一次元非線型弾性物質中を伝ばする波の変形*

徳岡辰雄**

Distortion of Propagating Wave in One-Dimensional
Non-Linear Elastic Material

by

Tatsuo TOKUOKA

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

The distortion of wave-form is investigated theoretically for the case, where the wave propagates in one-dimensional non-linear elastic materials. The constitutive equation is given by a non-linear stress-strain relation. The geometrical acoustics is applied and the wave displacement is assumed to be a product of amplitude and wave-form. The amplitude is assumed to vary gradually while wave-form is a function of eikonal which may vary rapidly. The pre-state is assumed to be homogeneous and static. From order-estimation it is possible to obtain the propagation velocity and the evolitional equation of the amplitude. The distortion of wave-form is found to depend on the first- and second-order derivatives of stress-strain relation. The wave-form may be flatten or sharpen.

(Received Mar. 21, 1980)

キー・ワード：波動，非線型，弾性，波形

1 緒言

一般に波の表現に3種類がある。“特性曲面法”，“特異曲面法”，“正弦波”である。いずれの方法も長短があり，優劣をつけることはできないが，近時，最も活用されているのは特異曲面法である。そこでは，波面に相当する特異曲面を考え，その両側で，ある物理量が“跳び”をもつと仮定する。この跳びについての適合条件を使って伝ば速度や振幅の増大，減衰を求めることができる。特異曲面法については，たとえば，¹⁾²⁾Chen を，特性曲面法については，たとえば，³⁾⁴⁾文献を参照されたい。

特異曲面法では，音波に対応するのは“加速度波”である。これは波面の両側で，変位，速度は連続であるが加速度に跳びがあるとするのである。しかし，現実の物理現象に現れる音波は連続した“波形”をもっており，一般に，波形は伝ばにつれて次第に変化すると考えられる。このような波形の変化は特異曲面法や特性曲面法では考察することができない。

ここでは，一次元非線型弾性物質を考え，この中で任意の波形をもつ波が伝ばする場合について考察する。

2 一次元非線型弾性物質

話を一次元に限定したのは，3次元物質を考えた場

合に発生する，さまざまな複雑な枝葉から脱却して，話を波形の変形に集中するためである。

一次元世界は直線であり，一次元物質はその上にのっかっている線分または直線であると考えることができる。基準配置 κ である物体点の座標を X とする。それが運動して時間 t で

$$x = x(X, t) \quad (1)$$

を占めるとする。ひずみを

$$e \equiv \frac{\partial x}{\partial X} - 1 \quad (2)$$

で定義する。一次元非線型弾性物質の構成式は応力 σ が e の関数として与えられる。

$$\sigma = \sigma(e) \quad (3)$$

ここで， $\sigma(e)$ は物質関数であり，2階まで連続微分可能と仮定する。

すべての物質は“運動量の保存則”をみたさなければならぬ。これが“運動式”

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} + \rho_\kappa b_\kappa = \rho_\kappa \ddot{x} \quad (4)$$

である。ここで， ρ_κ は κ での質量密度， b_κ は物体力である。以下では $b_\kappa = 0$ と仮定する。(3)式を(4)式に代入して

$$\frac{d\sigma}{de} \frac{\partial e}{\partial X} = \rho_\kappa \ddot{x} \quad (5)$$

をえる。

* 原稿受理 昭和55年3月21日

** 正会員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

3 運動式

一定なひずみ e_0 で静止した状態の上を波が伝ばすると仮定する。

$$x = e_0 X + u(X, t), \quad (6)$$

$$u = a(X, t) f(\psi(X, t)). \quad (7)$$

ここで、 u は波による変位、 a は振幅、 ψ は“アイコナル” (eikonal) と呼ばれる量であり、 f は波形を表す。よって、

$$e = e_0 + k a f' + \frac{\partial a}{\partial X} f, \quad (8)$$

$$\frac{\partial e}{\partial X} = k^2 a f'' + 2k \frac{\partial a}{\partial X} f' + \frac{\partial k}{\partial X} a f' + \frac{\partial^2 a}{\partial X^2} f, \quad (9)$$

$$\dot{x} = -\omega a f' + \dot{a} f \quad (10)$$

$$\ddot{x} = \omega^2 a f'' - 2\omega \dot{a} f' - \dot{\omega} a f' + \ddot{a} f \quad (11)$$

である。ここで

$$k \equiv \frac{\partial \psi}{\partial X}, \quad \omega \equiv -\dot{\psi} \quad (12)$$

は、それぞれ、波数、円振動数であり、ドットは X を固定したときの時間導関数であり

$$f' \equiv \frac{df}{d\psi}, \quad f'' \equiv \frac{d^2 f}{d\psi^2} \quad (13)$$

である。

(3)式と(8)式より

$$\frac{d\sigma}{de} = \sigma_0' + \sigma_0'' \left(k a f' + \frac{\partial a}{\partial X} f \right) + \dots \quad (14)$$

となる。ここで、

$$\sigma_0' \equiv \left(\frac{d\sigma}{de} \right)_\kappa, \quad \sigma_0'' \equiv \left(\frac{d^2 \sigma}{de^2} \right)_\kappa \quad (15)$$

は κ での $\sigma(e)$ の微係数である。(9), (11), (14)の各式を運動式(5)に代入して次式を与える。

$$\begin{aligned} & \sigma_0' k^2 a f'' + \left\{ \sigma_0' \left(2k \frac{\partial a}{\partial X} f' + \frac{\partial k}{\partial X} a f' \right) \right. \\ & \quad \left. + \sigma_0'' k^3 a^2 f' f'' \right\} + \dots \\ & = \rho_\kappa \omega^2 a f'' - \rho_\kappa (2\omega \dot{a} + \dot{\omega} a) f' + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

ここで基準配置における運動式を使った。

4 弱い短波長の波

一般に、アイコナル ψ は X と t について激しく変化する量である。そして、波長

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (17)$$

程度の範囲では、 a , k , ω はほとんど変化しないと仮定しよう。すなわち、それらは X と t のゆるやかな関数である。もし、 a , k , ω が定数ならば、波は波形を保ったままで伝ばする。 a , k , ω が顕著に変化するまでに伝ばする距離を、 l_a , l_k , l_ω とし、それらは互いに同程度の大きさをもつとする。

$$\lambda \ll l_a, l_k, l_\omega. \quad (18)$$

伝ば速度 V は無限大でも無限小でもないとする。 a ,

k , ω が顕著に変化するまでの時間は

$$\tau_a = \frac{l_a}{V}, \quad \tau_k = \frac{l_k}{V}, \quad \tau_\omega = \frac{l_\omega}{V} \quad (19)$$

である。また、波は弱いと仮定して

$$|a| \ll \lambda \quad (20)$$

と置く、そして

$$O\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \epsilon, \quad O\left(\frac{\lambda}{l_a}\right) = \epsilon_a, \quad O\left(\frac{\lambda}{l_k}\right) = \epsilon_k, \quad O\left(\frac{\lambda}{l_\omega}\right) = \epsilon_\omega \quad (21)$$

と位数を表す。

以上のことより次の評価ができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial X} &\sim \frac{a}{l_a} \sim \epsilon \epsilon_a, & \frac{\partial^2 a}{\partial X^2} &\sim \frac{a}{l_a^2} \sim \frac{1}{\lambda} \epsilon \epsilon_a^2, \\ \dot{a} &\sim \frac{a}{\tau_a} \sim V \frac{a}{l_a} \sim \epsilon \epsilon_a, & \ddot{a} &\sim \frac{a}{\tau_a^2} \sim V^2 \frac{a}{l_a^2} \sim \frac{1}{\lambda} \epsilon \epsilon_a^2, \\ k &\sim \frac{1}{\lambda}, & \frac{\partial k}{\partial X} &\sim \frac{k}{l_k} \sim \frac{1}{\lambda^2} \epsilon_k, \\ \omega &\sim V k \sim \frac{1}{\lambda}, & \dot{\omega} &\sim \frac{\omega}{\tau_\omega} \sim V \frac{\omega}{l_\omega} \sim \frac{1}{\lambda^2} \epsilon_\omega. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

これより(16)式の各項を評価しよう。このとき、 $\sigma_0', \sigma_0'', f', f''$ は位数の1の量であるとみなす。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0' k^2 a f'' &\sim \frac{1}{\lambda} \epsilon, & \sigma_0' k \frac{\partial a}{\partial X} f' &\sim \frac{1}{\lambda} \epsilon \epsilon_a, \\ \sigma_0' \frac{\partial k}{\partial X} a f' &\sim \frac{1}{\lambda} \epsilon \epsilon_k, & \rho_\kappa \omega^2 a f'' &\sim \frac{1}{\lambda} \epsilon, \\ \rho_\kappa \omega \dot{a} f' &\sim \frac{1}{\lambda} \epsilon \epsilon_a, & \rho_\kappa \dot{\omega} a f' &\sim \frac{1}{\lambda} \epsilon \epsilon_\omega. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

いま、

$$\epsilon \sim \epsilon_a \sim \epsilon_k \sim \epsilon_\omega \quad (24)$$

であると仮定しよう。すると(16)式の両辺の第1項は ϵ/λ の位数をもち、第2項は ϵ^2/λ の位数をもつ。また、点で表示した項は ϵ^3/λ およびそれ以上の位数をもつ。

4・1 第1次近似

まず、第1次近似として ϵ^2/λ 以上の位数の項を無視しよう。すると、

$$\sigma_0' k^2 a f'' = \rho_\kappa \omega^2 a f'' \quad (25)$$

となる。 $k a f'' \neq 0$ として、伝ば速度は

$$V = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\sigma_0'}{\rho_\kappa} \right)^{1/2} \quad (26)$$

で与えられる。よって、

$$\sigma_0' > 0 \quad (27)$$

でなければ波は存在しない。すなわち、応力-ひずみ曲線は単調増加でなければならない。

4・2 第2次近似

第2次近似として ϵ^3/λ 以上の位数の項を無視し、 $f' \neq 0$ として

$$2\rho_\kappa \omega \left(\dot{a} + V \frac{\partial a}{\partial X} \right) = -\sigma_0'' k^3 a^2 f'' - \rho_\kappa \left(\dot{\omega} + V^2 \frac{\partial k}{\partial X} \right) a \quad (28)$$

を与える。

$$-\frac{\partial a}{\partial t} \equiv \dot{a} + V \frac{\partial a}{\partial X} \quad (29)$$

は，“変位導関数”と呼ばれるもので，波の伝ばとともに移動しながら測定した a の時間的変化速度を表す。

(29)式の第1式より

$$\begin{aligned} \dot{V} - V \frac{\partial V}{\partial X} &= \left(\frac{\dot{\omega}}{k} - \frac{\omega \dot{k}}{k^2} \right) - V \left(\frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\omega}{k^2} \frac{\partial k}{\partial X} \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(\dot{\omega} + V^2 \frac{\partial k}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

をえる。ここで(12)式よりえられる関係 $\dot{k} = -\partial \omega / \partial X$ を使った。また，(26)式の第2式より V は e_0 の関数であり，したがって定数である。よって $\dot{V}=0$ ， $\partial V / \partial X=0$ であり，(30)式の値は0である。以上のことより(28)式は

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta a^2 \quad (31)$$

となる。ここで，

$$\beta \equiv -\frac{\sigma_0'' k^3 f''}{2\rho_k \omega} = -\frac{\omega^2 \sigma_0'' f''}{2\sigma_0' V} \quad (32)$$

である。(31)式が振幅の増大と減衰を決定する“発展式”である。

波による変位(7)の加速度 $\ddot{u}$ は(11)式で与えられる。この右辺の第1, 2, 3, 4項は，それぞれ， ϵ/λ ， ϵ^2/λ ， ϵ^2/λ ， ϵ^3/λ の位数をもつ。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \dot{\phi} + V \frac{\partial \phi}{\partial X} = -\omega + V k = 0 \quad (33)$$

より

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} f' = 0 \quad (34)$$

である。よって，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{u}}{\partial t} &= \omega^2 \frac{\partial a}{\partial t} f'' + \dots = \omega^2 \beta a^2 f'' + \dots \\ &= -\frac{\omega^4 \sigma_0'' f''^2}{2\rho_k V} a^2 + \dots = \hat{\beta} \ddot{u}^2 + \dots, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\hat{\beta} \equiv -\frac{\sigma_0''}{2\sigma_0' V} \quad (36)$$

となる。ここで点は高次の位数の項である。これらを省略すると

$$\frac{\partial \ddot{u}}{\partial t} = \hat{\beta} \ddot{u}^2 \quad (37)$$

となり，特異曲面法による加速度の振幅の発展式に完全に一致する。

5 波の変形

(31)式によって波形の変形を考察しよう。(34)式と同様に $\partial f'' / \partial t = 0$ となるから，(31)式を微分方程式とみなすと β は定数と考えることができる。よって，積分して

$$a(t) = \frac{a(0)}{1 - a(0)\beta t} \quad (38)$$

をえる。ここで， $a(0)$ は $t=0$ での初期振幅である。

変位 u の正負は f に負わせてよいから，

$$a > 0 \quad (39)$$

として一般性を失わない。よって，

$$\left. \begin{aligned} \beta > 0 & \text{ ならば振幅は増大する,} \\ \beta < 0 & \text{ ならば振幅は減少する.} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

(27)式と(32)式より $\beta \geq 0$ は $\sigma_0'' f'' \leq 0$ による。

5・1 $\sigma_0'' < 0$ の場合

このとき，応力-ひずみ曲線は Fig. 1 のようになる。そのとき， $\beta \geq 0$ は $f'' \geq 0$ によって定まる。したがって， $f'' > 0$ では振幅は増大し， $f'' < 0$ では減衰する。Fig. 2 に示したように波形は変形する。すなわち， $f > 0$ では平坦になり， $f < 0$ では山と谷は鋭くなる。

Fig. 1. Stress-strain relation for $\sigma_0'' < 0$.

Fig. 2. Distortion of wave-form for $\sigma_0'' < 0$.

5・2 $\sigma_0'' > 0$ の場合

応力-ひずみ曲線は Fig. 3 で与えられる。 $f'' > 0$ では振幅は減衰し， $f'' < 0$ では増大する。よって，Fig. 4 に示したように波形は変形する。すなわち， $f > 0$ では山と谷は鋭くなり， $f < 0$ では平坦になる。

Fig. 3. Stress-strain relation for $\sigma_0'' > 0$.

Fig. 4. Distortion of wave-form for $\sigma_0'' > 0$.

(38)式より $\beta < 0$ では $t \rightarrow \infty$ で $a(t) \rightarrow 0$ と単調に減衰する。また、 $\beta > 0$ では

$$t \rightarrow t_{\infty} \equiv \frac{1}{a(0)\beta} \quad (41)$$

で $a(t) \rightarrow \infty$ と発散する。しかし、このような発散を考慮してはならない。というのは、ここでの議論は(20)式

の条件のもとでのみ成り立つからである。

参考文献

- 1) Chen, P. J., "Growth and Decay of Waves in Solids," Encyclopedia of Physics VIa/3, ed. by C. Truesdell, (1973) Springer-Verlag, Berlin
- 2) Chen, P. J., "Selected Topics in Wave Propagation," (1976) Noordhoff Intern. Pub., Leyden
- 3) Courant, R., and K. O. Friedrichs, "Supersonic Flow and Shock Waves," (1948) Interscience Pub., New York
- 4) Jeffrey, A., and T. Taniuti, "Non-Linear Wave Propagation with Application to Physics and Magnetohydrodynamics," (1964) Academic Press, New York
- 5) ランダウ・リフシッツ, "場の古典論", 広重 徹・恒藤 敏彦訳, 第7章 (1967) 東京図書