結合加工硬化をもつ Tresca 型塑性物質の単純せん断変形*

徳 岡 辰 雄**

Simple Shear Deformation of Tresca Type Plastic Materials with Combined Work-Hardening

by

Tatsuo TOKUOKA

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

Theoretical analysis and numerical calculation have been carried out for the simple shear deformations of plastic materials which have the Tresca type yield condition and endow the combined work-hardening. At first, the constitutive equations and the evolutionary equations of a scalar and a tensor internal state variable are solved analytically for the simple shear deformation. Then, the solutions are calculated numerically for a special material function. The shear and normal components of stress and translation and the scalar internal state variable are depicted via the shear angle. The results show the isotropic work-hardening as well as the translational one.

(Received Mar. 29, 1979)

キー・ワード：塑性，理論，せん断変形，加工硬化

1 緒 言

著者が展開してきた速度型塑性論は、構成式から降伏条件と流動則が誘導することができるという特徴がある。構成式は応力速度と変形速度——ストレッチングの線型関係で与えられる。そして典型的な場合として von Mises の降伏条件、Tresca の降伏条件および Lévy-St. Venant の流動則が導かれた。

塑性論に内部状態変数を導入して加工硬化を説明する試みがある。著者はスカラー内部状態変数によって等方加工硬化を、テンソル内部状態変数によって並進加工硬化を説明した。

これまで、これらの加工硬化をもつ塑性物質の単純伸長変形での挙動については幾つか報告され、負荷、除荷、Bauschinger 効果などがよく説明された。一方、単純せん断変形についても解析され、単独加工硬化の場合にはその結果が報告されている。

本論文では、Tresca の降伏条件と結合加工硬化をもつ塑性物質の単純せん断変形について考察しよう。

2 結合加工硬化をもつ Tresca 型塑性物質

著者は文献で結合加工硬化をもつ Tresca 型塑性物質を提案し、T 物質と称した。

スカラー内部状態変数 α と、テンソル内部状態変数 β_{ij} を導入し、応力テンソル T_{ij} から並進応力テンソル

$$\bar{T}_{ij} \equiv T_{ij} - \beta_{ij} \quad (1)$$

を定義し、その偏差部分を $\bar{T}_{ij}^*$ で表す。偏差並進応力のなす仕事速度

$$w \equiv \bar{T}_{kl}^* D_{lk} \quad (2)$$

が正の場合、負荷状態とし、負の場合、除荷状態と仮定する。本論文では繰返された添字についての和の規約を適用する。

負荷状態の構成式は

$$\begin{aligned} \dot{T}_{ij} = & \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left[D_{ij} + \frac{1}{K(\alpha)^2} \bar{T}_{kl}^* \bar{T}_{lk}^* D_{ij} \right. \\ & \left. - \frac{3}{K(\alpha)^2} (D_{ik} \bar{T}_{kl}^* \bar{T}_{lj}^* + \bar{T}_{ik}^* \bar{T}_{kl}^* D_{lj}) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{2\mu} w \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_{ij} = & \frac{2\mu b}{K(\alpha)^2} \left[3(D_{ik} \bar{T}_{kl}^* \bar{T}_{lj}^* + \bar{T}_{ik}^* \bar{T}_{kl}^* D_{lj}) \right. \\ & \left. - \bar{T}_{kl}^* \bar{T}_{lk}^* D_{ij} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

であり、除荷状態の構成式は

$$\dot{T}_{ij} = \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (6)$$

$$\dot{\alpha} = 0 \quad (7)$$

$$\dot{\beta}_{ij} = 0 \quad (8)$$

* 原稿受理 昭和54年3月29日

** 正会員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

である。ここで

$$\dot{T}_{ij} \equiv \dot{T}_{ij} - W_{ik} T_{kj} + T_{ik} W_{kj} \quad (9)$$

$$\dot{\beta}_{ij} \equiv \dot{\beta}_{ij} - W_{ik} \beta_{kj} + \beta_{ik} W_{kj} \quad (10)$$

は、それぞれ、応力 T_{ij} と並進 β_{ij} の共回転時間導関数であり、ストレッチング D_{ij} 、スピン・テンソル W_{ij} は速度こう配の、それぞれ、対称部分、反対称部分であり、 λ 、 μ 、 b は物質定数、 $K(\alpha)$ は α の物質関数である。(3)式は応力速度とストレッチングの線型対応である。この1対1対応が存在しない条件として Tresca の降伏条件

$$|\tilde{t}_i - \tilde{t}_j| = K(\alpha) \quad (11)$$

がえられ、不定なストレッチングとして塑性流動 D_{ij} がえられる。ここで $\tilde{t}_i$ は主並進応力である。詳しくは文献を参照されたい。

数値計算の便宜上、ここで構成式を無次元化しておこう。次のように無次元量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &\equiv \frac{T_{ij}}{2\mu}, \quad r_{ij} \equiv \frac{\beta_{ij}}{2\mu}, \quad q \equiv \frac{p}{2\mu} \\ T(\alpha) &\equiv \frac{K(\alpha)}{2\mu\sqrt{1+b}}, \quad c \equiv \frac{b}{1+b} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

すると構成式(3)―(8)式は次のようになる。負荷状態では

$$\dot{q} = - \left(\frac{\lambda}{2\mu} + \frac{1}{3} + \frac{1-c}{3T(\alpha)^2} R_{ii} \right) D_{kk} + \frac{2(1-c)}{T(\alpha)^2} R_{kl} D_{lk} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{S}}_{ij}^* &= D_{ij}^* + \frac{1}{T(\alpha)^2} [R_{kk} D_{ij}^* + 2R_{kl} D_{lk} \delta_{ij} \\ &\quad - 3(D_{ik} R_{kj} + R_{ik} D_{kj})] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{\alpha} = \tilde{S}_{kl}^* D_{lk} \quad (15)$$

$$\dot{r}_{ij} = \frac{c}{T(\alpha)^2} [3(D_{ik} R_{kj} + R_{ik} D_{kj}) - R_{kk} D_{ij}] \quad (16)$$

除荷状態では

$$\dot{q} = - \left(\frac{\lambda}{2\mu} + \frac{1}{3} \right) D_{kk} \quad (17)$$

$$\dot{\tilde{S}}_{ij}^* = D_{ij}^* \quad (18)$$

$$\dot{\alpha} = 0 \quad (19)$$

$$\dot{r}_{ij} = 0 \quad (20)$$

である。ここで、 p は圧力 D_{ij}^* は偏差ストレッチング、

$$R_{ij} \equiv \tilde{S}_{ik}^* \tilde{S}_{kj}^* \quad (21)$$

である。

3 単純せん断変形

直交座標軸をとり、 xy 平面内の二次元単純せん断変形を考える。(X, Y, Z), (x, y, z) を物体点の変形前後の座標とすると

$$x = X + \tau Y, \quad y = Y, \quad z = Z \quad (22)$$

であり、

$$\tau = 2kt \quad (23)$$

は無次元時間、 k は定せん断速度、 t は時間である。

よって、行列表示

$$D = k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

をえる。

この運動は等速運動であり、よって、均一応力場の条件の下で物体力0で運動式はみたされる。負荷から除荷または逆の転位点では加速度は0ではないが、十分にゆっくりした変形を考えることによって、いつも運動式はみたされると解釈することができる。

3・1 負荷単純せん断変形

表示(24)式より負荷状態の構成式(13)―(16)式は

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{2(1-c)}{T^2} R_{xy} \quad (25)$$

$$\frac{d\tilde{S}_{xx}^*}{d\tau} = \tilde{S}_{xy}^* - \frac{1}{T^2} R_{xy} \quad (26)$$

$$\frac{d\tilde{S}_{yy}^*}{d\tau} = -\tilde{S}_{xy}^* - \frac{1}{T^2} R_{xy} \quad (27)$$

$$\frac{d\tilde{S}_{zz}^*}{d\tau} = \frac{2}{T^2} R_{xy} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{S}_{xy}^*}{d\tau} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\tilde{S}_{yy}^* - \tilde{S}_{xx}^*) \\ &\quad - \frac{1}{T^2} \left(R_{xx} + R_{yy} - \frac{1}{2} R_{zz} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{d\tilde{S}_{xz}^*}{d\tau} = \frac{1}{2} \tilde{S}_{yz}^* - \frac{3}{2T^2} R_{yz} \quad (30)$$

$$\frac{d\tilde{S}_{yz}^*}{d\tau} = -\frac{1}{2} \tilde{S}_{xz}^* - \frac{3}{2T^2} R_{xz} \quad (31)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \tilde{S}_{xy}^* \quad (32)$$

$$\frac{dr_{xx}}{d\tau} = r_{xy} + \frac{3c}{T^2} R_{xy} \quad (33)$$

$$\frac{dr_{yy}}{d\tau} = -r_{xy} + \frac{3c}{T^2} R_{xy} \quad (34)$$

$$\frac{dr_{zz}}{d\tau} = 0 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr_{xy}}{d\tau} &= \frac{1}{2} (r_{yy} - r_{xx}) + \frac{c}{T^2} \left(R_{xx} + R_{yy} - \frac{1}{2} R_{zz} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{dr_{xz}}{d\tau} = \frac{1}{2} r_{yz} + \frac{3c}{2T^2} R_{yz} \quad (37)$$

$$\frac{dr_{yz}}{d\tau} = -\frac{1}{2} r_{xz} + \frac{3c}{2T^2} R_{xz} \quad (38)$$

をえる。

さて、

$$\tilde{S}_{zz}^* = \tilde{S}_{xx}^* = \tilde{S}_{yz}^* = 0 \quad (39)$$

と置くことにより、方程式(28), (30), (31)式はみたされる。

すると $R_{xy} = 0$ となり、方程式(25), (26), (27), (33), (34), (35)式より

$$\tilde{S}_{xx}^* = -\tilde{S}_{yy}^*, \quad r_{xx} = -r_{yy} \quad (40)$$

$$q=0, r_{zz}=0 \quad (41)$$

をえる。ここで、 $t=0$ での初期条件

$$S_{ij}=0, \alpha=0, r_{ij}=0 \quad (42)$$

を使った。したがって、偏差応力は応力に一致する。

残った独立な方程式は

$$\frac{d\tilde{S}_{yy}}{d\tau} = -\tilde{S}_{xy} \quad (43)$$

$$\frac{d\tilde{S}_{xy}}{d\tau} = \frac{1}{2} + \tilde{S}_{yy} - \frac{2}{T^2} (\tilde{S}_{yy}^2 + \tilde{S}_{xy}^2) \quad (44)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \tilde{S}_{xy} \quad (45)$$

$$\frac{d\tilde{r}_{yy}}{d\tau} = -\tilde{r}_{xy} \quad (46)$$

$$\frac{d\tilde{r}_{xy}}{d\tau} = \tilde{r}_{yy} + \frac{2c}{T^2} (\tilde{S}_{yy}^2 + \tilde{S}_{xy}^2) \quad (47)$$

である。

(43), (44)式は $\tilde{S}_{yy}$, $\tilde{S}_{xy}$ についての二元連立方程式である。 α をパラメータとして容易に解くことができる。¹²⁾ 結果は

$$g(\alpha, \alpha_0) = \exp\left(4 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\xi}{T(\xi)^2}\right) \quad (48)$$

として

$$\tilde{S}_{yy}(\alpha, \alpha_0) = \tilde{S}_{0yy} + \alpha_0 - \alpha \quad (49)$$

$$\tilde{S}_{xy}(\alpha, \alpha_0) = \pm \{\tilde{S}(\alpha, \alpha_0)^2 - \tilde{S}_{yy}(\alpha_1 \alpha_0)^2\}^{1/2} \quad (50)$$

$$\tilde{S}(\alpha, \alpha_0) = g(\alpha, \alpha_0)^{-1/2} \left\{ \tilde{S}_0^2 + \int_{\alpha_0}^{\alpha} g(\xi, \alpha_0) d\xi \right\} \quad (51)$$

$$\tau = \tau_0 + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\xi}{\tilde{S}_{xy}(\xi, \alpha_0)} \quad (52)$$

で与えられる。添字 0 は負荷状態に入ったときの値を表す。せん断角は

$$\theta = \tan^{-1} \tau \quad (53)$$

である。

方程式(46), (47)式を解くために

$$\hat{S}_{ij} = S_{ij} - \left(1 - \frac{1}{c}\right) r_{ij} \quad (54)$$

と置くと

$$\frac{d\hat{S}_{yy}}{d\tau} = -\hat{S}_{xy} \quad (55)$$

$$\frac{d\hat{S}_{xy}}{d\tau} = \frac{1}{2} + \hat{S}_{yy} \quad (56)$$

となる。これは容易に解けて、結局、

$$\begin{aligned} r_{yy} = & -c \left\{ \tilde{S}_{yy} + \frac{1}{2} - \left(\tilde{S}_{0yy} + \frac{1}{2} \right) \cos(\tau - \tau_0) \right. \\ & \left. + \tilde{S}_{0xy} \sin(\tau - \tau_0) \right\} \\ & + \{ r_{0yy} \cos(\tau - \tau_0) - r_{0xy} \sin(\tau - \tau_0) \} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} r_{xy} = & -c \left\{ \tilde{S}_{xy} - \left(\tilde{S}_{0xy} + \frac{1}{2} \right) \sin(\tau - \tau_0) \right. \\ & \left. - \tilde{S}_{0xy} \cos(\tau - \tau_0) \right\} \\ & + \{ r_{0xy} \sin(\tau - \tau_0) + r_{0yy} \cos(\tau - \tau_0) \} \end{aligned} \quad (58)$$

をえる。そして応力成分は(1)式と(12)式より

$$S_{yy} = \tilde{S}_{yy} + r_{yy} \quad (59)$$

$$S_{xy} = \tilde{S}_{xy} + r_{xy} \quad (60)$$

$$S_{xx} = -S_{yy} \quad (61)$$

$$S_{zz} = S_{xz} = S_{yz} = 0 \quad (62)$$

で与えられる。

3・2 除荷単純せん断変形

この場合は関係(39)~(41)式が成り立つ。方程式(43), (44)式はそのまま成り立ち、方程式(44), (47)式は右辺の最後の項を除いた形になり、方程式(45)式は

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = 0 \quad (63)$$

となる。すると $\tilde{S}_{yy}$, $\tilde{S}_{xy}$ は方程式(59), (60)式と同じ形の方程式をみたすことになり、

$$\tilde{S}_{yy} = -\frac{1}{2} + \left(\tilde{S}_{0yy} + \frac{1}{2} \right) \cos(\tau - \tau_0) - \tilde{S}_{0xy} \sin(\tau - \tau_0) \quad (64)$$

$$\tilde{S}_{xy} = \left(\tilde{S}_{0yy} + \frac{1}{2} \right) \sin(\tau - \tau_0) + \tilde{S}_{0xy} \cos(\tau - \tau_0) \quad (65)$$

をえる。 r_{yy} , r_{xy} は(57), (58)式で $c=0$ と置いたもので与えられる。また(63)式より

$$\alpha = \alpha_0 \quad (66)$$

となる。ここで添字 0 は除荷状態に入ったときの値を表す。関係(59)~(62)式はそのまま成り立つ。

3・3 降伏条件

関係(40), (62)式より無次元主並進応力は

$$\begin{vmatrix} -\tilde{S}_{yy} - \sigma & \tilde{S}_{xy} & 0 \\ \tilde{S}_{xy} & \tilde{S}_{yy} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (67)$$

の根 σ である。よって

$$\sigma_1 = \tilde{S}, \sigma_2 = -\tilde{S}, \sigma_3 = 0 \quad (68)$$

である。ここで $\tilde{S}$ は(60)式で導入された

$$\tilde{S} = (\tilde{S}_{yy}^2 + \tilde{S}_{xy}^2)^{1/2} \quad (69)$$

である。

降伏条件(11)式の無次元表示は定義(12)より

$$|\sigma_i - \sigma_j| = \frac{T}{\sqrt{1-c}} \quad (70)$$

となる。よって、単純せん断変形の場合

$$\tilde{S} = \frac{T}{2\sqrt{1-c}} \quad (71)$$

で与えられる。

4 数 値 計 算

挙動を具体的に調べるために、数値計算を行った。

$$T(\alpha) = T_0(1 + a\alpha)^{1/2} \quad (72)$$

という物質関数を仮定した。ここで、 T_0 , a は物質定数(無次元)である。無次元の物質定数 c と合せて 3 個になる。(10)式からわかるように、 c は並進加工硬化の大きさを表すパラメータであり、(70), (72)式からわ

かるように、 α は等方加工硬化を表すパラメータである。表現式より

$$g(\alpha, \alpha_0) = \left(\frac{1 + a\alpha}{1 + a\alpha_0} \right)^{4/aT_0^2} \quad (73)$$

となる。

T_0 として 10^{-2} と 10^{-1} の二例について計算を行った。Fig. 1 は $T_0 = 10^{-2}$ の場合、初期条件(42)式より出発してせん断角 θ を 10° まで増加させた場合の S_{xy} (太い実線), S_{yy} (太い破線), α (細い点線), r_{xy} (細い実線), r_{yy} (細い破線) が示してある。Fig. 1 (a) は等方加工硬化物質, Fig. 1 (b) は並進加工硬化物質である。Fig. 2 は $T_0 = 10^{-1}$ の場合の図である。ここでは、並進せん断応力 $\tilde{S}_{xy}$ が 0 になる角度までとっている。もし、更にせん断角を増加させる場合には、 $\tilde{S}_{xy}$ は負になり、除荷を行わなければならない。単純せん断変形において並進法線応力 $\tilde{S}_{yy}$ が 0 でない値をとる。これは法線応力効果を表す。

Fig. 3 は、 $T_0 = 10^{-2}$ の場合について、 $\theta = 3^\circ$ まで負荷し、それより除荷に入り、 $\tilde{S}_{xy} = 0$ より負の方向に再負荷して $\theta = -3^\circ$ に至るときの挙動、および

Fig. 1. Stress and internal state variables-shear angle diagrams for $T_0 = 10^{-2}$ in simple shear deformation.

Fig. 2. Stress and internal state variables-shear angle diagrams for $T_0 = 10^{-1}$ in simple shear deformation.

$S_{xy} = 0$ より正の方向に除荷し (このとき $\tilde{S}_{xy} < 0$), $\tilde{S}_{xy} = 0$ に至り、それより正の方向に再負荷して $\theta = 5^\circ$ に至るときの挙動が示してある。黒丸は負荷点、白丸は除荷点を表す。(a) は等方加工硬化物質, (b) は並進加工硬化物質, (c) は結合加工硬化物質の場合である。ここで注意すべきことは、 S_{yy} (太い破線) と r_{yy} (細い破線) の目盛が 10 倍されて画かれていることである。

Fig. 4 は、 $T_0 = 10^{-1}$ の場合について、Fig. 3 と同

Fig. 3. Loading-unloading responses for the material with $T_0 = 10^{-2}$ in simple shear deformation.

Fig. 4. Loading-unloading responses for the material with $T_0=10^{-1}$ in simple shear deformation.

様の挙動を示す。ただしせん断角は10倍されており、応力と並進の目盛はすべて同一に画いてある。

参考文献

- 1) Tokuoka, T., Arch. Rational Mech. Anal., **42**, 239 (1971).
- 2) 徳岡辰雄, 材料, **22**, 403 (1973).
- 3) Coleman, B.D., and M.E. Gurtin, J. Chem. Phys., **47**, 597 (1967).
- 4) Kratochvil, J., and O.W. Dillon, J. Appl. Phys., **40**, 3207 (1969).
- 5) 徳岡辰雄, 材料, **25**, 960 (1976).
- 6) 徳岡辰雄, 材料, **26**, 334 (1977).
- 7) 徳岡辰雄, 材料, **25**, 967 (1976).
- 8) 徳岡辰雄, 材料, **26**, 339 (1977).
- 9) Tokuoka, T., Arch. Mech., **30**, 801 (1978).
- 10) Tokuoka, T., Zeits. angew. Math. Mech., **57**, 1 (1977).
- 11) Tokuoka, T., Zeits. angew. Math. Mech., **58**, 1 (1978).
- 12) Tokuoka, T., Int. J. Non-Linear Mech., **7**, 609 (1972).