ケーブル破壊強度分布の理論的解析*

辻 谷 将 明** 太 田 宏*** 加 瀬 滋 男***

Theoretical Analysis of Distribution of Breaking Strength of CV-Cable

by

Masaaki TSUJITANI, Hiroshi OHTA and Shigeo KASE

(Department of Industrial Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai)

The distribution of ultimate breaking strength of cable has seldom been studied from the point of view of inherent casual factors which influence the nature of the resultant mathematical distribution. It has been pointed out only that the skewness of the curve representing the frequency distribution of breaking strength of cable is ordinarily negative presumably due to flaws in the cable. This paper gives a physical meaning to asymmetry of the frequency distribution from the theory of extreme values. Comparison is also attempted between the theory and experimental results.

(Received Sep. 12, 1977)

キー・ワード：二重指数分布（第1漸近最小値分布）、フロー、絶縁破壊、MVULE、二重指数確率紙

1 緒 言

架橋ポリエチレンケーブル（以下、CV ケーブルとよぶ）の破壊強度は、ケーブル材質の基本的な性能評価尺度として重要視されている。したがって、破壊強度に関する研究も多く行われてきた^{1)~3)}。しかし、ケーブルの破壊機構が近年かなり解明されつつある割には、この破壊現象に立脚した統計的な考察はまれである^{4)~6)}。20数年前、加瀬は“加硫ゴムの引張強さ”に関して、極値理論から破断強度分布を理論的に解明した⁷⁾。

本稿では加瀬や Forrey らと同じ見地に立ち、極値理論をケーブル破壊に応用して、破壊強度の度数分布状態に具体的意味を付与することを試みる。あわせて、理論と実験結果との適合性および、パラメータ推定のための新しい確率紙の応用方法を提案する。

2 ケーブル破壊強度の理論分布関数

CV ケーブルの典型的な構造は、Fig.1 に示すようなものである。その破壊現象を考察すると、種々の原因があげられる。それらのうちで寿命に最も大きい影響を及ぼす因子は、形状不整部（以下、フローとよぶ）からの破壊であると思われる。フローとしては、一般に絶縁体中の微小異物や導電層上の突起などが考えられる。

Fig. 1. Crosslinked polyethylene cable.

従来、こうした破壊機構を解明するため、ポリエチレン中に挿入した鋭さの異なる研磨針に電圧を印加し、針先端から異極性電極に向って発生するトリ－状放電の研究も行われている。たとえば Kitchin は、絶縁破壊痕跡がトリ－状になっていたことを確認している⁸⁾。井上や斎藤らは、絶縁体中のフローの先端からトリ－が発生した事実について述べている⁹⁾。とくに松浦らや堀井らは、ケーブルの絶縁破壊に関して、トリ－発生の点からはフローの大きさそのものより、それらの鋭さが問題であるといっている¹⁰⁾。よって本稿では、原ら¹¹⁾

Fig. 2. Schematic sketch of flaw.

* 本報を「CV ケーブル破壊強度に関する極値論的考察(第1報)」(Statistical Investigation of the Breaking Strength of CV-Cable from the Theory of Extreme-Values, I) とする。
原稿受理 昭和52年9月12日

** 学生会員 大阪府立大学大学院 堺市百舌鳥梅町

*** 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町

と同様にこの種々のフローの鋭さを表す尺度として、回転だ円体の曲率を対応させる。

なお、このフローについて補足しておくことがある。本稿で取扱う衝撃電圧破壊や交流破壊のような急激な破壊の場合、劣化による破壊には考慮を払っていない。よって、絶縁体中の導体付近にない異物にトリイが発生しても、その破壊エネルギーは導体側から絶縁体中に向かう突起によるそれに比べて小さいため、急激な破壊の原因にはならない。

上記の諸仮定のもとでは、ケーブル破壊は無数のフローのうち最も鋭い（すなわち、曲率の最も大きい）フローに加わるストレスが、その破壊強度を越えたときに生じるとしてよからう。このような見地からフローなどの存在しない場合の理想的なケーブルの破壊強度を E_0 とするとき、最大曲率 X なるフローをもつケーブルの破壊強度 E は、定数 A , B のもとに

$$E = E_0(B - A \cdot X) \quad (1)$$

と仮定される。よって、試片ごとに変動する破壊強度分布は、フローの曲率の分布（その密度関数を $g(x)$ 、分布関数を $G(x)$ とする）から誘導される。

いま、大きさ N の標本において、確率変数 x の最大値が X を越えない確率は

$$G_N(X) = \{G(X)\}^N \quad (2)$$

となる。したがって、体積 V であるケーブル試片の単位体積中に含まれるフローの数を n とすると、 Vn 中のフローの曲率 x の最大値 X の密度関数 f_{Vn} は

$$f_{Vn}(X) = Vn \cdot g(X) \cdot \{G(X)\}^{Vn-1} \quad (3)$$

で与えられる。Gumbel¹⁴⁾の指摘するように、フローが数多く存在する ($n \rightarrow \infty$ よって $Vn \rightarrow \infty$) のものとすれば、フローの曲率分布 $g(x)$ が Fisher-Tippett¹⁵⁾の極値条件を満たす限り、漸近最大値分布として

$$f(X) = w \cdot \exp\{-w(X-u) - e^{-w(X-u)}\} \quad (4)$$

を得る。ここに、 u は(3)式のモードであり

$$w = Vng(u)$$

とする。なお指数分布、正規分布、対数正規分布¹⁶⁾、Rosin-Rammler 分布¹⁷⁾など重要な分布は、すべてこの極値条件を満足している。

つぎに、(1)式に基づく X から E への変数変換の Jacobian J は

$$|J| = 1/AE_0$$

であるから

$$f(E) = -\frac{w}{AE_0} \exp\left\{-\frac{w}{AE_0}\left[E + AE_0\left(u - \frac{B}{A}\right)\right] - e^{w/AE_0[E + AE_0(u - B/A)]}\right\}$$

を得る。ここに

$$\begin{aligned} b &= AE_0/w \\ m &= AE_0(u - B/A) \end{aligned}$$

とおくと、破壊電位傾度 E の分布は、二重指数分布

$$f(E) = \frac{1}{b} \exp\left\{-\frac{E-m}{b} - \exp\left(\frac{E-m}{b}\right)\right\} \quad (5)$$

$$F(E) = 1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{E-m}{b}\right)\right\} \quad (6)$$

に帰着される。

上記においてケーブル破壊電位傾度の理論的分布は、二重指数分布そのものであることが明確にされたわけである。以後、破壊電位傾度 E を x と改め、(5), (6)式の代わりに $f(x)$, $F(x)$ を用いることにする。

3 実際分布と理論分布の適合性とパラメータ推定

分布型の同定や分布関数のパラメータ推定に用いられている二重指数確率紙は、広くその実用性が実証されてきた。しかし、CV ケーブルの衝撃破壊試験においては、ケーブルの破壊強度以前に実験装置の端末で破壊(端末破壊)することがある。このため、実際の破壊測定値が得られず打切り試片が含まれる場合、確率紙へのプロット位置の求め方については、なお若干の検討事項が残されているようである。Mann¹⁸⁾らも指摘しているように、打切り試料に対し単に累積相対度数でプロットしていくと、確率紙からの未知パラメータの推定精度はかなり悪くなる。この点にかんがみ、本稿では打切り試料にも有効なプロット位置の決定方法を提案する。

二重指数分布から測定値

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad (n \leq N)$$

を得たとする。ここに、 N は全試片数であり、 n は測定された試片数である。この分布の未知パラメータ b と m を推定する最良の方法として、打切り試料にも有効な Lieblein¹⁹⁾らによる最小分散不偏線形推定量(MVULE)²⁰⁾がある。ところで、Kimball²⁰⁾が結論づけているように、プロット位置を求めるのにこの推定法を応用しても問題は残る。測定値 x_i のプロット位置を与える累積確率 P_i が、 x_i の増加とともに大きくなる（これを順序化されているとよぶ）という条件²¹⁾が満たさないことがありうるからである。近年 Cran²¹⁾は、この欠点を取り除くため、重みづけ最小二乗法の利用を提唱した。ただ、その際に用いる MVULE²²⁾に対する係数としては、Lieblein²²⁾の算出した全試片数 N が $N \leq 6$ についてのものを採用している。

本稿では、Mann²³⁾が求めた二重指数分布の順序統計量に関する分散・共分散の表を利用し、Cran²¹⁾の方法を $N \leq 20$ まで適用できるように拡張する。あわせてこの方法が、打切り試料に対しても有効であることを以下で定量的に考察しよう。

いま、測定値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ のプロット位置を $t_1, t_2, \dots, t_n$ とする。ただし、 $t_i = F^{-1}(P_i)$ である。Cran²¹⁾はこのプロット位置を求めるのに、対称正定行

列 $A = \|\alpha_{ij}\|$ による重みづけ最小二乗法を援用した。とくに、二重指数分布についてはプロット位置が順序化されるため、 A として規準化変数 $y = (x - m)/b$ の順序統計量 $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ の分散・共分散行列 V を採用した。具体的には、プロット位置ベクトル t を

$$t = (C'VC)^{-1} \cdot V \cdot C + u^* \quad (7)$$

により定めるというものである。ここに C は、 b に対する MVULE の係数ベクトルであり、 $'$ は転置を表す。また

$$\begin{aligned} \beta' &= (E(y_1), E(y_2), \dots, E(y_n)) \\ V &= \|\nu_{ij}\|, \quad V^{-1} = \|\nu^{ij}\|, \quad \nu^{(i)} = \sum_{j=1}^n \nu^{ij} = \sum_{i=1}^n \nu^{ji} \\ \nu &= \sum_{i=1}^n \nu^{(i)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu^{ij} \\ d' &= (d_1, d_2, \dots, d_n), \quad d_i = \nu^{(i)}/\nu \\ u^* &= \beta' \cdot d \end{aligned}$$

とする。Table I に $(N, n) = (10, 10), (15, 10), (20, 10)$ に対するプロット位置の計算結果を示す。

Table I. Plotting position P_i on doubly exponential probability paper.

i	P_i		
	$(N, n) = (10, 10)$	$(N, n) = (15, 10)$	$(N, n) = (20, 10)$
1	0.05	0.04	0.03
2	0.15	0.10	0.08
3	0.25	0.16	0.12
4	0.34	0.23	0.17
5	0.44	0.30	0.22
6	0.54	0.36	0.27
7	0.64	0.43	0.32
8	0.74	0.49	0.37
9	0.83	0.56	0.42
10	0.93	0.62	0.47

ついで、上記の方法が打ち切り試料に対しても有効であることを示すため、その構造が

導体外径.....20.0 mm
内部導電層厚さ..... 1.0 mm
外部導電層厚さ..... 0.5 mm
絶縁体厚さ..... 7.0 mm
ケーブル・サイズ..... 200.0 mm²

で与えられる 22 kV 用 CV ケーブルについて、衝撃電圧波形 $(1 \times 40) \mu s$ の衝撃電圧破壊試験を行った。その結果を Table II に与えておく。このデータに対し、Table I から得られる Cran の重みづけ最小二乗法のプロット位置に基づく二重指数確率紙へのプロット結果を Fig. 3 に示す。なお、 x の分布のモード $\hat{x}$ 、メディアン $\bar{x}$ 、平均 $\bar{x}$ はそれぞれ確率紙上で横座標が 63.2, 50.0, 43.0% にあたる縦線と、プロット点にあてはめられた直線との交点の縦座標で与えられる。したがって、パラメータ m 、 b は $\hat{x}$ と $\bar{x}$ を用いて

Table II. Observed maximum breakdown stresses for CV-Cable.

(kV/mm)					
71.4	72.8	78.4	81.0	84.8	86.1
89.1	90.9	90.9	96.0	*	*
*	*	*			

(*: censored specimen)

$\hat{x}$ 63.2 %
 $\bar{x}$ 50.0 %
 $\bar{x}$ 43.0 %

Fig. 3. Plotting of CV-Cable breakdown data on doubly exponential probability paper.

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \hat{x} \\ \hat{b} &= \frac{\hat{m} - \bar{x}}{\gamma} \end{aligned}$$

と推定される。ここに、 $\gamma = 0.5772 \dots$ はオイラー定数である。

Kimball によるプロット位置に基づいてパラメータ b および m を推定したときの偏りは

$$E(\hat{b}) - b = b \left[\sum_{i=1}^n C_i \cdot E(y_i) - 1 \right]$$

$$E(\hat{m}) - m = b \left[\gamma - \{E(\hat{b})/b\} \bar{t} \right]$$

で与えられ、 $\hat{b}$ の分散は

$$V_{ar}(\hat{b}) = b^2 \cdot \sum_{i=1}^n C_i^2 \cdot V_{ar}(y_i)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{t_i - \bar{t}}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \\ t_i &= F^{-1}(P_i) \\ \bar{t} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \end{aligned}$$

であり、 $E(y_i)$ 、 $V_{ar}(y_i)$ は Mann らの表から得られる。これらの計算結果を Table III, IV に与える。

Table III. Coefficients c_i for plotting position.

(N=15, n=10)

i	$P_i=i/(N+1)$	$P_i=F(t_i)$
1	-0.253	-0.094
2	-0.145	-0.098
3	-0.079	-0.096
4	-0.030	-0.091
5	0.009	-0.083
6	0.043	-0.072
7	0.073	-0.058
8	0.101	-0.039
9	0.127	-0.016
10	0.153	0.048

Table IV. Bias and variance of the estimates.

	$P_i=i/(N+1)$	$P_i=F(t_i)$
Bias ($\hat{m}$)	1.808	0
Bias ($\hat{b}$)	0.179	0
Var ($\hat{b}$)	0.129	0.089
M.S.E. ($\hat{b}$)	0.308	0.089

Table III, IV から明らかなように, $N=15, n=10$ の打切り試料の場合, Cran の方法に基づくプロット位置からのパラメータ推定の精度は, Kimball の方法に比べてかなり改善される.

さて, 以上の所論を検証するために, Fig. 3 から b と m を推定してみる.

(1) Kimball の方法による場合

$$\hat{b}=14$$

$$\hat{m}=83$$

(2) Cran の方法による場合

$$\hat{b}=10$$

$$\hat{m}=95$$

となる. ちなみに, b および m の MVULE はそれぞれ

$$\hat{b}=10.1$$

$$\hat{m}=95.6$$

と求められる. この事実からも, Cran の方法を打切り試料に拡張して b と m を推定した場合, MVULE に近い値が確率紙から容易に得られることが知られよう.

以上の検討の結果, Fig. 3 に見るとおり理論分布と実験分布の間には, かなり良好な一致がうかがえる. また, パラメータ b, m の推定値より Table III のデータに基づく CV ケーブル破壊強度の分布特性値は

$$\text{平均} : \hat{m} - 0.5772 \hat{b} = 89.2$$

$$\text{標準偏差} : 1.283 \hat{b} = 15.4$$

$$\text{モード} : \hat{m} = 95$$

$$\text{変動係数} : \hat{\sigma}/\hat{\mu} = 0.17$$

$$\text{定格寿命} : \hat{m} + \hat{b} \cdot \ln(-\ln 0.9) = 72.5$$

$$\text{メディアン寿命} : \hat{m} + \hat{b} \cdot \ln(-\ln 0.5) = 91.3$$

で与えられる.

4 結 論

上記において, ケーブルの破壊現象は極値理論からよく説明されること, および破壊物理量の統計変動が二重指数分布に従うことを示した.

それにしても, なお若干の検討事項を残している. たとえば, 時間的効果に関するインパルス繰返し課電による疲労特性 ($v-n$ 特性) などについてである. これに対する厳密な意味での解析は, 極値理論に確率過程論を併用した動的破壊理論によらなければならない.

なお, 本稿での所説は, ケーブルに限らず他の物質の破壊強度に関する問題にも, 充分拡張適用可能であることを示唆しておく.

参 考 文 献

- 1) Ochini, C. E., IEEE paper 71, **TR157-PWR** (1971).
- 2) Oudin, J. M., Rev. Gen. Elect., **79**, 331 (1970).
- 3) Palmer, S., and W. A. Shorpley, PIEEE, **116**, 2029 (1969).
- 4) Kase, S., J. Ploymer Sci., **11**, 425 (1953).
- 5) Kase, S., J. Polymer Sci., **14**, 497 (1954); **14**, 579 (1954).
- 6) 加瀬滋男, 日本ゴム協会誌における多数の論文
- 7) Forrey, D. G., J. Quality Technology, **1**, 233 (1969).
- 8) Kitchin, D. W., and O. S. Pratt., AIEE, **77**, 111; **77**, 180 (1958).
- 9) 井上利夫, 宮下隆雄, 電気学会誌, **87**, 2009 (1967).
- 10) 斎藤幸男, 絶縁材料トリーング専門委員会資料, No. T100 (1971).
- 11) 松浦虔士, 山田有一, 電気学会全国大会, S4-3 (1972).
- 12) 堀井憲爾, 木下勝弘, 高木勝正, 坂東武志, タック電線技報, No. 3, 12 (1969).
- 13) 原 仁吾, 新田東平, 川根 清, 山田直也, , 三菱電気技報, **37**, 873 (1963).
- 14) Gumbel, E. J., Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press (1958).
- 15) Fisher, R. A., and L. H. C. Tippett, Proc. Camb. Phil. Soc., **24**, 180 (1928).
- 16) Kottler, F., J. Franklin Inst., **250**, 339 (1950); **251**, 499 (1951).
- 17) Rosin, P., and E. R. ammler, J. Inst. Fuel, **7**, 29 (1933).
- 18) Mann, N. R., R. E. Schafer, and N. D. Singpurwalla, "Method for Statistical A nalysis of Reliability and Life Data," p. 217 (1974) John Wiley, New York
- 19) Lieblein, J., and M. Zelen, J. Res. NBS, **57**, 273 (1956).
- 20) Kimball, B. F., J. Amer. Statist. Assoc., **55**, 546 (1960).

- 21) Cran, G. W., J. Amer. Statist. Assoc., **70**, 229(1975). Hypothesis Testing with Application to the Weibull
- 22) Lieblein, J., A New Method of Analyzing Extreme- and Extreme-Value Distribution, Aerospace Res. Value Data, Nat. Advisory Comm. Aeronaut., Tech. Lab., ARL68-0068 (1968).
- 23) Mann, N. R., Results on Statistical Estimation and 24) 堀 素夫, 応用物理, **27**, 690(1958); **40**, 2 (1971).