.C., and Y.K. Cheung, "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics" (1967) McGraw-Hill
- 18) Greenbaum, G.A., and M.F. Rubinstein, Nuclear Engng. Design, **7**, 379 (1968).
- 19) 大谷隆一, 伊藤 隆, 材料, **20**, 864 (1971).
- 20) 北川 浩, 瀬口靖幸, 富田佳宏, 機論集, **38**, 479 (1972).
- 21) 北川 浩, 富田佳宏, 塑性と加工, **14**, 788 (1973).
- 22) 山田嘉昭, 生産研究, **22**, 6 (1970).
- 23) Yamada, Y., et al., Int. J. Mech. Sci., **10**, 343 (1968).
- 24) 宮本 博, 白鳥正樹, 三好俊郎, 機誌, **75**, 1109 (1972).
- 25) 大谷隆一, 材料, **25**, 230 (1976).
- 26) 大谷隆一, 新田明人, 中村貞行, 奥野道雄, 材料, **25**, 256 (1976).
- 27) Hoff, N.J., J. Appl. Mech., **20**, 105 (1953).
- 28) 大路清嗣, 小倉敬二, 大久保好二, 滝井仁志, 機論集, **40**, 2505 (1974).
- 29) Neuber, H., Trans. ASME, Ser. D, **83**, 544 (1961).
- 30) Rice, J.R., and G.F. Rosengren, J. Mech. Phys. Solids, **16**, 1 (1968).
- 31) Hutchinson, J.W., *ibid.*, **16**, 13, 337 (1968).