疲労試験データの統計的整理*

西 島 敏**

Statistical Analysis of Fatigue Test Data

by

Satoshi NISHIJIMA

(National Research Institute for Metals, Tokyo)

Statistical fatigue data of various materials at different conditions are increasingly required by engineers for reliability design purposes. The present paper describes a new way of analysing fatigue data, which is promising to take out maximum statistical informations from ordinary small sample test results. The method is essentially based on examining the distribution in relative strength deviation of individual test data, evaluated against the mean strength at the considered life level. The Probit analysis using weighting coefficients, under the condition of a known variation coefficient, is quite suitable for the mean strength estimation. Starting with a provisional variation coefficient, the test data could be transformed into a set of relative deviation values in strength; a real variation coefficient is then evaluated according to the theory of multiply censored order statistics.

The proposed method could also be used most effectively in analysing a pile of small sample data sets plotted on a common strength scale, *e. g.*, the ratio against tensile strength of the material.

(Received June 25, 1979)

キー・ワード：疲労試験，統計的整理，少標本データ， $P-S-N$ 線図

1 緒 言

金属材料の疲労強度を統計量としてとらえ，信頼度または非破壊確率を設定した設計に取入れようとする考えが盛んになっている。この場合，基礎となるのは試験片による素材の疲労強度の性質であるが，それは通常比較的少数個の試験片によってしか求められないため，要求される非常に小さな非破壊確率に対する強度を推定するのは一般に困難である。大量生産品の場合などは製品の使用実績と試験片のデータとを関連付ける方法が現実的であろうが，一方，材料ロットに生じ得る化学成分や熱処理むらなどによる硬度などの変動，欠陥の分布，環境の変動など，影響因子をそれぞれの變動に分解し，最も不利になる組合せの生起確率を検討することもできよう。この意味で実用材料に関する強度の統計的データが整備されることは重要と考えられる。

著者らはこれまで各種の代表的な機械構造物材料について統計的疲労試験を行った結果を確率疲労曲線($P-S-N$ 曲線)として報告してきた。これらの試験は大むね1チャージの材料から130個程度の試験片を採

取し，10程度の応力レベルで試験した，標本数としては中程度のものである。下河らはアルミニウム合金薄板^{6)~8)}について250個以上の試験片を用いたデータを，またBastenaireらは5種類の鋼について580~940個の試験片⁹⁾¹⁰⁾を用いたデータを報告している。このような大標本のデータに対し，現実には1S-N線図当たり10個程度の試験片しか用いない少標本データの数は極めて多いのであって，これを統計的に取扱うことができればデータの有効利用という点で好都合と考えられる。

本報では以上の立場から，著者らが中標本データの整理に用いてきた重み付きプロット法を基本とするデータ解析法を見直し，少標本データに適用する場合の問題点について検討を加えたい。

2 疲労試験データにおけるばらつき

疲労試験において試験応力 S は明らかに独立変数であり，破壊までの繰返し数 N は S に依存した分布形をもつ確率変数である。 N の分布は繰返し数が N またはそれ以下で破壊した試験片が全体に占める割合，または累積確率 P と N の関係として求められる。 N のばらつきは試験片ごとの性質のばらつきや，試験条件の相違，破壊過程そのものにおける不確定性などの結果として生ずるものと考えられる。¹²⁾

* 原稿受理 昭和54年6月25日

** 正会員 金属材料技術研究所 東京都目黒区中目黒

一方、ある特定の繰返し数について、種々の応力レベル S で得られた破壊確率 P と S の関係を調べることができる。これはその繰返し数でちょうど破壊を生ずるような試験片の分布を調べていると考えられるから、つまりは試験片の強度の分布を調べることに他ならない。すなわち S はこの場合、試験応力ではなく時間強度と考えることになる。時間強度のばらつきについても原因は N のそれと同じに考えられる。

Fig. 1 は S25C 焼ならし材の平滑試験片による回転曲げ試験結果で、上述の N の分布と S の分布を模式的に書き込んである。 N の分布は S により著しく異り、当然ながら低応力域では観測が困難であるが、 S の分布はデータの範囲で任意の N について検討できる。 S の分布形を詳しく検討するためには膨大な標本数の試験を要するので一般には行われていないが、良くそろった材料ロット内では、通常正規分布であると仮定することが多い。これは S が試験片の強度に相当するという意味から妥当な仮定と思われるが、切欠き材など^{2)~4)}明らかに正規分布ではないと考えられる例もある。

Fig. 1. Typical data scatter in fatigue test results.

時間強度が正規分布をすると仮定したとき、その平均値 S_m は当然 N の関数であるが、標準偏差 s も一般には S_m (または N) により異る。筆者らの種々の熱処理鋼についての切欠き材も含めた経験では、変動係数 s/S_m が一定とみなしてよいものが多かったが、低応力域で s が著しく大きくなる例もあった。また試験応力が広範囲に変わらない場合は標準偏差一定とみなしても事実上大差がない。⁹⁾¹⁰⁾

Fig. 2 は Bastenaire らによる各種熱処理鋼の大標本試験の報告から、 $P-N$ 線図上で $P=16, 50$ および 84% に概当する N を読みとってプロットしたものである。図で $P=16$ および 84% に概当する N を滑らかに結んだ曲線は、上下方向の間隔が同一材料についてはほぼ一定で、 S の変動係数が一定とみなし得ることを示している。図から読みとった変動係数は図の上方から、約 $5.0, 3.4, 3.1, 3.9$ および 3.3% となるが、このように変動係数を用いると強度レベルの異なる材料間でばらつきの比較をするうえで都合が良い。なお図中*

Fig. 2. Comparison of data scatter bands for various steels.

Fig. 3. Median strength estimation by the Probit analysis method using weight, for a large sample data.

印は次に述べる重み付きプロビット法で推定した S_m 値で、○印で示した N の中央値と極めて良く合っている。参考のため、35CD4 (SCM 435 相当) 400℃ 調質材の $S-N$ プロットを Fig. 3 に示しておく。

3 重み付きプロビット法による解析

ここで重み付きプロビット法について整理しておく。いま応力レベル S_i における試験個数 n_i の試験片のうち、繰返し数 N までに観測された破壊個数が r_i であったとすると、破壊確率の観測値 p_i は r_i/n_i である。 r_i は確率変数で、観測に伴う誤差 (Sampling error) をもち、したがって p_i は誤差をもつ。

正規分布関数を

$$P(u) = \int_{-\infty}^u Z(u) du \quad (1)$$

と書く。ただし

$$Z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (2)$$

$$u = (S - S_m)/s \quad (3)$$

とする。(1)式の逆関数として $U(P)$ を定義したとすれば、(3)式から

$$U(P) = \frac{1}{s} \cdot S - \frac{S_m}{s} \quad (4)$$

と書ける。それゆえ、 S_i における $U(P)$ の観測値として $u_i = U(p_i)$ が得られたとして、これを(4)式にあてはめ、母数 S_m , s を推定することができる。これは周知のように正規確率紙上にプロットしたデータに直線をあてはめ、平均や標準偏差を求めることに他ならない。

p_i は上に述べたように誤差をもつが、これを変換した u_i の誤差分散は、期待される真の確率 P に依存し、

$$\text{Var}(u_i) = \frac{P(1-P)}{n_i Z^2} \quad (5)$$

である。そこで直線のあてはめに際しては重み

$$w_i = \frac{n_i Z^2}{P(1-P)} \quad (6)$$

を考え、(4)式の重み付き残差平方和を最小にするようにすればよい。もっとも、 u_i , w_i は S_m , s の関数なのでこの計算は通常の方法では行えない。そこで先ず適当な S_m , s を仮定して初期値とし、観測データ (S_i , p_i) を (S_i , u_i , w_i) の組に変換する。そして通常の最小自乗法の解のように、

$$\hat{s} = \frac{\sum w S^2 - (\sum w S)^2 / \sum w}{\sum w u S - \sum w S \cdot \sum w u / \sum w} \quad (7)$$

$$\hat{S}_m = \frac{\sum w S}{\sum w} - \hat{s} \cdot \frac{\sum w u}{\sum w} \quad (8)$$

を得る (簡単のため添字は省いた)。ここである確率 p に相当する真の u 値に近い u_0 において(1)式をテーラー展開し、

$$P(u) \doteq P(u_0) + Z(u_0) \cdot (u - u_0) = p$$

または

$$u = u_0 + \{p - P(u_0)\} / Z(u_0) \quad (9)$$

と考える。そこで(7), (8)の解を(3)に入れたときに定まる値を u_0 とし、(9)式により u , (6)式により w を求め直して $\hat{s}$, $\hat{S}_m$ を求め直すようにする。計算は数表を用いて手計算でもでき、通常は数回の繰返しで良く収束する。小型計算機を用いる場合は $P(u)$, $U(P)$ の近似式を用いると便利である。

Fig. 4 は(6)式の n_i を除いた重み係数を示したもので、たとえば $P=20\sim 80\%$ の範囲外では係数が急激に小さくなる様子がわかる。

Fig. 5 は S45C 調質鋼平滑材の中標本データを解析した例で、図中には試験片個数と、その応力で期待される破壊確率 ($U(P)$ 値) の95%信頼区間を示した。

Fig. 4. Weighting coefficient for the normal distribution.

Fig. 5. Stress response analysis by the Probit method using weight.

計算は通常の回帰問題にならない、付録に示すように

$$\text{Var}(\hat{u}) = \frac{1}{\sum w} + \frac{(S - \sum w S / \sum w)^2}{\{\sum w S^2 - (\sum w S)^2 / \sum w\}^2} \quad (10)$$

に基づいて行った。図から破壊確率50%を与える S_m の区間は $40.7 \sim 41.8$ kgf/mm² で比較的精度が良いが、こう配の逆数である s の区間はかなり大きく $0.44 \sim 2.67$ kgf/mm² になっていることがわかる。これは重み付きプロビット法が $p=50\%$ 付近のデータを主にとりこみ、 S_m から離れたデータをあまり評価しないためであって、このためにまた、データが必ずしも正規分布に従わない場合でも50%点の推定精度が良いことを特徴とする。先に示した Fig. 3 の曲線はこのようにして求めた S_m をなめらかに結んだもので、実験点の分布がもつ中心的傾向を良く表している。

なお本節の議論は正規分布を前提として行ってきたが、ワイブル分布など他の分布形についても(1)~(3)式を書きかえ、それに伴う変更を行うだけで全く同様のことが成立することを付言する。

4 順序統計による解析

S_m - N 曲線が得られれば、各試験片ごとの強度を S_m に対する偏差として評価し得る。時間強度の標準偏差が一定と仮定すれば $D=S-S_m$ を、変動係数が一定

と仮定すれば $R=S/S_m-1$ を個々のデータ点について評価すれば、これら全体は一つの統計量として母集団の性質を推定する手掛りを与える。著者らはこれを多重中途打ち切りのある順序統計量として取扱ってきた。

すなわち全データに小さいほうから順位 j をつけ、 j 以下のデータが現れる確率 p を求めて D または R との関係を検討するのである。 p としては正規分布を仮定する場合、全データ数を n として

$$p = \frac{j-0.5}{n} \quad (11)$$

とするのが標準偏差の推定精度が良いとされる。また分布不明のとき、メジアンランクの近似式をとれば、

$$p = \frac{j-0.3}{n+0.4} \quad (12)$$

を用いる。データの中に未破断試験片を含む場合、 j は

$$j = j_0 + \frac{n+1-j_0}{n+2-i} \quad (13)$$

として修正される。 i は未破断データを含めて数えた順番、 j_0 は考えている i 番目のデータの直前にある破断データに対し定められた順位数で、 $i=1$ のとき、 $j_0=0$ とする。

データは確率紙にプロットして正規性などを吟味するが、計算による場合は前節と同様に行う。重みは基本的には考えるべきであるが、簡単のためには用いなくてもよい。

5 少標本データへの拡張

前節の方法ではたとえば(12)式で p を評価するので全データ数が最低13個あれば、ほぼ5%点までの分布を検討できる。しかしそのためには S_m-N 曲線が必要である。一方、重み付きプロビット法は任意の N において少くとも2レベルの応力で $p(\neq 0, 1)$ が観測されている必要があるから、結局 S の刻みを s 程度に細かくとることになり、少標本にはならない。

しかし、もし変動係数 $v=s/S_m$ がわかっていたとすれば、(4)式の切片が与えられたことになるので、こう配だけを求めれば $\hat{s}$ が得られ、したがって $\hat{S}_m$ が定まる。(8)式に対応するものとしては、

$$\hat{S}_m = \frac{\Sigma w S^2}{v \Sigma w u S + \Sigma w S} \quad (14)$$

となる。この場合は少くとも1レベルの応力で $p(\neq 0, 1)$ が観測されているか、または2レベルで $p(=0, 1)$ が観測されているだけで良いから、 S の刻みは粗くても良く、1レベル1個以上の試験がなされていれば良い。すなわち少標本データに適用可能である。

変動係数 v には適当な初期値を与えておき、 $S-N$ 線図上で破断が観測された N の直前、直後において(14)式から $\hat{S}_m$ を求める。そして得られた2個の推定値の平均値をその N における $\hat{S}_m$ と考えるのである。計

算に際して(9)式のように u 値の修正を行いつつ繰返し収束させることは前と同様である。得られた $\hat{S}_m$ を用いて前述のようにその試験片の $D=S-\hat{S}_m$ または $R=S/S_m-1$ を評価し、順序統計量として s または v を再評価する操作を繰返す。一般に少標本データは $u=0$ の付近に分布するから、 v の多少の変動による $\hat{S}_m$ の変動は大きくない。

Fig. 6 は計算結果の一例で、上述のようにして求めた $\hat{S}_m$ が折れ線で示されている。この方法では S_m-N 曲線を求めないため、たとえば折れ線を平滑化した S_m-N 曲線から D や R を評価した結果と異なることに注意を要する。図示の例では両対数紙上で斜交双曲線となる方程式を S_m-N 曲線とし、データの分布は変動係数一定の正規分布に従うと仮定して最尤法によりあてはめた結果が曲線で示されているが、折れ線とよく一致している。このような方程式を用いると S_m-N 曲線の水平部の応力 E_0 、傾斜部のこう配 $-A$ 、折曲り点の位置 $D(\log N)$ 、折曲りの鋭さ C を数値化でき、図中の数値のようにまとめられるなど利点が多いと考えられる。

Fig. 6. Median strength estimation for a small sample data, by eq. (14).

6 少標本データの集合の解析

幾つかの少標本データを同一母集団に属するとみなして整理できれば、中標本ないし大標本データとして取扱い得ることになる。Fig. 7 は金材技研破れデータシートの試験から得られたもので、最近の国産規格材82チャージを集めたものである。これによれば各種の鋼について引張強度や硬度と回転曲げ強度とは良い対応関係にあることがわかる。

Fig. 8 はS35C鋼12チャージについての試験データを上述のことを参考にして引張強度に対して基準化した応力を縦軸にとり整理したものである。各チャージ3種類の熱処理があるため、個々の試験条件では20個足らずの少標本データにすぎないが、このようにすれば大標本データの取扱いができる。図中の等確率線は変動係数一定の正規分布を仮定して画いたものであるが、データの分布傾向を良く表している。

Fig. 9 はスポット溶接継手の繰返し引張せん断試験データで、板厚やナゲット径、溶接点数などが種々に

Fig. 7. Correlations between rotating bending fatigue strength and (a) tensile strength, and (b) Vickers hardness(Data due to NIRM Fatigue Data Sheets).

Fig. 8. P - S - N representation for a family of small sample data analysed on basis of relative stress to tensile strength.

異なるデータであるが、引張せん断強度を基準にして重ね合わせてある。この場合も重み付きプロビット法による解析が極めて有効に用いられている。

7 結 言

材料の疲労強度の統計的数値は設計データとしての要求が高まっている。多数の試験片を用いた大標本データは統計解析を行いやすく精度の高い母数推定などができるが、実用材料についてのデータを得にくい難点がある。この意味で豊富にデータを得ることのでき

Fig. 9. P - S - N representation for a family of small sample data on spot welded joints, analysed on basis of relative test load to tensile strength.

る少標本試験の結果から統計的性質を調べることができれば好都合である。

著者らはこれまで試験片数 130 個程度の中標本試験を種々の鋼やアルミニウム合金、溶接継手などについて行ってきたが、結果の整理には任意繰返し数において重み付きプロビット法で推定した平均値 S - N 曲線に対する各データ点の相対強度偏差を順序統計量として解析する方法をとった。本報ではこの方法を標本データに拡張するべく検討を行った。

重み付きプロビット法は時間強度の 50% 点を推定するのに優れているが、そのままでは少標本データに適用できない。しかし変動係数が既知の場合には確率紙上で切片を固定した直線のあてはめを行うことになるため、少標本データにおいても任意繰返し数で平均時間強度を推定することができる。そこで適当な変動係数を仮定して S - N 線図上の各データ点ごとに平均時間強度を推定し、試験応力との相対偏差を求めてこれを順序統計量として解析すれば、実際の変動係数を評価することができる。得られた変動係数が初めに仮定した値と著しく異なる場合はこの手続きを繰返せばよい。この方法による計算例を Fig. 6 に示した。

また複数の少標本データを、試験応力を材料の引張強度や硬度で基準化して重ね合わせるにより、大標本データとしての取扱いができるようにする可能性を示した。通常、そのようなデータは Fig. 8, 9 に見られるように極めて多レベルで、各レベルごとのデータ数に異なる著しいものとなるが、重み付きプロビット法によれば適確な解析が行える。このような解析はたとえば処理工程の変動などにより材料の引張強度が変動するとき、引張強度の分布の下限における疲労強度の下限を検討するなどといった目的に有用であろうと考えられる。

付 録

重み付きプロビット法における推定値の精度を考え

る。(4)式を $U=aS+b$ と書けば回帰推定値 $\hat{a}$ の分散は、

$$\begin{aligned} Var(\hat{a}) &= Var\left[\frac{\sum wuS - \sum wu \cdot \sum wS / \sum w}{\sum wS^2 - (\sum wS)^2 / \sum w}\right] \\ &= \Sigma\left[\left\{\frac{S - \sum wS / \sum w}{\sum wS^2 - (\sum wS)^2 / \sum w}\right\}^2 Var(u)\right] \end{aligned}$$

である。ところが(5)、(6)式から $Var(u)=1/w$ としたのであるから上式は簡単になり、次のようになる。

$$\therefore Var(\hat{a}) = \frac{1}{\sum wS^2 - (\sum wS)^2 / \sum w} \quad (\text{付1})$$

同様に $\hat{u}$ の分散は、

$$\begin{aligned} Var(\hat{u}) &= Var\left[\frac{\sum wu}{\sum w} + \hat{a}\left(S - \frac{\sum wS}{\sum w}\right)\right] \\ &= \Sigma\left[\left(\frac{w}{\sum w}\right)^2 Var(u)\right] + \left(S - \frac{\sum wS}{\sum w}\right)^2 Var(\hat{a}) \end{aligned}$$

$$\therefore Var(\hat{u}) = \frac{1}{\sum w} + \frac{(\sum wS - \sum wS / \sum w)^2}{\sum wS^2 - (\sum wS)^2 / \sum w} \quad (\text{付2})$$

となる。これは本文の(10)式と同一である。なお $\hat{S}_m$ の分散としては近似的に

$$Var(\hat{S}_m) = \hat{s}^2 \left\{ \frac{1}{\sum w} + \frac{(\hat{S}_m - \sum wS / \sum w)^2}{\sum wS^2 - (\sum wS)^2 / \sum w} \right\} \quad (\text{付3})$$

を用い得る。

次に切片 b が定数の場合の取扱いも同様にできる。

$$Var(\hat{a}) = Var\left[\frac{\sum wS(u-b)}{\sum wS^2}\right] = \Sigma\left[\left(\frac{wS}{\sum wS^2}\right)^2 Var(u)\right],$$

$$\therefore Var(\hat{a}) = \frac{1}{\sum wS^2} \quad (\text{付4})$$

$$Var(\hat{u}) = Var(\hat{a}S + b) = \frac{S^2}{\sum wS^2} \quad (\text{付5})$$

$$Var(\hat{S}_m) = \hat{s}^2 \frac{\hat{S}_m^2}{\sum wS^2} = v^2 \frac{\hat{S}_m^4}{\sum wS^2} \quad (\text{付6})$$

推定値の信頼区間は所要の大分布の値 t を用い、たとえば本文(14)式の $\hat{S}_m$ については(付6)式から、

$$\hat{S}_m \left(1 \pm tv \frac{\hat{S}_m}{\sum wS^2}\right) \quad (\text{付7})$$

のように考えればよい。なお本文5章で述べた最小試験レベル数の場合は自由度不足のため推定値の信頼区間は求められない。

参考文献

- 1) 西島 敏, 増田千利, 材料, **22**, 1097 (1973).
- 2) Nishijima, S., Proc. 1974 Symp. Mech. Behav. Materials, **1**, 417 (1974).
- 3) 西島 敏, 材料, **25**, 53 (1976).
- 4) 西島 敏, 阿部孝行, 材料, **26**, 50 (1977).
- 5) 西島 敏, 竹内悦男, 材料, **27**, 884 (1978).
- 6) 下河利行, 浜口泰正, 航技研報告, TR 360 (1974).
- 7) 下河利行, 浜口泰正, 航技研報告, TR 412 (1975).
- 8) 下河利行, 浜口泰正, 航技研報告, TR 431 (1975).
- 9) Bastenaire, F., M. Bastien, and G. Pomey, Acta Tech. Acad. Sci. Hungaricae, **35-36**, 7 (1961).
- 10) Bastenaire, F., M. Bastien, et G. Pomey, Mém. Sci. Rev. Méta, **68**, 645 (1971).
- 11) Pearson, E. S., and H. O. Hartley, "Biometrika Tables for Statisticians", **1**, 4 (1962) Cambridge Univ. Press
- 12) Nishijima, S., Proc. 15th Japan Congr. Mat. Research, **7** (1972).
- 13) Nishijima, S., et al., Trans. Nat. Res. Inst. Metals, **19**, 327 (1977); または日本機械学会講演論文集, 760-2, 101 (1976).
- 14) Nishijima, S., et al., Trans. Nat. Res. Inst. Metals, **20**, 314 (1978); または日本機械学会講演論文集, 750-1, 151 (1975).
- 15) 「統計数値表」, A章 (1972) 日本規格協会
- 16) Johnson, L. G., "The Statistical Treatment of Fatigue Experiments", p. 37 (1964) Elsevier
- 17) 下河利行, 航技研報告, TR 464 (1976).
- 18) 西島 敏, 阿部孝行, 日本機械学会講演論文集, 770-11, 71 (1977).
- 19) 「金属材料技術研究所疲れデータシート」, Nos. 1~4, (1978) 金属材料技術研究所
- 20) 岩元兼敏, 最近の自動車の強度問題とスポット溶接部強度に関するシンポジウム講演論文集, p. 82 (1978) 自動車技術会