Thin Wafer 法の精度の検討*

岸 田 敬 三** 中 川 憲 治** 石 川 勝 彦***

Analytical Examination of Thin Wafer Method for Rate Independent or Dependent Materials

by

Keizo KISHIDA, Kenji NAKAGAWA

(Faculty of Engineering, Osaka University, Osaka)

and Katsuhiko ISHIKAWA

(Hitachi Ltd., Kodaira)

The Thin Wafer method for determining the dynamic stress-strain relation of materials has been examined on the basis of wave propagation in a specimen. The analysis was done for an elastic-plastic rate independent material and rate dependent elastic-viscoplastic or elastic-viscoplastic-plastic materials.

Stress history at both ends of the specimen was taken as a measure of uniformity in the deformation of the specimen. The stress-strain curves obtained from the conventional Thin Wafer method were compared with those calculated from the average strain rate by the constitutive equations.

It is concluded that the Thin Wafer method is a valid means for obtaining the stress-strain relation of materials at high strain rates.

(Received Aug. 12, 1978)

キー・ワード：応力波，高ひずみ速度，構成方程式

1 緒 言

Thin Wafer 法 (Split Hopkinson bar 法) は材料の動的応力-ひずみ関係を求める 実験的方法の一つとして、従来から広く用いられているものである^{1,2)}。この方法は 2 本の弾性棒にはさまれた短い試験片の内部での応力波伝ばの効果は無視し、試料内で応力やひずみあるいはひずみ速度は一樣であり、さらに変形は一次元的であると仮定し、その平均応力と平均ひずみから、試料の高ひずみ速度下の応力-ひずみ関係を定めようとするものである。しかし材料の正確な構成法則を動的応力-ひずみ曲線から決定しようとした場合、この一樣性の仮定は十分に検討し、測定法の精度について詳しく調べておくことが必要である。

この問題については以前から解析的あるいは実験的になされている。解析的検討は試験片内の応力波伝ばの立場からなされたもので、Conn³⁾は試料のひずみ速度依存性を無視した場合の結果を示し、村上⁴⁾とNicholas⁵⁾は Malvern の構成方程式による理論解析を

行った。実験的検討では Bell⁶⁾ や Sharpe, Jr.⁷⁾ は試料内のひずみについて、また著者らは試料端面の応力について検討した。

Fig.1 と 2 は長さ 11mm の焼なましした銅と 1100 Al の試験片を用いて、Thin Wafer 法により衝撃試験したときの試料両端の応力の時間変化を示したものである。これからわかることは、ひずみ速度依存性の低い Al について試験した場合には両端面の応力は良く一致しているが、ひずみ速度依存性の高い銅では両端面の応力はかなり違っており、このような場合には Thin Wafer によって得られる平均の応力-ひずみ関係は材料の正しい動的特性を与えているかは疑わしいと考えられる。

そこでここでは、試料のひずみ速度依存性との関連において Thin Wafer 法の精度を調べるために試料をひずみ速度依存性を示さない定構成方程式と、ひずみ速度依存性をもつものとして弾-粘塑性および弾-粘塑性-塑性の構成方程式に従うとして、Thin Wafer 試料内の応力波の伝ばを解析した。Bertholf⁹⁾は試料と弾性棒の境界における摩擦を考慮した場合には、試験片は 1 次元応力状態ではないことを示しており、また

* 原稿受理 昭和53年 8 月12日

** 正 会 員 大阪大学工学部 吹田市山田上

*** (株)日立製作所 小平市上水本町

Fig. 1. Typical stress-time data for annealed copper specimen. σ_1 is the stress at the input face and σ_2 at the output face.

Fig. 2. Typical stress-time data for annealed 1 100 Al specimen.

高速で変形する場合の横方向慣性を考えると試料は3次元応力の状態となっていると考えられる。しかし Thin Wafer 法の精度には試料内の縦波の伝ば効果が最も大きな影響を及ぼすものと考えられる。

応力伝ば解析には、入力棒上の入射応力を境界条件のひとつとして与え、試料の両端の応力を計算で求めて互いに比較し、また通常の Thin Wafer 法に従い、平均応力と平均ひずみから応力-ひずみ曲線を求め、予め假定した構成方程式を平均ひずみの時間変化に沿って積分して得られる 応力-ひずみ曲線との比較によって Thin Wafer 法の精度を調べた。

2 理 論

2・1 構成方程式

金属材料を対象としてその弾-塑性挙動を表すものとして、弾-塑性体、弾-粘塑性体および弾-粘塑性-塑性体が考えられている。以下ではその構成方程式を示す。

2・1・1 弾-塑性体 Fig.3 に示すような粘性を全くもたない材料の応力-ひずみ関係は微分形ではない、ある定まった形で与えることができる。これは普通、定構成方程式と言われている。全ひずみ ε は弾性ひずみ ε_e と塑性ひずみ ε_p の和であって、 $\sigma = f(\varepsilon_p)$ は材料の加工硬化を表している。ここでは弾-塑性体の構成方程式を形式的に次のような時間による微分形で与えておく。

Fig. 3. Mechanical model of elastic-plastic material.

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{f'} \right) \dot{\sigma} \quad (1)$$

ここに $f'(\varepsilon_p) = df/d\varepsilon_p$ である。

2・1・2 弾-粘塑性体 Fig.4 のようなモデルの構成方程式は

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} [\sigma - f(\varepsilon_p)] \quad (2)$$

となる。これは Malvern¹⁰⁾ の構成方程式であるから、以下では(2)式をM型構成方程式とよぶ。

Fig. 4. Mechanical model of elastic-viscoplastic material.

2・1・3 弾-粘塑性-塑性体 塑性ひずみの一部が粘性的でないとすると、Fig.5 のようなモデルが考え

Fig. 5. Mechanical model of elastic-viscoplastic-plastic material.

られる。この場合の構成方程式は

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{h'} \right) \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} [\sigma - f(\varepsilon_p)] \quad (3)$$

となる。ここに $h'(\varepsilon_p) = dh/d\varepsilon_p$ を表す。

(3)式は Cristescu や Lubliner の提案による一般化構成方程式の一特殊形であるから、これを C-L 型構成方程式とよぶことにする。

2・2 縦波の伝ば解析

材料が上にあげたいずれの構成方程式に従うとした場合でも、縦波の伝ばを解析する基礎式は次のように与えられる。

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left[\frac{1}{E} + \varphi(\varepsilon_p) \right] \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \psi(\sigma, \varepsilon_p) \quad (6)$$

ここに ρ は材料の密度、 v は粒子速度である。(6)式は(3)式を一般的に書いたものであるが、 $\varphi=0$ とすれば M 型構成方程式となり、 $\psi=0$ とすれば定構成方程式となる。

(4)、(5)および(6)式の系は双曲型であるから、与えられた初期条件、境界条件のもとで特性曲線に沿った差分法で数値積分することができる。

まず、試料両端の境界条件について考える。Fig. 6 において、境界面では、入射応力波形 σ_I を時間の関数としてわかっているものとすれば

$$v_1 = \frac{1}{\rho_0 c_0} (-2\sigma_I + \sigma_1) \quad (7)$$

の関係がある。ここに v_1 と σ_1 はそれぞれ境界面 1 における粒子速度と応力である。(7)式を他の差分式と組合せて、面 1 の境界条件として用いることができる。

Fig. 6. Schematic drawing of the Thin Wafer method.

面 2 では試料と弾性出力棒が接していることを考慮すれば、 $\sigma_T = \sigma_2$ であるから境界条件は

$$\sigma_2 = -\rho_0 c_0 v_2 \quad (8)$$

を用いることができる。

初期条件は σ , ε , v のすべてを 0 とした。

試料としては焼もどした銅を想定して、ヤング率 $E=12\,000\text{ kg/mm}^2$ 、密度 $\rho=9.41 \times 10^{-10}\text{ kg}\cdot\text{sec}^2/\text{mm}^4$ とした。入力棒と出力棒はともに軟鋼を用いるものとし、 $E_0=21\,000\text{ kg/mm}^2$ 、 $\rho_0=8.02 \times 10^{-10}\text{ kg}\cdot\text{sec}^2/$

mm^4 とした。試料の長さは $l=11\text{ mm}$ とした。試料が定構成方程式に従うとしたときの応力-ひずみ関係 $\sigma=f(\varepsilon_p)$ は銅の静的応力-ひずみ曲線を表すものとして、 $\sigma=42.9\varepsilon_p^{0.43}$ を用いた。また M 型構成方程式における $k=E/\eta$ は $2 \times 10^6\text{ 1/sec}$ とし、C-L 型構成方程式における $\varphi(\varepsilon_p)=0.02\varepsilon_p^{0.5}$ とした。

最後に通常の Thin Wafer 法による応力やひずみの計算式を示す。Fig. 6 の記号を用いると、試料にかかる応力は

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_I + \sigma_R + \sigma_T}{2} \quad (9)$$

として両端面の平均応力を取り、ひずみ速度を

$$\dot{\varepsilon} = \frac{v_2 - v_1}{l} \quad (10)$$

として、これを時間積分して

$$\varepsilon = \int_0^t \frac{v_2 - v_1}{l} dt \quad (11)$$

試料のひずみとする。

3 解析結果と検討

以下では試料をそれぞれ定構成方程式、M 型構成方程式および C-L 型構成方程式に従うとした場合について Thin Wafer 法の精度を検討する。境界条件は衝撃により入力棒に発生する入射応力波形で与えることができるので、実験との関連を考慮してステップ状とせず、 $20\text{ }\mu\text{sec}$ の直線立上りの後一定応力となるようなランプ状波形で与えた。この一定の応力（衝撃応力）を変えることにより、試料の平均ひずみ速度を変えることができる。

3・1 定構成方程式

試料がひずみ速度に依存しない単一の応力-ひずみ関係をもつと仮定し、境界条件として衝撃応力 $\sigma_I=15\text{ kg/mm}^2$ を与えた場合の結果を Fig. 7 と 8 に示す。

Fig. 7 は試験片両端面の応力の時間履歴であるが、 11 mm 長の試料内で応力波頭が数回往復した後に両端の応力が等しくなっている。

Fig. 8 は計算結果を用いて (9)～(11) 式から求めた Thin Wafer 法による平均応力と平均ひずみの関係を、

Fig. 7. Time histories of stresses at both ends of the specimen obeying the elastic-plastic finite constitutive equation.

Fig. 8. Comparison of the stress-strain curve reconstituted from the Thin Wafer method with that from the constitutive equation for the case of the elastic-plastic material.

予め仮定した応力-ひずみ曲線と比較したものである。変形初期には試験片内で応力やひずみが一様でないことによる差異が見られるが、その後は非常に一致を示している。

3・2 M型構成方程式

材料にひずみ速度依存性を考える場合、しばしば用いられるのはこの型の構成方程式である。試料として比較的ひずみ速度依存性の大きい銅を想定して、 $k=2 \times 10^6$ 1/sec を使っている。

Fig. 9 は衝撃応力 $\sigma_I=15$ kg/mm² のときの試料両端面の応力であるが、やはり初期には両端面の応力の差異が大きい。また入力棒側の応力 σ_1 にピークが現

Fig. 9. Time histories of stresses at both ends of the specimen obeying the elastic-viscoplastic constitutive equation.

Fig. 10. Comparison of the stress-strain curve from the Thin Wafer method with the calculated one from the constitutive equation for the case of the elastic-viscoplastic material.

れるのがM型の特徴である。

Fig. 10 は上の場合について Thin Wafer 法に従って求められる応力-ひずみ経路と、そのときの平均ひずみの時間履歴に沿って構成方程式を積分して得られる応力-ひずみ曲線と比較したものである。両端面の応力が一致していない変形の初期においても平均の応力-ひずみ曲線に直すと正しい応力-ひずみ関係に非常に近いものを得ることができる。応力として両端面の平均ではなしに、出力棒側の σ_2 をとる場合もあるが、その場合には変形初期に Thin Wafer 法としての精度は悪くなることは明らかである。

つぎに、衝撃応力を大きくして、 $\sigma_I=40$ kg/mm² とした場合の結果を示すと、Fig. 11 と 12 のごとくである。 σ_1 と σ_2 の差異は衝撃応力の小さい場合に比べて大きくなっているが、応力-ひずみ関係の精度としては Fig. 12 のように決して悪くはなっていないのが興味深い。

Fig. 11. Stress-time histories for the elastic-viscoplastic specimen for 40 kg/mm² input stress.

Fig. 12. Comparison of the stress-strain curves for the elastic-viscoplastic specimen for 40 kg/mm² input stress.

Fig. 13 はこの場合の試験片内部での応力とひずみの分布を表したものであるが、応力分布が一様となってもひずみは必ずしも一様ではないことに注意しなければならない。これはもちろん材料のひずみ速度依存

Fig. 13. Distributions of stress and strain in the specimen.

性によるものである。

またひずみ速度依存性の比較的小さい場合を考えて、 $k=8 \times 10^6$ 1/sec としての同様計算を行ったが、両端面の応力に差異があること、しかし応力-ひずみ曲線では正しいものが得られることには変りはなかった。

3.3 C-L型構成方程式

ひずみ速度依存性を有する金属の構成方程式として C-L 型を考えるという場合が見られる。^{13,14)} 材料が C-L 型構成方程式に従うとした場合の結果を Fig. 14 と 15

Fig. 14. Stress-time histories for the elastic-viscoplastic-plastic specimen.

Fig. 15. Stress-strain curves for the case of the elastic-viscoplastic-plastic material.

に示す。試料両端面の応力は定構成方程式と M 型構成方程式の中間というような挙動をしている。やはり初期に端面応力の不一致が見られるが、やがて一致していく。Thin Wafer 法の精度は小さなひずみの範囲で良くない傾向は定構成方程式の場合と類似している。

4 結 言

金属材料の動的応力-ひずみ関係を求めるのに Thin Wafer 法を用いる場合を考えて、試料を定構成方程式、M 型構成方程式および C-L 型構成方程式に従うと仮定して、その精度を検討した。その結果次のような事が結論として言える。

(1) いずれの構成方程式に従うとした場合でも、変形初期には両端面の応力に差異が見られるが、やがて一致していく。

(2) 定および C-L 型構成方程式では端面の応力が等しくなる辺りから、Thin Wafer 法は充分信頼できる応力-ひずみ関係を与える。

(3) M 型構成方程式では端面の応力の差異が大きい場合でも、平均の応力をとることによって Thin Wafer 法の精度としては充分なものが得られる。衝撃応力が高い場合には両端の応力が等しくなっても、試料内のひずみ分布は必ずしも一様でないことは注意しておく必要がある。

参 考 文 献

- 1) Hauser, F. H., J. A. Simmons, and J. E. Dorn "Response of Metals to High Velocity Deformation", p. 93 (1961) Interscience
- 2) 田中吉之助, 松尾俊三, 木下元洋, 前出恒夫, 日本機械学会論文集, 31-226, 883 (1965).
- 3) Conn, A. F., J. Mech. Phys. Solids, **14**, 309 (1966).
- 4) 村上碩哉, 室田忠雄, 神馬 敬, 日本機械学会論文集, 39-318, 556 (1973).
- 5) Nicholas, T., J. Appl. Mech., **95**, 277 (1973).
- 6) Bell, J. F., J. Mech. Phys. Solids, **14**, 309 (1966).
- 7) Sharpe, W. N. Jr., Exp. Mech., **12**, 570 (1972).
- 8) 上田 昇, 岸田敬三, 中川憲治, 日本機械学会論文集, 43-371, 2397 (1977).
- 9) Bertholf, L. D., J. Mech. Phys. Solids, **23**, 1 (1975).
- 10) Malvern, L. E., J. Appl. Mech., **73**, 203 (1951).
- 11) Cristescu, N., "Dynamic Plasticity", p. 125 (1967) North-Holland
- 12) Lubliner, J., J. Mech. Phys. Solids, **12**, 59 (1964).
- 13) Lubliner, J., and M. Valathur, Int. J. Solids Structures, **5**, 1275 (1969).
- 14) 谷村真治, 井恒 久, 真島秀和, 多田正幸, 日本機械学会論文集, 44-378, 497 (1978).