弾性液晶中の波動*

徳岡 辰雄** 楠 秀 樹***

Waves in Elastic Liquid Crystals

by

Tatsuo TOKUOKA and Hideki KUSUNOKI

(Faculty of Engineering Kyoto University, Kyoto)

Waves propagating in elastic liquid crystals are investigated theoretically. The materials proposed by Coleman have two-phase properties, that is, fluid-like and solid-like. The liquid crystals are classified into two types, the axial one and the plane one. The axial liquid crystal has an intrinsic axis and it does not respond to the deformations which hold that axis to be invariant, and the plane liquid crystal has an intrinsic plane and it does not respond to the deformations which hold that plane to be invariant. The theory of singular surface is applied to the analysis. The waves which can propagate in the materials are divided into two types, one being the typical longitudinal waves which are similar to the wave in the fluid, and the other the particular transverse waves which reveal the solid-like property of the materials.

(Received Feb. 7, 1980)

キー・ワード：液晶，弾性，波動，理論

1 緒 言

有理連続体力学の完全な定式化は Noll¹⁾の研究に始まる。そこでかれは単純物質 (simple material) を定義した。すなわち、応力は変形こう配の全履歴によって決定される。特に弾性物質では、応力 $\mathbf{T}$ は現在の変形こう配 $\mathbf{F}$ の関数となり、その構成式は

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{F}) \quad (1)$$

で与えられる。ここで $\mathbf{G}$ は応答関数である。 $\mathbf{F}$ はある基準配置 κ と流通配置によって定まり、したがって $\mathbf{G}$ も κ に関係する。

もし、変形こう配 $\mathbf{H}$ によって基準配置を κ から κ' へ変換すれば、 $\mathbf{F}$ は $\mathbf{FH}$ になる。このとき、物質がこの変換に応答しないならば

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{G}(\mathbf{FH}) \quad (2)$$

であり、この物質は $\mathbf{H}$ という対称性をもつことになる。このような、体積を変えないユニモジュラな $\mathbf{H}$ の集合は“群”をつくる。これを“対称群” $\mathcal{S}$ (または、“等方群”，“同格群”ともいう) と呼ぶことにしよう。

物質の特性は対称群によって大きく決定される。たとえば、 $\mathcal{S}$ が直交群 $\mathcal{O}$ の真部分群であれば物質は“異方固体”であり、 $\mathcal{S} = \mathcal{O}$ ならば“等方固体”であり、

$\mathcal{O} \subset \mathcal{S}$ ならば“等方”である。また、 $\mathcal{S}$ がユニモジュラ群 $\mathcal{U}$ に一致すれば“流体”である。しかし、すべての物質は以上で尽きるものではない。すなわち、どのように基準配置を選んでも $\mathcal{S}$ は $\mathcal{U}$ に含まれず、また、含まない物質が存在する。このような物質は、直交群に含まれる要素 $\mathbf{H}$ については“固体的”であり、直交群に含まれない要素 $\mathbf{H}$ については“流体的”である。詳しい解説については、例えば、Truesdell と Noll²⁾, Truesdell³⁾, または、徳岡を参照されたい。

ある種の化合物は、その温度が完全な流体相より低温であり、完全な固体相より高温では、流体と固体の双方の性質を示すことが知られている。ともかく、このような物質は少なくとも理論的には存在可能であり、その性質を究明することは意義のあることである。いままで、このような物質については Coleman⁴⁾ が“液晶” (liquid crystal) と名付けており、Wang⁵⁾ は“準流体” (subfluid) と名付けて、それぞれ、構成式やその応答について報告している。しかし、その中を伝ばする波動については、これまで誰も報告していない。一般に、このような流体と固体双方の特性をもつ物質を Truesdell³⁾ は“流晶” (fluid crystal) と名付けている。

一般に、波動の挙動はそれが伝播する物質の性質を顕著に反映しているものである。特に、固体では縦波と横波が存在するが、流体では縦波のみが存在するよ

* 原稿受理 昭和55年2月7日

** 正会員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

*** 京都大学大学院 京都市左京区吉田本町

うに、固体と流体とでその中の波動が大きく変化する。それゆえ、固体と流体の性質を合せもつ流晶中の波動を解析することは極めて興味深いことと思われる。

ここでは、Coleman⁵⁾によって与えられた幾つかの液晶について、その中を伝播する波動を考察することしよう。

2 弾 性 液 晶

すべての弾性物質の構成式は(1)式で表される。特に、対称群がユニモジュラ群 $\mathcal{U}$ に一致すれば流体となり、構成式は

$$\mathbf{T} = -p(\rho)\mathbf{1} \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $p(\rho)$ は圧力、 ρ は質量密度である。応力の行列表示は、任意の正規直交座標系で

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (4)$$

となる。よって、流体はせん断力をささええない。

Coleman が定義した液晶は次のような物質である。その物質は一本の“特選軸” $\mathcal{V}^{(1)}$ 、または一枚の“特選面” $\mathcal{V}^{(2)}$ をもつ。ここでは、特選軸をもつ物質を“軸液晶”(axial liquid crystal)、特選面をもつ物質を“面液晶”(plane liquid crystal) と呼ぶことにしよう^{*1}。

2・1 軸液晶の構成式

特選軸の単位ベクトルを $\mathbf{e}$ とする。

$$\mathbf{H}\mathbf{e} = \pm \mathbf{e}, |\det \mathbf{H}| = 1 \quad (5)$$

をみたす基準配置の変換テンソル $\mathbf{H}$ を考える。これによって軸上の点は不変か、または反対方向に移るだけだが、軸以外の点は体積を不変にする以外任意に移動する。このような $\mathbf{H}$ の集合は群 $\mathcal{S}(\mathcal{V}^{(1)})$ をつくる。対称群が $\mathcal{S}(\mathcal{V}^{(1)})$ を含む流体に一致しない物質は液晶である。事実、 $\mathcal{S}(\mathcal{V}^{(1)})$ は $\mathcal{U}$ と一致せず、 $\mathbf{e}$ を軸とする回転および形状を変化さす要素を含んでいる。この物質を“軸液晶1型”と呼ぶことにしよう。

基準配置で、ある物体点 $\mathbf{X}$ の座標を $X_K (K=1, 2, 3)$ とし、変形によって $\mathbf{x}$ 、 $x_k (k=1, 2, 3)$ に移るとする。変形は“変形こう配”

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, F_{kK} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \quad (6)$$

によって定まる。ベクトル $\mathbf{e}$ は

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{F}\mathbf{e} \quad (7)$$

へ移る。変形後の特選軸方向の単位ベクトルは

$$\mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{f}}{f} \quad (8)$$

となる。ここで、 $f \equiv |\mathbf{f}|$ である。

軸液晶1型の構成式は

$$\mathbf{T} = -p(\rho, f)\mathbf{1} + \alpha(\rho, f)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (9)$$

*1 軸液晶、面液晶という名称は著者の与えたものである。

で与えられる^{*2}。ここで、 $p(\rho, f)$ 、 $\alpha(\rho, f)$ は物質関数で $\alpha \neq 0$ であり、 $\otimes$ はテンソル積である。 $\mathbf{u}$ を第1座標軸とし、これに垂直な互いに直交する2軸を、第2、第3座標軸とすると、(9)式の行列表示は

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -p + \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (10)$$

で与えられる。

また、Coleman は $\mathcal{S}(\mathcal{V}^{(1)})$ を拡張して、特選軸上の点はその上を伸縮してもよい場合を考え、

$$\mathbf{H}\mathbf{e} \in \mathcal{V}^{(1)}, |\det \mathbf{H}| = 1 \quad (11)$$

をみたす $\mathbf{H}$ の集合として群 $\mathcal{L}(\mathcal{V}^{(1)})$ を考えた。

対称群が $\mathcal{L}(\mathcal{V}^{(1)})$ を含む流体に一致しない物質を“軸液晶2型”と呼ぶことにしよう。この物質は Wang の定義した“準流体2型”に一致する。構成式は

$$\mathbf{T} = -p(\rho)\mathbf{1} + \alpha(\rho)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (12)$$

で与えられる。行列表示は同じく(10)式となる。

2・2 面液晶の構成式

つぎに、特選面 $\mathcal{V}^{(2)}$ を考え、その上に任意の2ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ をとる。

$$\mathbf{H}\mathbf{e}_\Gamma = \pm \mathbf{e}_\Gamma, |\det \mathbf{H}| = 1, (\Gamma=1, 2) \quad (13)$$

をみたす $\mathbf{H}$ を考える。複号は同順である。この $\mathbf{H}$ によって $\mathcal{V}^{(2)}$ 上の任意のベクトル $\mathbf{w}$ は

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \pm \mathbf{w} \quad (14)$$

となり、面は不変であるか、原点を通る法線 $\mathbf{e}_3$ のまわりに 180° の回転を行うかである。この $\mathbf{H}$ の集合は群 $\mathcal{S}(\mathcal{V}^{(2)})$ をつくる。対称群が $\mathcal{S}(\mathcal{V}^{(2)})$ を含む物質で流体に一致しないものは液晶である。事実、 $\mathcal{S}(\mathcal{V}^{(2)})$ は $\mathbf{u}$ に一致せず、 $\mathbf{e}_3$ まわりの 360° または 180° 回転および形状を変化さす要素を含んでいる。この物質を“面液晶1型”と呼ぶことにしよう。構成式は

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -p(\rho, f_1, f_2, g)\mathbf{1} + \alpha_1(\rho, f_1, f_2, g)\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \\ & + \alpha_2(\rho, f_1, f_2, g)\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 \\ & + \beta(\rho, f_1, f_2, g)(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_1) \end{aligned} \quad (15)$$

で与えられる。ここで、

$$\mathbf{f}_\Gamma \equiv \mathbf{F}\mathbf{e}_\Gamma, \mathbf{u}_\Gamma \equiv \frac{\mathbf{f}_\Gamma}{f_\Gamma} \quad (\Gamma=1, 2) \quad (16)$$

$f_\Gamma \equiv |\mathbf{f}_\Gamma|$ 、 $g \equiv \sqrt{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2}$ であり、 $p, \alpha_1, \alpha_2, \beta$ は物質関数であり、 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ の中少くとも一つは零でない。

$\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ で張る平面 Π 上に適当に第1、第2座標軸をとり、平面に垂直に第3座標軸をとると

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -p + \alpha_1' & \beta' & 0 \\ \beta' & -p + \alpha_2' & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (17)$$

*2 (9)式および(15)式の表示は Coleman⁵⁾ のものとことなることに注意されたい。

となる。ここで、 $\alpha'_1, \alpha'_2, \beta'$ は $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ の線型結合である。これより、 Π 上では固体的であるが、 Π と法線の間にはせん断応力は働かないことがわかる。

また、Coleman は言及していないが、特選面上の点はどのように面上の点に移動してもよい場合を考える。すなわち、すべての $\mathbf{w} \in \mathcal{V}^{(2)}$ で

$$\mathbf{H}\mathbf{w} \in \mathcal{V}^{(2)}, |\det \mathbf{H}| = 1 \quad (18)$$

をみたす $\mathbf{H}$ の集合 $\mathcal{H}$ ($\mathcal{V}^{(2)}$) が考えられる。対称群が $\mathcal{H}$ ($\mathcal{V}^{(2)}$) を含む流体に一致しない物質を“面液晶 2 型”と呼ぶことにしよう。これは Wang の準流体 3 型”に当る。構成式は

$$\mathbf{T} = -p(\rho)\mathbf{1} + \alpha(\rho)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad (19)$$

である。ここで、 $\mathbf{e}_3$ を特選面の単位法線であり、

$$\mathbf{h} = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{e}_3, \mathbf{v} \equiv \frac{\mathbf{h}}{h} \quad (20)$$

$h \equiv |\mathbf{h}|$ であり、 $\mathbf{v}$ は変形後の特選面 Π の法線ベクトルを表し、 $(\mathbf{F}^{-1})^T$ は $\mathbf{F}^{-1}$ の転置である。

$\mathbf{v}$ を第 1 座標軸とし、 Π 上に第 2, 第 3 座標軸をとると (10) 式の行列表示がえられる。これより Π 面上では流体的であることがわかる。

3 流体中の波動

波動としては“特異曲面論”による“加速度波”を採用しよう。物体中を速度 U で伝ばする特異面 $\mathcal{S}$ を考える。波面 $\mathcal{S}$ の両側で変位 $x_k(\mathbf{X}, t)$ とその 1 回微分 $\dot{x}_k$, $x_{k,K} \equiv \partial x_k / \partial X_K$ は連続であるが、変位の 2 回微分 $\ddot{x}_k$, $\ddot{x}_{k,K} \equiv \partial \dot{x}_k / \partial X_K$, $x_{k,KL} \equiv \partial^2 x_k / \partial X_K \partial X_L$ は“跳び”をもつと仮定する。跳びを $[]$ で表す。加速度の跳び

$$a_k \equiv [\ddot{x}_k] \quad (21)$$

を振幅ベクトルとすると、“適合条件”により、

$$\left. \begin{aligned} [\dot{x}_{k,K}] &= -\frac{1}{U} a_k x_{p,K} n_p \\ [x_{k,KL}] &= \frac{1}{U^2} a_k x_{p,K} x_{q,L} n_p n_q \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となる。⁷⁾ ここで、 $\mathbf{n}$ は $\mathcal{S}$ の伝ば方向の単位ベクトルであり、繰返された指標については“和の規約”を適用する。

質量の保存則は

$$\rho \det \mathbf{F} = \rho_\kappa \quad (23)$$

で与えられる。ここで ρ_κ は基準配置での質量密度である。これより、

$$\rho_{,l} = -\rho x_{m,KL} X_{K,l} X_{L,m} \quad (24)$$

をえる。適合条件 (22) より

$$[\rho_{,l}] = -\frac{\rho}{U^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) n_l \quad (25)$$

となる。

一般に、運動式

$$T_{kl,l} + \rho b_k = \rho \ddot{x}_k \quad (26)$$

が波面の両側で成り立つ。ここで b_k は物体力であり

連続と仮定する。(26) 式の跳びをとり、“跳びの関係”

$$[T_{kl,l}] = \rho a_k \quad (27)$$

をえる。

流体の構成式 (3) より

$$T_{kl,l} = -\frac{dp}{d\rho} \rho_{,k}$$

となるから

$$U^2 [T_{kl,l}] = \rho \frac{dp}{d\rho} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) n_k$$

であり、(27) 式に代入して伝ば条件

$$\rho \frac{dp}{d\rho} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \rho U^2 \mathbf{a} = 0 \quad (28)$$

をえる。これと $\mathbf{n}$ および $\mathbf{n}$ に垂直な任意のベクトル $\mathbf{t}$ のスカラー積をとり、

$$\rho \left(\frac{dp}{d\rho} - U^2 \right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad -\rho U^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}) = 0 \quad (29)$$

をえる。よって、伝ば速度

$$U^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (30)$$

の縦波が存在し、横波は存在しないという衆知の結果がえられる。

4 軸液晶中の波動

特選軸を第 3 座標軸にとると (7) 式より $f_k = x_{k,3}$ である。よって、

$$\left. \begin{aligned} f_{,l} &= \frac{1}{f} u_m x_{m,3K} X_{K,l}, \\ u_{k,l} &= \frac{1}{f} (x_{k,3K} - u_k u_m x_{m,3K}) X_{K,l} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

である。適合条件 (22) より

$$\left. \begin{aligned} [f_{,l}] &= \frac{1}{U^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) n_l, \\ [u_{k,l}] &= \frac{1}{U^2} \{ a_k - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) u_k \} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) n_l \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

をえる。

まず軸液晶 1 型中の波動について考察しよう。構成式 (9) より

$$\begin{aligned} T_{kl,l} &= -\frac{\partial p}{\partial \rho} p_{,k} - \frac{\partial p}{\partial f} f_{,k} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \rho} p_{,l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \alpha}{\partial f} f_{,l} \right) u_k u_l + \alpha (u_{k,l} u_l + u_k u_{l,l}) \end{aligned} \quad (33)$$

となるから

$$\begin{aligned} U^2 [T_{kl,l}] &= \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 a_k \\ &\quad + \left\{ \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) - \frac{\partial p}{\partial f} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right\} n_k \\ &\quad + \left\{ \left(\alpha - \rho \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} \right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \right. \\ &\quad \left. - \left(2\alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial f} \right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right\} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) u_k \end{aligned} \quad (34)$$

をえる。よって、跳びの関係 (27) より伝ば条件

$$\begin{aligned} &\{ \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 - \rho U^2 \} \mathbf{a} \\ &\quad + \left\{ \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) - \frac{\partial p}{\partial f} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right\} \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \left(\alpha - \rho \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} \right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) - \left(2\alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial f} \right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right\} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} = 0 \quad (35)$$

がえられる。

4・1 伝ば方向が特選軸に平行な場合

このとき、 $\mathbf{n} \parallel \mathbf{u}$ である。 $\mathbf{n}$ に垂直な任意のベクトルを $\mathbf{t}$ とし、(35)式と $\mathbf{n}$ および $\mathbf{t}$ とのスカラ積をとると

$$\left\{ \rho \frac{\partial(p-\alpha)}{\partial \rho} - \frac{\partial(p-\alpha)}{\partial f} - \rho U^2 \right\} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (36)$$

$$(\alpha - \rho U^2) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}) = 0$$

となる。これより

$$U^2 = \frac{\partial(p-\alpha)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p-\alpha)}{\partial f} \quad (37)$$

で定まる伝ば速度をもつ縦波と、

$$U^2 = \frac{\alpha}{\rho} \quad (38)$$

で定まる伝ば速度をもつ横波が存在する。

4・2 伝ば方向が特選軸に垂直な場合

このとき、 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ である。よって(35)式は

$$\rho \left\{ -U^2 \mathbf{a} + \frac{\partial p}{\partial \rho} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right\} = 0 \quad (39)$$

となる。これは流体の伝ば条件(28)と同型である。 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ ならば $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ となり波は存在しない。

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ ならば $\mathbf{a} \not\parallel \mathbf{n}$ であり、

$$U^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (40)$$

で定まる伝ば速度をもつ縦波が存在する。横波は存在しない。

4・3 伝ば方向が特選軸に平行でも垂直でもない場合

$\mathbf{u}$ と $\mathbf{n}$ に垂直なベクトルを $\mathbf{t}$ とする。(35)式と $\mathbf{t}$ とのスカラ積をとり

$$\{ \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 - \rho U^2 \} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}) = 0 \quad (41)$$

をえる。よって

$$U^2 = \frac{\alpha}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 \quad (42)$$

で定まる伝ば速度をもち、特選軸に垂直な振幅をもつ横波が存在する。

その他の波の伝ば速度は U^2 についての2次方程式の根で与えられる。そして純粋な縦波でも横波でもない波動になる。詳細については省略しよう。

4・4 軸液晶2型中の波動

軸液晶2型の構成式(12)は同1型の構成式(9)の物質関数 p , α が ρ のみの関数である場合に相当する。それゆえ、2型中の波動は1型中の表式中で f での微分の項を除去したもので与えられる。

$\mathbf{n} \parallel \mathbf{u}$ の場合の縦波は

$$U^2 = \frac{d(p-\alpha)}{d\rho} \quad (43)$$

で定まる伝ば速度をもち、 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ の場合の縦波は(30)式で定まる伝ば速度をもつ。

5 面液晶中の波動

面液晶1型の構成式(15)は軸液晶1型の構成式(9)と類似の構造をもっている。それゆえ、4節で用いた方法によってその中の波動について解析を進めることができ、数式はかなり複雑になるが、同様な結論がえられる。それゆえ、ここでは記述を省略することにしよう。以下では面液晶2型について考察する。

特選面の法線 $\mathbf{e}$ を第3座標軸にとる。(20)式より

$$v_{k,l} = \frac{1}{h} (X_{3,kl} - v_k v_m X_{3,lm}) \quad (44)$$

となる。また、 $X_{3,p} x_{p,K} \delta_{3K}$ を x_l で微分して $X_{K,m}$ をかけて

$$X_{3,lm} = -x_{p,KL} X_{3,p} X_{L,l} X_{K,m} \quad (45)$$

をえる。これらより

$$[v_{k,l}] = \frac{1}{U^2} \{ -n_k n_l + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) v_k n_l \} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \quad (46)$$

がえられる。

面液晶2型の構成式(19)より

$$T_{kl,i} = -\frac{dp}{d\rho} \rho_{,k} + \frac{d\alpha}{dp} v_k v_l \rho_{,i} + \alpha (v_{k,i} v_l + v_k v_{l,i}) \quad (47)$$

となる。よって(25), (40)式より

$$U^2 [T_{kl,i}] = \rho \left\{ \frac{dp}{d\rho} n_k - \frac{d\alpha}{d\rho} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) v_k \right\} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) - \alpha \{ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) n_k + (1 - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2) v_k \} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \quad (48)$$

となり、跳びの関係(27)より伝ば条件

$$\begin{aligned} & -\rho U^2 \mathbf{a} + \left\{ \rho \frac{dp}{d\rho} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) - \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right\} \mathbf{n} \\ & - \left\{ \rho \frac{d\alpha}{d\rho} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right. \\ & \left. + \alpha (1 - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \right\} \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

をえる。

5・1 伝ば方向が特選面に垂直な場合

このとき、 $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$ である。特選面上の任意のベクトルを $\mathbf{t}$ とし、(49)式と $\mathbf{n}$ および $\mathbf{t}$ とのスカラ積をとると

$$\left\{ \rho \left(\frac{d(p-\alpha)}{d\rho} - U^2 \right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad -\rho U^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}) = 0 \right\} \quad (50)$$

となる。これより(49)式で定まる伝ば速度をもつ縦波が存在する。横波は存在しない。

5・2 特選面上を伝ばする場合

このとき、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ である。(49)式と、 $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}$ および $\mathbf{v}$ とのスカラ積をとり、

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho \left(\frac{dp}{d\rho} - U^2 \right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ & -\rho U^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}) = 0, \\ & (\alpha - \rho U^2) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Table I. Propagation velocities and wave properties of elastic liquid crystals.

Material	Axial elastic liquid crystal, type 1		Axial elastic liquid crystal, type 2		Plane elastic liquid crystal, type 2	
Propagation direction	$\mathbf{n} \nparallel \mathbf{u}$	$\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$	$\mathbf{n} \nparallel \mathbf{u}$	$\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$	$\mathbf{n} \perp \Pi$	$\mathbf{n} \nparallel \Pi$
Longitudinal wave	$\sqrt{\frac{\partial(p-\alpha)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p-\alpha)}{\partial f}}$	$\sqrt{\frac{\partial p}{\partial\rho}}$	$\sqrt{\frac{\partial(p-\alpha)}{\partial\rho}}$	$\sqrt{\frac{\partial p}{\partial\rho}}$	$\sqrt{\frac{\partial(p-\alpha)}{\partial\rho}}$	$\sqrt{\frac{\partial p}{\partial\rho}}$
Transverse wave	$\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}$	None	$\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}$	None	None	$\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} (\mathbf{a} \perp \Pi)$
Wave property	Solid-like	Fluid-like	Solid-like	Fluid-like	Fluid-like	Solid-like

をえる。ここで $\mathbf{t}$ は $\mathbf{n}$ と $\mathbf{v}$ に垂直なベクトルである。よって、(30)式で定まる伝ば速度をもつ縦波と、(33)式で定まり、特選面の法線方向の偏りをもつ横波が存在する。特選面に平行な偏りをもつ横波は存在しない。

5・3 伝ば方向が特選面に対して傾斜している場合

$\mathbf{n}$ と $\mathbf{v}$ に垂直なベクトルを $\mathbf{t}$ とする。(49)式と $\mathbf{t}$ とのスカラ積をとると(50)式の第2式がえられる。よって、振幅ベクトルは $\mathbf{n}$ と $\mathbf{v}$ で張る平面内にあることがわかる。この場合、伝ば速度は U^2 についての2次方程式の根によって与えられる。そして、純粋な縦波でも横波でもない波動になる。詳細は省略しよう。

なお、前節および本節で求めた伝ば速度を定める式は速度の二乗を与える式である。それゆえ、それらの値が正の場合にのみ波は存在し、負の場合には存在しない。

前節および本節で求めた伝ば速度と波動の種類をまとめると Table I となる。縦波において $p-\alpha$ が現れるのは、伝ば方向の法線応力が $-(p-\alpha)$ となるからである。

6 考 察

波の性質を詳しく吟味するために、まず弾性液晶の変形と応力の応答について考えてみよう。

流体はその構成式(3)からわかるように

$$|\det \mathbf{F}| = 1 \quad (52)$$

をみたす任意の変形こう配について応答しない。

軸液晶1型はその構成式(9)からわかるように、

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \pm 1 & \mu & \nu \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}, \quad \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = \pm 1 \quad (53)$$

で与えられる変形について応答しない。ここで、基準配置での特選軸 $\mathbf{e}$ を第1座標軸にとり、 μ, ν は任意の値である。よって、 $\mathbf{e}$ に垂直な平面を Π_1 とすると、 Π_1 上での面積を保つ任意の変形に対して応答せず流体的性質をもつ。また、(53)式より Π_1 を $\mathbf{e}$ へ傾けるせん断変形については応答せず流体的であり、 $\mathbf{e}$ を Π_1 へ傾けるせん断変形については応答して固体的であることがわかる。

軸液晶2型では

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}, \quad \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = \pm 1 \quad (54)$$

の変形に対して応答せず、1型と同じ結論がえられる。

面液晶2型ではその構成式(19)からわかるように、

$$[(\mathbf{F}^{-1})^T] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \mu & \nu & \lambda \end{bmatrix}, \quad \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = \pm 1 \quad (55)$$

で与えられる変形について応答しない。ここで基準配置での特選面 Π_2 の法線 $\mathbf{e}_3$ を第3座標軸にとり、 μ, ν は任意である。(55)式より

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} a' & b' & \mu' \\ c' & d' & \nu' \\ 0 & 0 & \lambda' \end{bmatrix}, \quad \left| \begin{array}{cc} a' & b' \\ c' & d' \end{array} \right| = \pm 1 \quad (56)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} a' &\equiv \lambda d, & b' &\equiv -\lambda c, & c' &\equiv -\lambda b, & d' &\equiv \lambda a, \\ \lambda' &\equiv ad - bc, & \mu' &\equiv \mu c - \mu d, & \nu' &\equiv \mu b - \nu a \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

である。よって、 Π_2 上での変形については流体的性質をもつ。そして、法線 $\mathbf{e}_3$ を Π_2 へ傾けるせん断変形については応答せず流体的であり、 Π_2 を $\mathbf{e}_3$ へ傾けるせん断変形については応答して固体的であることがわかる。

以上の応答による性質をまとめると Table II となる。

Table II. Responses of elastic liquid crystals.

Material	Axial elastic liquid crystal	Plane elastic liquid crystals, type 2
Fluid-like response	Deformation on Π_1	Deformation on Π_2
	Shear for $\Pi_1 \rightarrow \mathbf{e}$	Shear for $\mathbf{e}_3 \rightarrow \Pi_2$
Solid-like response	Shear for $\mathbf{e} \rightarrow \Pi_1$	Shear for $\Pi_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$

一般に、力学的波動は物質のもつ慣性と変形に対する復元力双方の作用によって存在するものである。それゆえ、もし、復元力が発生しない変形があれば、その変形のみを伴う波動は存在することができない。

波動に伴う変形を正弦波によって考えてみよう。 $\mathbf{a}$ を振幅、 $\mathbf{n}$ を伝ば方向の単位ベクトル、 k を波数、 ω を円振動数とする正弦波による変形は複素表示で

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \exp\{i(\mathbf{kn} \cdot \mathbf{X} - \omega t)\} + \mathbf{X} \quad (58)$$

で与えられる。よって、(6)式より変形こう配は

$$\mathbf{F} = i\mathbf{ka} \otimes \mathbf{n} \exp\{i(\mathbf{kn} \cdot \mathbf{X} - \omega t)\} + \mathbf{1} \quad (59)$$

となる。ゆえに、 $\mathbf{a}$ を第 k 座標軸、 $\mathbf{n}$ を第 n 座標軸にとれば、 $F_{kn} = 1 + ika \exp\{i(\mathbf{kn} \cdot \mathbf{X} - \omega t)\}$ となり、他の成分は δ_{ij} である。

縦波では $\mathbf{a} \parallel \mathbf{n}$ であり、変形こう配の主対角線上の一つの成分が1と異なる値になり、 $|\det \mathbf{F}| \neq 1$ となる。流体、軸液晶、面液晶すべては体積を変える変形には応答するから縦波は存在することができる。

横波では $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$ であり、変形こう配は0でないせん断成分をもつ。これはベクトル $\mathbf{n}$ をベクトル $\mathbf{a}$ の方向へ傾けるせん断変形を表す。したがって、もし物質が固体の性質によってこのせん断変形に応答するならば横波は存在するが、もし流体的性質によって応答しないならば横波は存在することができない。

Table II からわかるように、軸液晶では特選軸 $\mathbf{e}$ を $\mathbf{e}$ に垂直な平面 Π_1 方向へ傾けるせん断変形については応答し、 Π_1 を $\mathbf{e}$ へ傾けるせん断変形については応答しないから、 $\mathbf{e}$ 方向へ伝ばする横波は存在し、 Π_1 上を伝ばする横波は存在しないことが予想される。また、面液晶2型では特選面 Π_2 を法線 $\mathbf{e}_3$ の方向へ傾けるせん断変形については応答し、 $\mathbf{e}_3$ を Π_2 へ傾けるせん断変形については応答しないから、 Π_2 上を伝

ばする横波は存在し、振幅ベクトルは法線方向を指す。しかし、法線方向に伝ばする横波は存在しないことが予想される。この予想は Table I の結果とよく一致している。

参 考 文 献

- 1) Noll, W., Arch. Rational Mech. Anal., **2**, 197 (1958).
- 2) Truesdell, C., and W. Noll, "The Non-Linear Field Theories of Mechanics", Handbuch der Physik, Vol. III/3, ed. by S. Flügge (1965), Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. New York
- 3) Truesdell, C., "A First Course in Rational Continuum Mechanics", **1**, Chap. 4 (1977) Academic Press, New York. San Francisco. London
- 4) 徳岡辰雄, 機械の研究, **28**, 683, 791 (1976).
- 5) Coleman, B. D., Arch. Rational Mech. Anal., **20**, 41 (1965).
- 6) Wang, C.-C., Arch. Rational Mech. Anal., **20**, 1 (1965).
- 7) Truesdell, C., and R. A. Toupin, "The Classical Field Theories", Handbuch der Physik, Vol. III/1, ed. by S. Flügge (1960) Chap. C., Springer-Verlag, Berlin. Göttingen. Heidelberg