等方加工硬化をもつ Prandtl-Reuss 塑性物質の負荷と除荷*

徳 岡 辰 雄**

Loading and Unloading of Prandtl-Reuss Plastic Material with Isotropic Work-Hardening

by

Tatsuo TOKUOKA

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

Here the loading and unloading behaviors are investigated theoretically for the Prandtl-Reuss plastic material with the isotropic work-hardening, which was derived in the preceding paper. The constitutive equations consist of the mechanical equation of rate type and the evolutional equation of a scalar internal state variable α . The steady extension is analyzed and the stress-logarithmic strain relations are formulated, where α plays as a parameter. The steady extension in the uniaxial stress is also analyzed for the incompressible material. The material function of the type $M(\alpha) = M_0(1 + \alpha\alpha)^n$ is adopted, where M_0 , a and n are the material constants. The function specifies the yield phenomenon and the work-hardening. The constants a and n represent, respectively, the magnitude of the work-hardening and the variation of it. The results of the numerical calculations are depicted.

(Received Feb. 23, 1976)

1 緒 言

塑性物質の力学的挙動の中で降伏と流動とともに、典型的な特性として、加工硬化と繰返し負荷での応答をあげることができる。塑性の現象は、いうまでもなく、複雑であり解析に乗りにくいきらいがある。その反面、機械部材の塑性加工や機械部品の塑性変形など、工業上応用上、きわめて重要な現象である。

現在まで数多くの塑性理論が提唱されてきたが、加工硬化と除荷の現象を説明しうる理論は、それほど多くない。ひずみの微小増分に対する応力の微小増分の関係を与える、いわゆる増分理論では、塑性の巨視的尺度での挙動を説明するには困難を伴うことが多い。増分理論¹⁾以外の有用な塑性論としては、Kratochvil と Dillon, Valanis, Mróz, Tokuoka²⁾ をあげることができる。これらはすべて、内部状態変数を導入した理論である。Kratochvil と Dillon は加工硬化および負荷と除荷の現象にある種の定性的説明を与えた。Valanis は積分型の構成式を用いて定量的説明を与えている。Mróz は加工硬化の複合模型を採用して、塑性現象の説明を試みている。Tokuoka は歪弾性の概念から出

発して、内部状態変数の入った速度型構成式を提唱し、これらの現象に定量的説明を与えている。⁵⁾

筆者は本報の第1報で、Prandtl-Reuss 型の塑性物質の構成式を求めた。その際、歪弾性から入らずに、従来から親しまれてきた von Mises の塑性ポテンシャルから出発した。そこで、ポテンシャルは応力と内部状態変数の関数であると定義した。数学的表現を簡単化するために4個の制限を設けた。(1)線型弾性、(2)圧力に無関係な塑性、(3)一般化 Bauschinger 効果がない、そして(4)構成式および発展式は応力について2次、の制限である。これより、応力速度とストレッチングの線型関係を与える力学的構成式と、内部状態変数の瞬間的变化速度を与える発展式をえた。

本報では第1報で導出した構成式を用いて、定常伸長変形について解析し、加工硬化と除荷での挙動を吟味する。さらに、非圧縮塑性物質について単軸応力の定常伸長変形を解析し、3個の物質定数に幾つかの数値を与えて、その挙動を調べよう。

2 基 礎 式

すべての連続体がいつもみたさなければならない関係式として、質量、線型運動量および角運動量の保存則がある。質量の保存則は、次の“連続式”

$$\dot{\rho} + \rho \sum_{m=1}^3 D_{mm} = 0 \quad (1)$$

* 本報を「等方加工硬化をもつ Prandtl-Reuss 塑性物質 (第2報)」(Prandtl-Reuss Plastic Material with Isotropic Work-Hardening, II) とする。

原稿受理 昭和51年2月23日

** 正 会 員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

で表わされる。^{*1}そして、線型および角運動量の保存則は、それぞれ、“運動式”

$$\sum_{m=1}^3 \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i, \quad (2)$$

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (3)$$

で表わされる。ここで ρ は質量密度、 T_{ij} は Cauchy 応力テンソル、 b_i は単位質量あたりの物体力、 v_i は物質粒子の速度ベクトルであり、

$$D_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

は速度こう配の対称部分であり、ストレッチングと呼ばれ、純粋な変形速度を表わす。なお、速度こう配の反対称部分

$$W_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

はスピン・テンソルと呼ばれ、剛体としての角速度を表わす。ここで、添字 i, j は座標成分を表わし、1, 2, 3 をとる。

連続式(1)に現われる $\sum_{m=1}^3 D_{mm}$ は単位体積あたりの体積の変化速度を表わす。もし、物体が“等積変形”を行なっていると

$$\sum_{m=1}^3 D_{mm} = 0 \quad (6)$$

となり、連続式は

$$\rho = \text{一定} \quad (7)$$

でみたされる。

もし、物体力が

$$b_i = \dot{v}_i \quad (8)$$

のように作用している場合には、運動式(2)は

$$\sum_{m=1}^3 \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m} = 0 \quad (9)$$

となる。この関係は応力が空間的に均一な場合には恒等的にみたされる。また、加速度が零か、または充分に小さくて無視できる場合には、運動式は

$$b_i = 0 \quad (10)$$

で(9)式となる。角運動量の保存則を表わす運動式(3)は、対称な応力でみたされる。

前報で“等方加工硬化をもつ Prandtl-Reuss 塑性物質の構成式”を定義した。前報の(73), (74), (75)より

$$\dot{p} = - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \sum_{m=1}^3 D_{mm} \quad w^* \geq 0, \quad (11)$$

$$\dot{T}_{ij}^* = 2\mu D_{ij}^* - \frac{2\mu}{k(\alpha)} w^* T_{ij}^* \quad w^* \geq 0, \quad (12a)$$

$$\dot{T}_{ij}^* = 2\mu D_{ij}^* \quad w^* < 0, \quad (12b)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{w^*}{2\mu} \quad w^* \geq 0, \quad (13a)$$

$$\dot{\alpha} = 0 \quad w^* < 0 \quad (13b)$$

である。ここで、 p は圧力、 T_{ij}^* は偏差応力テンソル、 D_{ij}^* は偏差ストレッチングであり

$$T_{ij} = T_{ij}^* - p \delta_{ij}, \quad p = - \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 T_{mm} \quad (14)$$

$$D_{ij} = D_{ij}^* + \frac{1}{3} \left(\sum_{m=1}^3 D_{mm} \right) \delta_{ij} \quad (15)$$

であり、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

$$\dot{T}_{ij}^* \equiv \dot{T}_{ij}^* - \sum_{m=1}^3 W_{im} T_{mj}^* + \sum_{m=1}^3 T_{im}^* W_{mj} \quad (16)$$

は偏差応力の共回転変化速度を表わす。

$$w^* \equiv \sum_{m,n=1}^3 T_{mn}^* D_{nm} = \sum_{m,n=1}^3 T_{mn}^* D_{nm}^* \quad (17)$$

は偏差応力パワであり、 T_{ij}^* が単位体積、単位時間あたりになす仕事を表わす。 w^* が正、零、負の値をとるとき、それぞれ、負荷、中立、除荷の状態であると定める。スカラー α は内部状態変数であり、 $k(\alpha)$ は α の物質関数である。また、 λ, μ は Lamé の定数である。

構成式(11)および(12)は降伏条件と流動則を含有していることを前報で証明した。前報の(93), (97)式によって、それらはそれぞれ

$$\sum_{m,n=1}^3 T_{mn}^* T_{nm}^* = k(\alpha), \quad (18)$$

$$D_{ij} = \phi T_{ij}^* \quad (19)$$

である。ここでは ϕ 比例係数である。

数値計算を行なう際に便利のように、構成式の無次元化を行なう。無次元化応力を

$$q \equiv \frac{p}{2\mu}, \quad S_{ij}^* \equiv \frac{T_{ij}^*}{2\mu} \quad (20)$$

とする。ある単位時間 Δt を選び、それで時間 t を除して無次元化時間

$$\tau \equiv \frac{t}{\Delta t} \quad (21)$$

をえる。無次元化ストレッチング、スピン・テンソルを、それぞれ

$$D_{ij}' \equiv D_{ij} \Delta t, \quad W_{ij}' \equiv W_{ij} \Delta t \quad (22)$$

とする。

$$w'^* \equiv \sum_{m,n=1}^3 S_{mn}^* D_{nm}' = \sum_{m,n=1}^3 S_{mn}^* D_{nm}'^* \quad (23)$$

は無次元化偏差応力パワであり

$$\dot{S}_{ij}^* \equiv \frac{dS_{ij}^*}{d\tau} - \sum_{m=1}^3 W_{im}' S_{mj}^* + \sum_{m=1}^3 S_{im}^* W_{mj}' \quad (24)$$

は無次元共回転偏差応力速度である。内部状態変数 α はすでに無次元化されているものとする。もし、そうでなければ、 α の元をもつ単位量を取り、それで α を除したものを改めて α とすればよい。無次元化物質関数を

$$M(\alpha) \equiv \frac{\sqrt{k(\alpha)}}{2\mu} \quad (25)$$

で定義する。

*1 本報では前報で使った和の規約を採用しない。

以上より、無次元化構成式は次のようになる。

$$\dot{q} = -\left(\frac{\lambda}{2\mu} + \frac{1}{3}\right) \sum_{m=1}^3 D_{mm}' \quad w'^* \geq 0, \quad (26)$$

$$\dot{S}_{ij}^* = D_{ij}^* - \frac{1}{M(\alpha)^2} w'^* S_{ij}^* \quad w'^* \geq 0, \quad (27a)$$

$$\dot{S}_{ij}^* = D_{ij}^* \quad w'^* < 0, \quad (27b)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = w'^* \quad w'^* \geq 0, \quad (28a)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = 0 \quad w'^* < 0, \quad (28b)$$

降伏条件および流動則の無次元化表示は、それぞれ、

$$\sum_{m,n=1}^3 S_{mn}^* S_{nn}^* = M(\alpha)^2 \quad (29)$$

$$D_{ij}' = \psi' S_{ij}^* \quad (30)$$

と与えられる。ここで $\psi' \equiv 2\mu \Delta t \psi$ である。

これまで明確にこたわっていないが、(11)~(13)式およびその無次元化表示(26)~(28)は“圧縮性塑性物質”の構成式である。前報の(9)式で示したように、塑性流動についての変形は常に等積変形である。しかし弾性変形は一般にそうではない。この場合を圧縮性塑性物質という。弾性変形についても非圧縮である場合は全体の変形もそうであり、この物質を“非圧縮性塑性物質”という。この物質では一般の非圧縮性物質の場合と同様に、圧力は不定になり、(11)および(26)式を構成式の枠組から除去しなければならない。よって構成式は、(12)、(13)または(27)、(28)となる。不定な圧力は境界条件から定まる。

3 定常伸長

本節では、構成式(11)~(13)または(26)~(28)をもつ圧縮性塑性物質の定常伸長の挙動を調べよう。伸長変形では回転は起こらず、物質粒子の速度 v_i はその座標に比例する。比例係数は位置に無関係で時間のみの関数である。

$$v_i = D_i(t) x_i. \quad (31)$$

それゆえ、(4)、(5)式で定義したストレッチングとスピン・テンソルは

$$D_{ii} \equiv D_i, \quad D_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad (32)$$

$$W_{ij} = 0 \quad (33)$$

となる。定常伸長変形では、ストレッチングが時間に無関係で一定になる。

ここでとくに、等積変形であると仮定する。関係(6)より

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0 \quad (34)$$

が成り立つ。連続式は条件(7)でみたされる。

(31)式より

$$\dot{v}_i = (D_i^2 + \dot{D}_i) x_i \quad (35)$$

となり、一般に加速度は零でない。この際、物体力が加速度(35)と(8)式をみたすように作用していると仮定すると運動式(2)は(9)となる。通常の場合には、このよう

な物体力は存在しない。物体力が零の場合でも(9)式が近似的に成り立つことを示そう。(16)、(17)式と D_{ij} 、 W_{ij} が速度のこう配であることを考慮すると、構成式(11)~(13)に現われるすべての項は時間の -1 乗の元をもつ。それゆえ、時間尺度をどのように変更しようと構成式は不変である。これは無次元化構成式(26)~(28)からも明らかである。関係(21)より時間を t から τ に変更すると

$$\dot{v}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left(D_i'^2 + \frac{dD_i'}{d\tau} \right) x_i \quad (36)$$

となる。ここで、関係(22)、(32)より

$$D_i'(\tau) = D_i(t) \Delta t \quad (37)$$

である。時間尺度 Δt を大きくすると加速度は小さくなる。すなわち、変形速度を小さくすれば加速度も小さくなる。通常の塑性変形では変形速度は小さいと考えられる。これより、物体力零で近似的に運動式は(9)となる。(9)式は、もし応力が空間的に均一であれば満足される。以後このように考える。

以上の考察より、一定密度および均一対称応力という条件のもとで連続式と運動式が満足されることがわかる。

(31)、(32)、(37)式より、積分を行なうと

$$x_i = X_i \exp \left(\int_0^\tau D_i'(\xi) d\xi \right) \quad (38)$$

となる。ここで $\tau=0$ で $x_i = X_i$ とした。変形こう配の対数を“対数ひずみ”

$$E_i(\tau) = \log \frac{dx_i}{dX_i} = \int_0^\tau D_i'(\xi) d\xi \quad (39)$$

と名付ける。

さて、問題は初期条件

$$S_{ij} = 0, \quad \alpha = 0 \quad (40)$$

のもとで構成式(26)~(28)を解くことである。等積変形の条件(34)より

$$D_{ij}' = D_{ij}' \quad (41)$$

となり、(26)式は

$$\dot{q} = 0 \quad (42)$$

となる。構成式(27)のせん断成分は(32)式より

$$\frac{dS_{ij}^*}{d\tau} = -\frac{w'^*}{M(\alpha)^2} S_{ij}^* \quad (i \neq j) \quad w'^* \geq 0, \quad (43a)$$

$$\frac{dS_{ij}^*}{d\tau} = 0 \quad (i \neq j) \quad w'^* < 0 \quad (43b)$$

となる。常微分方程式(42)、(43)を初期条件(40)のもとで積分する。解の一意性と、応力の連続性より

$$q \equiv 0, \quad S_{ij}^* \equiv 0 \quad (i \neq j) \quad (44)$$

であることがわかる。よって

$$S_{ij}^* = S_{ij} = S_i \delta_{ij} \quad (45)$$

$$w'^* = S_1 D_1' + S_2 D_2' + S_3 D_3' \equiv w' \quad (46)$$

となる。

構成式(27)、(28)は

$$\frac{dS_i}{d\tau} = D_i' - \frac{1}{M(\alpha)^2} w' S_i \quad w' \geq 0, \quad (47a)$$

$$\frac{dS_i}{d\tau} = D_i' \quad w' < 0, \quad (47b)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = w' \quad w' \geq 0, \quad (48a)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = 0 \quad w' < 0 \quad (48b)$$

となる。

運動(3)でストレッチング $D_i(t)$ が時間的に一定の場合、定常伸長である。このとき対数ひずみは

$$E_i(\tau) = D_i \tau \quad (49)$$

となる。以後、定常な場合を考察する。

負荷の場合を解析する。(47a)式に D_i をかけ、 i について1から3まで加える。(48a)式を使って独立変数を τ から α に変換する。

$$w' \frac{dw'}{d\alpha} + \frac{w'^2}{M(\alpha)^2} = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2. \quad (50)$$

これは w' についての常微分方程式である。さて

$$f(\alpha, \alpha_0) \equiv \exp \left(\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\xi}{M(\xi)^2} \right) \quad (51)$$

とする。添字0は $\tau = \tau_0$ のときの値を意味する。(50)式の両辺に $2f(\alpha, \alpha_0)^2$ をかけると

$$\frac{d}{d\alpha} [w'^2 f(\alpha, \alpha_0)^2] = 2(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) f(\alpha, \alpha_0)^2$$

となり、積分して

$$w'(\alpha, \alpha_0) = \frac{1}{f(\alpha, \alpha_0)} \left[w_0'^2 + 2(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) \times \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi, \alpha_0)^2 d\xi \right]^{1/2} \quad (52)$$

をえる。

(47a)式は

$$\frac{dS_1}{d\alpha} + \frac{S_1}{M(\alpha)^2} = \frac{D_1}{w'(\alpha, \alpha_0)} \quad (53)$$

となるから、両辺に $f(\alpha, \alpha_0)$ をかけると

$$\frac{d}{d\alpha} [S_1 f(\alpha, \alpha_0)] = \frac{D_1 f(\alpha, \alpha_0)}{w'(\alpha, \alpha_0)}$$

となり、積分して

$$S_i(\alpha, \alpha_0) = \frac{1}{f(\alpha, \alpha_0)} \left[S_{i0} + D_i \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{f(\xi, \alpha_0)}{w'(\xi, \alpha_0)} d\xi \right] \quad (54)$$

をえる。

(48a)式より時間は

$$\tau = \tau_0 + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\xi}{w'(\xi, \alpha_0)} \quad (55)$$

で与えられる。対数ひずみは(49)式より

$$E_i(\alpha, \alpha_0) = D_i \tau_0 + D_i \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\xi}{w'(\xi, \alpha_0)} \quad (56)$$

となる。

除荷の場合を考える。微分方程式(47b), (48b)はただちに積分できて

$$S_i = S_{i0} + D_i(\tau - \tau_0) = S_{i0} + E_i - E_{i0}, \quad (57)$$

$$\alpha = \alpha_0 \quad (58)$$

となる。(57)式は線型な応力-ひずみ関係である。

関係(52), (54)~(56)は応力、時間、ひずみの間の関係を内部状態変数をパラメータとして表現したものである。

4 非圧縮塑性物質の単軸応力定常伸長

本節では単軸応力のもとでの定常伸長変形についての非圧縮塑性物質の挙動をとりあげる。この変形は前節で考察した定常伸長変形の特別な場合である。

直線棒が棒にそって働く力によって伸長または圧縮される場合を考える。力の方向に x_1 一軸をとる。側面には力が作用しないから、応力は

$$S_1 = S, S_2 = S_3 = 0 \quad (59)$$

となる。これより圧力は

$$q = -\frac{S}{3} \quad (60)$$

となり、偏差応力は

$$S_1^* = \frac{2}{3}S, S_2^* = S_3^* = -\frac{1}{3}S \quad (61)$$

となる。非圧縮の条件(34)と対称性より

$$D_1' = D', D_2' = D_3' = -\frac{1}{2}D' \quad (62)$$

となる。これより偏差応力パワ(23)は

$$w'^* = SD' \quad (63)$$

である。

関係(61)~(63)および(63)を構成式(27), (28)に代入して

$$\frac{dS}{d\tau} = \left(\frac{3}{2} - \frac{S^2}{M(\alpha)^2} \right) D' \quad SD' \geq 0, \quad (64a)$$

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{3}{2} D' \quad SD' < 0, \quad (64b)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = SD' \quad SD' \geq 0, \quad (65a)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = 0 \quad SD' < 0 \quad (65b)$$

となる。

定常変形を考えているから

$$D' = \text{一定} \quad (66)$$

である。負荷状態で(64a), (65a)より τ を消去して関数(51)を使うと

$$\frac{d}{d\alpha} [S^2 f(\alpha, \alpha_0)^2] = 3f(\alpha, \alpha_0)^2$$

となる。積分して

$$S(\alpha, \alpha_0) = \pm \frac{1}{f(\alpha, \alpha_0)} \left[S_0^2 + 3 \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\xi, \alpha_0)^2 d\xi \right]^{1/2} \quad (67)$$

をえる。添字0は $\tau = \tau_0$ のときの値を意味する。上式の S を(65a)に代入して、対数ひずみ

$$E(\alpha, \alpha_0) = E_0 + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\xi}{S(\xi, \alpha_0)} \quad (68)$$

をえる。ここで(49)式より

$$E(\tau) = E_0 + D'(\tau - \tau_0) \quad (69)$$

である。

除荷状態では、(64b) および (65b) 式を直接積分して

$$S(\tau) = S_0 + \frac{3}{2}(E(\tau) - E_0), \quad (70)$$

$$\alpha = \alpha_0 \quad (71)$$

をえる。

67)と69式は α をパラメータとした関係を表わし、負荷時の応力-ひずみ関係を与える。また70式は除荷時の応力-ひずみ線型関係である。

降伏条件(29)は61), 62式より

$$S = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} M(\alpha) \quad (72)$$

となる。

4・1 理想塑性の場合

この場合、物質関数は定数になる。

$$M(\alpha) = M_0. \quad (73)$$

降伏条件(72)は

$$S = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} M_0 \quad (74)$$

になり、したがって加工硬化は起こらない。関数61)は

$$f(\alpha, \alpha_0) = \exp\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{M_0^2}\right) \quad (75)$$

となり、負荷時には67式より応力は

$$S(\alpha, \alpha_0) = \pm \left[\frac{3}{2} M_0^2 + \left(S_0^2 - \frac{3}{2} M_0^2 \right) \exp\left(-\frac{2(\alpha - \alpha_0)}{M_0^2}\right) \right]^{1/2} \quad (76)$$

となる。これを63式に代入して、応力-ひずみ関係

$$E = E_0 + \frac{M_0}{\sqrt{6}} \log \left| \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} M_0 + S \right) \left(\sqrt{\frac{3}{2}} M_0 - S_0 \right)}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} M_0 - S \right) \left(\sqrt{\frac{3}{2}} M_0 + S_0 \right)} \right| \quad (77)$$

がえられる。 S を E で表わして

$$S = \sqrt{\frac{3}{2}} M_0 \frac{S_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} M_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{E - E_0}{M_0}\right)}{\sqrt{\frac{2}{3}} M_0 + S_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{E - E_0}{M_0}\right)} \quad (78)$$

となる。

上の応力-ひずみ関係で、初期値(S_0, E_0)からの偏寄が微小な場合、すなわち

$$\frac{S}{M_0}, \frac{S_0}{M_0}, E - E_0 \ll 1 \quad (79)$$

の場合には、線型関係

$$S - S_0 = \frac{3}{2}(E - E_0) \quad (80)$$

をえる。これは除荷時の関係(70)と同一である。

また、応力-ひずみ関係(78)で E の絶対値が増大した極限では

$$\lim_{E \rightarrow \pm \infty} S = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} M_0 \quad (81)$$

となり、降伏条件(74)がみたされる。

4・2 等方加工硬化の場合

物質関数が

$$M(\alpha) = M_0(1 + a\alpha)^n \quad (82)$$

の場合を考える。ここで、 M_0, a, n は物質定数であり、

$$M_0 > 0, n > 0, a \geq 0 \quad (83)$$

と仮定する。関数61)は

$$f(\alpha, \alpha_0) = \exp\left[\frac{1}{(1-2n)M_0^2 a} \times \left\{ (1+a\alpha)^{1-2n} - (1+a\alpha_0)^{1-2n} \right\}\right] \quad n \neq \frac{1}{2}, \quad (84a)$$

$$f(\alpha, \alpha_0) = \left(\frac{1+a\alpha}{1+a\alpha_0}\right)^{1/M_0^2 a} \quad n = \frac{1}{2} \quad (84b)$$

となる。

関数64)を67), 69式に代入して数値積分することにより、応力-ひずみ関係を求めることができる。除荷の場合は関係(70)が成り立つ。

降伏条件は72), 82式より

$$S = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} M_0 (1 + a\alpha)^n \quad (85)$$

になる。

さて、次の変換を考えよう。任意の値をとるパラメータ ζ をとり、物質定数を

$$M_0 \rightarrow \zeta M_0, a \rightarrow \zeta^{-2} a, n \rightarrow n \quad (86)$$

のように変換する。それに応じて

$$\alpha \rightarrow \zeta^2 \alpha, S \rightarrow \zeta S, E \rightarrow \zeta E \quad (87)$$

とする。すると関数 f はこの変換について不変になる。そして関係67), 69), 70)はそのまま成り立つ。これより、物質定数の組(M_0, a, n)は一意ではなく、変換(86)で結ばれた仕方でも任意に変わりうる。

4・3 数値計算

物質関数が82式である場合について数値計算を行なった。 $a=0$ では物質関数は73となり理想塑性となる。変換(86)による不変性のため、3個の物質定数の内、1個は任意に定めてよい。ここでは $M_0=10^{-3}$ にとっている。 n としては1, 0.5, 0.25をとった。すなわち

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad M(\alpha) &= (1+a\alpha) \times 10^{-3}, \\ (b) \quad M(\alpha) &= \sqrt{1+a\alpha} \times 10^{-3}, \\ (c) \quad M(\alpha) &= \sqrt[4]{1+a\alpha} \times 10^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

の3とおりの物質関数を採用した。 a としては

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad a &= (0, 1, 2, 3, 4) \times 10^4, \\ (b) \quad a &= (0, 2, 4, 6, 8) \times 10^4, \\ (c) \quad a &= (0, 4, 8, 12, 16) \times 10^4 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

をとった。もし $a\alpha \ll 1$ の場合には

$$M(\alpha) \sim 1 + na\alpha$$

⑧⑨

となり、⑧、⑨式の組合せは、近似関係⑧⑨では同一の組合せ

$$na = (0, 1, 2, 3, 4) \times 10^4 \quad \text{⑩}$$

を与える。さらにすべての場合に、初期条件

$$S = 0, E = 0, \alpha = 0 \quad \text{⑪}$$

を採用した。

Fig. 1 は⑪の状態から出発して正の方向-伸長方向に連続して負荷した場合を示す。物質(b)は直線的な加工硬化物質であり、物質(a)は次第に増大する加工硬化をもつ物質を、物質(c)は次第に減少する加工硬化をもつ物質を表わす。

Fig. 2 は3種類の物質について、 a をそれぞれ、

$$(a) \quad a = 10^4,$$

$$(b) \quad a = 2 \times 10^4,$$

$$(c) \quad a = 4 \times 10^4$$

⑧⑨

ととった場合を示してある。棒の正および負方向への負荷、 $E = 5 \times 10^{-3}$ および $E = 10^{-2}$ での除荷、さらに応力が零になった状態からの正および負方向への再負荷の挙動を図示した。再負荷応力-ひずみ曲線では、いわゆる

Fig. 1. Stress-strain diagrams for the uniaxial stress extension, where the material function is $M_0 (1 + a\alpha)^n$.

“丸み現象” (rounding phenomenon) が現われている。再負荷曲線と初期状態からの連続した負荷曲線との関係は、正方向ではほとんど一致しており、負方向ではかなりの差が出ている。内部状態変数の変化は破線で示してある。

Fig. 3 は⑧⑨の場合についての負荷-除荷サイクルでの挙動を示す。サイクルの両端は $E = \pm 5 \times 10^{-3}$ にとった。Fig. 4 は Fig. 3 で示した最大応力、最小応力

Fig. 2. Loading-unloading-reloading diagrams for the uniaxial stress extension, where the real lines show the stress-strain diagrams and the broken lines the internal variable-strain diagrams.

Fig. 3. Loading-unloading cycles in the limit of strain $E = \pm 5 \times 10^{-3}$ for the uniaxial stress extension, where the real lines show the stress-strain diagrams and the broken lines the internal variable-strain diagrams.

Fig. 4. Variation of the stress and the internal variable at the states A's and B's in Fig. 3, where the real lines and the broken lines correspond, respectively, to the stress and the internal variable, and $\ominus$, $\oplus$ and $\otimes$ correspond, respectively, to the materials depicted in Fig. 3 (a), (b) and (c).

と内部状態変数の変化を繰返し半周期ごとの目盛を横軸にとって画いたものである。3種類の物質の加工硬化の仕方がよく理解できる。

参考文献

- 1) Kratochvil, J., and O.W. Dillon, J. Appl. Phys., **40**, 3207 (1969).
- 2) Valanis, K.C., Arch. Mech., **23**, 535 (1971).
- 3) Mróz, Z., Symposium on Foundations of Plasticity, Ed. by A. Sawczuk, p. 551 (1973) Noordhoff Intern. Pub., Leyden
- 4) Tokuoka, T., Z. Angew. Math. Mech., (印刷中).
- 5) Tokuoka, T., Z. Angew. Math. Mech., (印刷中).
- 6) 徳岡辰雄, 材料, **25**, 960 (1976).
- 7) Coleman, B.D., and W. Noll, Phys. Fluids, **5**, 840 (1962).