3 母数ワイブル分布の母数推定について*

(疲労寿命分布の母数推定に関連して)〔続報〕

酒井 達雄** 田中 道七**

Estimation of Three Parameters of Weibull Distribution in Relation to Parameter Estimation of Fatigue Life Distribution [Continued Report]

by

Tatsuo SAKAI and Tsuneshichi TANAKA

(Faculty of Science and Technology, Ritsumeikan, University, Kyoto)

In reliability analysis of machines and structural members, it is important to clarify the fatigue life distribution of these engineering items, and Weibull distribution is often accepted as the original distribution of the fatigue life. Although various kinds of estimation procedures have been developed on three parameters of Weibull distribution, the statistical properties of each estimated parameter still remain unsolved for any estimation method.

The authors performed the parameter estimation by means of several methods and discussed on the distribution characteristics of estimates of Weibull parameters. In this study, three different kinds of estimation were made on each parameter of Weibull distribution, and, the estimates obtained from the respective methods, including those given in the previous paper, were compared with each other in particular attention to statistical properties such as convergency or distribution of estimates. Finally, the most preferable method for parameter estimation of Weibull distribution was selected and quantitative discussions were also performed on the sample size required to determine, experimentally, the parameter of the original distribution.

(Received June 9, 1979)

キー・ワード：ワイブル分布，母数推定，疲労寿命分布，信頼性

1 緒 言

機械構造物の信頼性解析にあたり，各部材の疲労寿命に関する原分布を明らかにすることは解析上最も基本をなすものであり，多数の実験結果から原分布を統計的に推定する種々の手法が検討されている^{1)~5)}。材料の疲労寿命分布が3母数ワイブル分布でよく表示されることに基づき，著者らはワイブル分布を仮定した疲労寿命分布の各母数について，先にいくつかの統計的推定法をとりあげ推定結果を報告した^{4,5)}。その一つである最尤法については形状母数が1より大きく2以下の場合に regularity condition⁶⁾を満足せず，標本寸法を無限大にしても推定値の分布が正規分布に収束する保証がないという問題があった。またワイブル確率紙上の実験点に対する残差二乗和を最小とする位置母数を求め，そこで線形回帰を行って形状母数と尺度母数を求める第2の推定法については，位置母数推定の段階で

不合理な推定値を与える場合が頻発するため，そのまま母数推定に適用できないことがわかった。この問題を解決するためにワイブル確率紙上の実験点の配列の直線性が最も良好となる位置母数を求め，そこで線形回帰を行って形状母数と尺度母数を求める第3の方法（最適直線配置法と略称する^{4,5)}）を提案し，上記の不合理が解消されることを前報に示した。

本報では，さらに次の三つの母数推定法について前報と同様の検討を加え，得られた推定結果の分布特性を調べると同時に，前報の推定法を含めそれぞれの推定法のもつ特長や問題点を比較し，疲労試験結果から寿命分布を推定する際に採用すべき最適な母数推定法の選定をはかった。

- (a) 相関係数最大の原理と最小二乗法の組合せによる方法（相関係数法と略称）
- (b) 逐次近似最小二乗法
- (c) 標本中の3点から代数的に決る3母数より最適推定値を得る方法（3点法と略称）

* 原稿受理 昭和54年6月9日

** 正会員 立命館大学理工学部 京都市北区等持院北町

ここで(a)の方法はすでに W. Weibull により提案され、⁷⁾ 中川らも用いている推定法であり、また、(b)は西島らが使用している推定法である。したがって、前報で扱った最尤法と同様、推定法自体は新しいものではないが、これらの方法により推定されたワイブル3母数の分布特性については全く検討されておらず、推定法の優劣についても不明であり、これらの点を明確にしようとするのが本研究の主要な目的である。さらに、寿命分布の母数推定を目的とした疲労試験に際し重要な意味をもつ試験片の必要本数についても定量的な検討を加えた。

なお、母数推定にあたり基礎データとして多数の標本が必要であるが、本研究では前報と同様、モンテカルロ法を適用して予め定めた3母数をもつワイブル分布乱数を作成し、これを疲労寿命に関する標本と考え、5種類の標本寸法を選んでそれぞれ100組の標本を準備し、各組ごとに得られる推定値の分布特性を検討した。さらに一部、標本組数1000組の場合についても計算を行い、組数の分布特性に対する影響に関する検討を行った。

2 相関係数法による母数推定

2・1 推定法

3母数ワイブル分布の母数推定に伴う困難の一つは位置母数の推定であり、ここで扱う相関係数法は位置母数の推定に相関係数最大の原理を適用し、その後に最小二乗法によって他の二つの母数を推定しようというもので、前報で扱った残差二乗和最小の方法に代るものである。推定法の概略は次のようである。

3母数ワイブル分布の分布関数 $F(x)$ を

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x-c}{b} \right)^a \right\} \quad (1)$$

とし、

$$X = \ln(x-c), \quad Y = \ln \ln \frac{1}{1-F(x)} \quad (2)$$

$$a' = \frac{1}{a}, \quad b' = \ln b \quad (3)$$

とおくと

$$X = a'Y + b' \quad (4)$$

なる一次式を得る。したがって、 n 個の標本 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ について i 番目の標本 x_i に対する累積頻度 $F(x_i)$ を $i/(n+1)^{10)}$ とすれば、位置母数 c が既知のとき、

$$X_i = \ln(x_i - c), \quad Y_i = \ln \ln \frac{1}{1-F(x_i)} \quad (5)$$

としてワイブル確率紙上に n 個の点 (X_i, Y_i) が決まることになる。ここで

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad \left. \vphantom{\sum_{i=1}^n} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} S_x^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \\ S_y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \\ S_{xy} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

とおくと(4)式の直線のパラメータ a' , b' の推定値 $\hat{a}'$, $\hat{b}'$ は最小二乗法を用いて次式で与えられる。

$$\hat{a}' = \frac{S_{xy}}{S_x^2}, \quad \hat{b} = \bar{X} - \hat{a}' \bar{Y} \quad (7)$$

それゆえ、ワイブル分布の本来の母数推定値は(3)より

$$\hat{a} = \frac{1}{\hat{a}'}, \quad \hat{b} = \exp(\hat{b}') \quad (8)$$

となる。ここで位置母数 c を求めるためにワイブル確率紙上の n 個の点の座標 (X_i, Y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) に関する相関係数

$$\rho = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \quad (9)$$

に着目し、 c を変化させながら(9)式による ρ を反復計算して ρ が最大となる c の値を求め、これを位置母数の推定値 $\hat{c}$ とするのが本節の方法である。この c 値のもとで線形回帰を行い(7)式および(8)式を使用すれば形状母数推定値 $\hat{a}$ および尺度母数推定値 $\hat{b}$ が求まる。ここでは $c=10^5$ としているので、 c の推定にあたり $1/100$ の精度を得るため、繰返し計算における c の刻みを 10^3 とした。

2・2 推定結果

標本寸法 n としては前報と同様、3, 5, 10, 20, 50の5種類を選び、各寸法の標本を100組ずつ作成して、各組ごとに上述の方法で各母数を推定した。得られた推定値 $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ および予め与えた真の各母数値 a , b , c をもとに、

$$R_a = \frac{a}{\hat{a}}, \quad R_b = \left(\frac{\hat{b}}{b} \right)^{\hat{a}}, \quad R_c = \frac{\hat{c}}{c} \quad (10)$$

なる母数比ををとり、これを横軸にとって正規確率紙上に示した推定結果の分布がFig.1である。なお、モンテカルロ法による標本作成にあたり、前報との比較の便宜を考慮してここでは $a=0.8$, $b=c=10^5$ とした。

図より、各母数とも標本寸法の増大とともに推定値の分散が減少すると同時に、(10)式による母数比の中央値が1に収束する傾向がみられる。特に R_b については、標本寸法が $n=20$ の付近で急激に推定値の分散が減少する特徴がある。さらに、いずれの母数について $n=50$ 程度に達すると、推定値の分布が図中で直線上に近づき、標本寸法の増大とともに正規分布に収束することがわかる。なお、図中の破線は $n=10$ の標本を1000組作成し、各組ごとに同様の方法で得た推定値の分布であり、標本の組数を100組から1000組に

Fig. 1. Distributions of parameter ratios R_a , R_b and R_c obtained by correlation factor method ($a=0.8$)

増大させても、各母数推定値の分布特性に顕著な変化はないようである。

また、モンテカルロ法で標本を作成する際に $a=2.0$, $b=c=10^5$ なる母集団を想定した場合の母数推定結果の分布を紙面の都合上、形状母数についてのみ Fig. 2 に示した。図より、 $a=2.0$ の場合についても標本寸法の増大とともに、母数比 R_a の中央値が1に収束すると同時に分散が減少する傾向は $a=0.8$ の場合とよく一致する。ただし、標本寸法の増大に伴う分散の減少は $a=0.8$ の場合に比して、いくらか緩やかになる傾向がみられる。

Fig. 2. Distributions of parameter ratio R_a obtained by correlation factor method ($a=2.0$).

3 逐次近似最小二乗法による母数推定

3.1 推定法

この方法は位置母数 c の値として x_0 を最初に仮定し、最小二乗法を適用して3母数を求め、逐次近似法によって x_0 と真の c 値との差を許容値以下にするものである。ワイブル分布の分布関数は(1)式で与えられるが、後述の電算機による数値計算の都合上、

$$d=b+c \quad (11)$$

とおき、

$$F(x)=1-\exp\left\{-\left(\frac{x-c}{d-c}\right)^a\right\} \quad (12)$$

とかく。したがって、先と同様、

$$Y=\ln \ln \frac{1}{1-F(x)} \quad (2')$$

とおけば(12)式より次式を得る。

$$Y=a\{\ln(x-c)-\ln(d-c)\} \quad (13)$$

ここで(13)式を c に近いある値 x_0 においてテイラー展開して2次以上の項を無視すると

$$Y=a\{\ln(x-x_0)-\ln(d-x_0)\} + a\left(-\frac{1}{x-x_0}+\frac{1}{d-x_0}\right) \cdot (c-x_0) \quad (14)$$

となるから、

$$u=\ln(x-x_0), \quad v=\frac{1}{x-x_0}-\frac{1}{d-x_0} \quad (15)$$

$$\alpha=-a(c-x_0), \quad \beta=-a\ln(d-x_0) \quad (16)$$

とおくと(14)式は

$$Y=au+\alpha v+\beta \quad (17)$$

とかける。したがって、目的変数 Y が二つの説明変数 u , v をもつと考えると、 n 個の標本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ から $u-v-Y$ 空間に n 個の点 (u_i, v_i, Y_i) が決まることになり、この空間における線形回帰を行い(17)式のパラメータ a , α , β を求めることができる。

具体的な数値計算にあたり、 d は $F(x)=0.632$ に

対する x の値であるから, $F(x_i) = i/(n+1) = 0.632$ より $i = 0.632 \times (n+1)$ に最も近い整数を改めて i として, この x_i を仮りに d_0 として採用する. このとき c に近いある値 x_0 を与えれば n 個の x_i に対して, (15) 式より n 個の u_i, v_i が定まり, 同時に Y_i も (2) 式で決まるので, 最小二乗法を適用して次のとおり (17) 式のパラメータを求めることができる.⁹⁾¹¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= \frac{S_{vv}S_{uY} - S_{uv}S_{vY}}{S_{uu}S_{vv} - S_{uv}^2} \\ \hat{\alpha} &= \frac{S_{uu}S_{vY} - S_{uv}S_{uY}}{S_{uu}S_{vv} - S_{uv}^2} \\ \hat{\beta} &= \bar{Y} - \hat{a}\bar{u} - \hat{\alpha}\bar{v} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} S_{vu} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 \\ S_{uv} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2 \\ S_{uv} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) \\ S_{uY} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(Y_i - \bar{Y}) \\ S_{vY} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(Y_i - \bar{Y}) \\ \bar{u} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

である. (18) 式で求められた $\hat{a}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を用い, (16) 式から母数 c, d の推定値が次のように決る.

$$\hat{c} = x_0 - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{a}}, \quad \hat{d} = x_0 + \exp\left(-\frac{\hat{\beta}}{\hat{a}}\right) \quad (20)$$

さらに尺度母数の推定値は (11) 式より,

$$\hat{b} = \hat{d} - \hat{c} \quad (21)$$

で与えられる.

上記の手順に従って各母数推定値 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ が求まるが, 前述のとおり計算の過程で x_0 および d に仮りの値を与えているので, x_0 については x_1 の直下から小刻みに減少させ, d_0 については上で仮りに採用した値から小刻みに減少させながら上の計算を繰返し, $|\hat{c} - x_0|$ および $|\hat{d} - d_0|$ がともに充分小さくなったときの $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ を各母数推定値とすればよい. 本報では x_0 の刻みは 10^3 とし, d_0 についても 10^3 を刻みとして逐次計算を行い, $|\hat{c} - x_0|$ および $|\hat{d} - d_0|$ が最小値を通過する時点で計算を打ち切った.

3・2 推定結果

前節と同様, ここでも $a = 0.8, b = c = 10^5$ とし, $n = 3, 5, 10, 20, 50$ の 5 種類の標本寸法をもつ標本を 100 組ずつ作成し, 各組ごとに本報で得られた推定値の分布を Fig. 3 に示す. いずれの母数についても, 標本寸法の増大とともに推定値の分布は減少するが, 相関係数を基準にした前節の推定結果に比べ, $n = 50$ に達してもなおかなりの分散を伴うのがわかる.

Fig. 3. Distributions of parameter ratios R_a, R_b , and R_c obtained by iterative least squares method.

4 3点法による母数推定

4・1 推定法

ワイブル確率紙上に n 個の標本 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ をプロットし (Fig. 4), ●印で示すように後述の方法で 3 点を選んで $\{x_1, F(x_1)\}, \{x_2, F(x_2)\}, \{x_3, F(x_3)\}$ とするとき, 図中の破線で示すようにこの 3 点を通るワイブル分布関数を代数的に求めることができる. すなわち, この 3 点とはともに破線上にあるから, (1) 式で与えられるワイブル分布関数を満足して,

$$F_i = F(x_i) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x_i - c}{b}\right)^a\right], \quad (i = 1, 2, 3) \quad (22)$$

Fig. 4. Schematic representation of three points method on Weibull probability paper.

が成立するので、この3元連立方程式を解いて各母数推定値 $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ が一義的に決ることになる。

$$\ln \ln \frac{1}{1-F_i} = Y_i, \quad (i=1, 2, 3) \quad (23)$$

とおくと(23)式の $i=1$ とおいた式から次式を得る。

$$a = \frac{Y_1}{\ln \left(\frac{x_1 - c}{b} \right)} \quad (24)$$

(24)式を(23)式の $i=2$ および $i=3$ とおいた式に代入して整理すると

$$\ln b = \frac{Y_3 \ln(x_2 - c) - Y_2 \ln(x_2 - c)}{Y_3 - Y_2} \quad (25)$$

を得る。さらに(24), (25)式を(23)式の $i=2$ とした式に代入して a , b を消去すると

$$\frac{\ln(x_3 - c) - \ln(x_2 - c)}{(Y_3 - Y_2) \ln(x_1 - c) - Y_3 \ln(x_2 - c) + Y_2 \ln(x_3 - c)} = \frac{1}{Y_1} \quad (26)$$

となり、これが位置母数 c に関する一元方程式を与えるので、電算機による反復法でこれを解いて $\hat{c}$ を求めることができる。この $\hat{c}$ を(26)式へ代入して $\hat{b}$ が求まり、両者を(24)式へ代入して $\hat{a}$ が決まることになる。ここに、電算機で(26)式を解くにあたり、 c 値の刻みを 10^3 として反復計算し、両辺の差が最小となる c 値を $\hat{c}$ とした。

なお、3点 $\{x_1, F(x_1)\}, \{x_2, F(x_2)\}, \{x_3, F(x_3)\}$ の選び方については、その3点が標本全体の傾向を代表することが望ましく、図のように全標本を3グループに分割して各グループから一つずつ選び出して3点を設定する。このとき、3点の組をいくつも選定できるが、これらの各組ごとに上記の手順で3母数を推定し、各組について求められた3母数をもつ分布関数が決まる。こうして求められた分布関数は、例えば Fig. 4 中の破線のように図示され、このとき●印の3点のみでなく全標本について破線の分布関数とのX方向の残差二乗和を計算する。この操作を各組ごとに繰返し、破線に対する全標本の残差二乗和が最小となる分布関数を選べば、この分布関数はワイブル確率紙上で全標本によくフィットするものであるから、このときの各母数推定値を $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ とすればよい。^{*1}

*1 各組の母数推定値の中からこうして妥当な推定値をただ1組選出す方法は航空宇宙技術研究所、下河利氏氏の助言に負うものである。

4・2 推定結果

ここでも $a=0.8$, $b=c=10^5$ とし、5種類の標本寸法につきそれぞれ100組の標本を作成して、上記の代数学的方法でワイブル分布の3母数を推定した。Fig. 5 は得られた推定値の分布を先と同様の表示法で図示したもので、標本寸法の増大とともに推定値の分散が減少する傾向は変わらないが、形状母数について $n=50$ の場合の R_a の中央値は0.7程度となり、かなりのバイアスをもっている。

5 各推定法による推定結果の比較および考察

モンテカルロ法を用いて作成した実験結果をもとに3母数ワイブル分布の各母数について、これまでいく

Fig. 5. Distributions of parameter ratios R_a , R_b and R_c obtained by three points method.

つかの推定法を検討するとともに, それぞれの方法で得られる推定値の分布特性を調べた. 本節では, 前報の推定法を含む一連の母数推定法によって得られた推定値の分布特性を総合的に比較し, 各推定法のもつ得失を調べると同時に, 疲労試験結果から寿命分布の母数を推定する場合に採用すべき最適な推定法の選定をはかる. なお, 前報で扱った推定法のうち, ワイブル確率紙上の実験点に関する残差二乗和を最小とする位置母数を求め, そこで線形回帰を行う母数推定法は既に報告のとおり, 不合理な推定値を与える場合があるのでこれを除く次の5種類の推定法を比較検討する.

①最尤法(最尤方程式を解いて母数を推定する方法), ②最適直線配置法, (1節の緒言参照) ③相関係数法, ④逐次近似最小二乗法, ⑤3点法.

Fig. 6 はそれぞれの推定法で得られた R_a , R_b , R_c の中央値について, 標本寸法に伴う収束の状況を各母数ごとに示したもので, 上記の各推定法に対応する番号を図中に併記した. 図より, いずれの母数比につい

Fig. 6. Convergence of medians of R_a , R_b and R_c with increase of sample size; ① Maximum likelihood method, ② Optimum linear configuration method, ③ Correlation factor method, ④ Iterative least squares method, ⑤ Three points method.

ても推定法のいかんによらず $n < 10$ の標本寸法にあっては, かなりのバイアスをもつばかりでなく, 大きな変動が現れることもあり, 3母数ワイブル分布を適用して寿命分布を求める場合, $n < 10$ なる実験結果は不十分でこれより母数推定を行うことは避けるべきである. 次に $10 < n$ なる領域における各推定結果に着目すると, 中央値 $\bar{R}_a$ については②あるいは③の推定法が最も真の値に近い母数推定値を与えることがわかる. $\bar{R}_b$ についてはいずれも細線で囲んだ狭い領域に集中しており, 推定法による際だった差がみられない. $\bar{R}_c$ に関してはやはり②または③の推定法が最も優れており, $10 \leq n$ の標本寸法を用いれば, 位置母数推定値の不偏性が得られる.

つぎに, 各母数推定値のばらつきの程度と標本寸法の関係を上記の5種類の推定法について調べた結果を Fig. 7 に示す. ここで, ばらつきの程度を表す量としては, Fig. 1, 3, 5 などの正規確率紙上の曲線をもとに, 上側確率 0.159 のパーセント点 U および下側確率

Fig. 7. Convergence of the values of $(U-L)/2$ with increase of sample size; ① Maximum likelihood method, ② Optimum linear configuration method, ③ Correlation factor method, ④ Iterative least squares method, ⑤ Three points method.

0.159 のパーセント点 L を読み取り, 推定値のばらつきの指標として $(U-L)/2$ を求めてこれを縦軸にとった。パーセント点を示す記号 U , L には母数に応じて a , b , c の添字を付した。

前述のとおり, 中央値については $n=10$ 程度で真の値に収束する傾向があったのに対し, 推定値のばらつきについては, 図よりいずれの母数に関しても $n=20$ 程度で顕著な減少がみられる。大標本領域とくに $30 < n$ なる領域において各推定法によるばらつきの大小関係を注意して観察すると, いずれの母数推定値についても①, ②および③の推定法によるとき, そのばらつきがともに小さくなるのがわかる。なお, 上側, 下側確率として他の値を設定したパーセント点を用いてばらつきの程度を比較しても, $(U-L)/2$ の値そのものはもちろん変化するが, 各推定法の得失についてはほとんど変化が現れない。

上記②～⑤の推定法については, 原分布の形状母数を $a=2.0$ とした場合も, Fig. 2 に例示したように各母数推定値の分布特性に大きな変化は現れないが, 前報で論じたように①の最尤法による母数推定においては, 形状母数の大小により若干推定手順が異なり, とくに $1 < a \leq 2$ の場合には母数推定値の分布が正規分布に収束せず, 大標本を用いてもかなり分散が大きいことがわかっている。

以上の諸点を考慮すると, 3 母数ワイブル分布の母数推定法としては②の最適直線配置法, あるいは③の相関係数法のいずれかを採用すべきである。ここに②の推定法は前報に述べたとおり確率紙⁽¹²⁾⁽¹³⁾を用いて目視による試謬法で母数を求める従来の手順を電算機処理の便宜をはかり表式化したものであるが, ワイブル確率紙上の実験点の配列の直線性の良し悪しは本来, 相関係数の大小に支配されるので, その推定結果が③の推定法による推定結果とよく一致した性向をもつものと考えられる。それゆえ, ②または③のいずれの推定法を用いてもよい訳であるが, ②については直線性の判定に若干の任意性を伴う場合があるので, 前報および本報において検討した一連の母数推定法の中で, 筆者らは③の相関係数法を推奨する。さらに, 今後, 3 母数ワイブル分布を適用して寿命分布を明らかにするための疲労試験を実施する場合は, 同一応力レベルで少くとも30本程度の試験片を用いることが必要であり, できれば50本程度の試験片を用いることが望ましい。

6 結 言

3 母数ワイブル分布の各母数に関するいくつかの推定法を検討するとともに, モンテカルロ法を用いて作成した多数の実験結果をもとに母数推定を行い, それ

ぞれの方法で得られた推定値の分布特性を比較した。各推定法ごとに母数推定値の分布の中央値とばらつきの程度について標本寸法の増大に伴う収束の状況を詳細に調べた結果, 一連の母数推定法の中でワイブル確率紙上の実験点に対する相関係数を最大ならしめる c を位置母数推定値とし, ここで線形回帰を行って形状母数と尺度母数の推定値を得る方法が, 3 母数ワイブル分布の母数推定法として最も適切であることがわかった。また, 3 母数ワイブル分布を適用して寿命分布を明らかにすることを目的として疲労試験を実施する場合は, 同一応力レベルで少くとも30本程度の試験片を用いることが必要であり, できれば50本程度の試験片を用いることが望ましいという定量的な目安を得ることができた。

本研究の遂行にあたり, 1000 組の標本に関する母数推定については沼津高専, 岩谷隆史氏の協力を得た。また, 3 節の最小二乗法の取扱いは金属材料技術研究所, 西島敏氏のご教示に負うものであり, 4 節の代数学的推定法の中で最良の推定値を1組選定する手法に関しては航空宇宙技術研究所, 下河利行氏の助言を頂いた。ここに記して謝意を表する。さらに本研究は昭和53年度文部省科学研究費(一般研究C)の援助のもとに遂行されたものであることを付記する。

(昭和54年5月22日 日本材料学会第28期総会学術講演会にて講演)

参 考 文 献

- 1) Whittaker, I. C., and P. M. Besuner, Air Force Materials Laboratory, AFML-TR-69-65 (1969).
- 2) Donat, R. C., and V. J. Russo, Air Force Materials Laboratory, AFML-TR-74-198 (1975).
- 3) 石川 浩, 材料, **24**, No. 259~266, 講座「実働荷重下における機械・構造物疲労寿命の信頼性解析」(1975).
- 4) 田中道七, 酒井達雄, 材料, **28**, 304 (1979).
- 5) Tanaka, T., and T. Sakai, Proc. 22nd Jap. Congr. Mat. Res., p. 175 (1979).
- 6) 河田敬義, 丸山文行, 鍋谷清治, 数理統計, p. 215 (1970) 裳華房
- 7) Weibull, W., J. Appl. Mech., **18**, 293 (1951).
- 8) Kawamoto, M., and T. Nakagawa, Mem. Faculty of Eng., Kyoto Univ., p. 30 (1956).
- 9) 西島 敏, 私信 (1978).
- 10) Gumbel, E. J., Statistics of Extremes, p. 34 (1957) Columbia Univ. Press, New York
- 11) 竹内 啓, 数理統計学, p. 319 (1968) 東洋経済新報社
- 12) 真壁 肇, ワイブル確率紙の使い方, p. 42 (1970) 日本規格協会
- 13) 日本材料学会編, 金属材料強度試験便覧, p. 224 (1977).