三軸応力のもとにおけるセラミックスの破壊*

池 田 清 彦** 村 上 拓 也***
井 垣 久** 平 林 正 也****

Fracture of Ceramics Subjected to Triaxial Stresses

by

Kiyohiko IKEDA, Takuya MURAKAMI, Hisashi IGAKI
(College of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai)
and Masaya HIRABAYASHI
(Kyoto Ceramic Co., Ltd., Kyoto)

The fracture behavior of alumina ceramics subjected to triaxial stresses, which were produced in the lower surface (tension side) of a bar with rectangular cross-section by applying uniform bending, was examined.

The results obtained are summarized as follows.

(1) Under hydrostatic pressures up to 28 kg/mm², all specimens fractured in a brittle manner without any plastic deformation.

(2) The mode of fracture face around the origin of fracture was not influenced by hydrostatic pressure, and showed almost totally intergranular fracture.

(3) The influence of hydrostatic stress σ_m on the maximum tensile stress of three principal stresses occurred in the lower surface of the bar at fracture was examined. The maximum tensile stress was almost constant from the value of σ_m obtained by the experiments at atmospheric pressure to σ_m of about 4.5 kg/mm² but decreased with an increase of σ_m to the compression side.

(4) When the fracture stresses were expressed in the principal stress space, it was found that none of the stress components of the maximum tensile stress, the maximum shear stress and the octahedral shear stress could be regarded as critical value for fracture.

(5) Two kinds of models for fracture were assumed by considering small cracks or cavities in the interior and the surface of a material and the fracture criterion for ceramics was examined. The fracture criterion obtained by assuming small cracks as the most effective factor for fracture agreed approximately with the experimental results.

(Received Apr. 15, 1980)

キー・ワード：セラミックス，破壊条件，静水圧応力，クラック，応力拡大係数

1 緒 言

近年，セラミックスの工業および医学界への進出はめざましいものがあり，その機械的性質を調べることは重要である．非常に高い硬度，耐摩耗性，耐熱性を有する一方で，著しいぜい性挙動を示すこの材料の多軸応力下での材料挙動を調べることは困難である．しかしながら実際の立場では材料は複雑な応力下におかれており，そこでの材料強度を知ることが必要になってくると思われる．現在までセラミックスの多軸応力

下での研究に関しては，Tappin¹⁾らがシリコンカーバイドから成る薄肉円筒試験片に内・外圧を加えて二軸応力を発生させ，二軸引張応力のもとでの強度の低下を実験的に示しているが，三軸応力のもとでセラミックスの材料強度を調べたものは少いように思われる．

そこで，ここではセラミック材料として粉体を焼結させて作った多結晶アルミナ (Al₂O₃) を用い，試験片の周囲より静水圧を加え，その中で均一曲げ荷重を加えることによって材料内に三軸応力状態を発生させた．さらに破壊時において得られた応力より，三軸応力下での破壊条件を材料内部および表面に存在すると思われる微小な欠陥に着目することによって調べた．

2 供試材料および実験方法

* 原稿受理 昭和55年4月15日

** 正 会 員 大阪府立大学工学部 堺市百舌島梅町

*** 大阪府立大学大学院 堺市百舌島梅町

**** 京都セラミック(株) 京都市山科区東野井上町

試料としては、微粉碎された高純度アルミナ粉体を Fig. 1 に示すような形状に成形した後、高温で焼結したものを使用した。その面粗さは 3~6.5 S 以内、比重は 3.98 以上である。Fig. 2 に示すように試験片を支点間距離 20 mm、荷重点間距離 14 mm の 4 点曲げ試験装置に取り付けた後、それを高圧容器内に装てんして周囲より静水圧 p を加え、さらに破壊にいたるまで曲げ荷重を加えた。その際、液圧が材料内に侵透するのを防ぐため、破壊が開始する矩形はりの引張側表面をネオプレンゴムで被覆した。Fig. 3 に実験装置の主要部とそのブロック線図を示す。実験に際しては、まず油圧孔より規定の静水圧を加えた後、上プランジャ①を押し下げる。上プランジャ①の下降力はロードセル②を通してピストン④に伝わる。ローラー状の荷重ピン⑦が取り付けられているピストン④はシリンダ⑤に案内されて、ローラー状の支点ピン⑨に置かれた試験片⑧に曲げ荷重を加える。ピストン④と荷重ピン

Fig. 1. Shape and dimension of test specimen.

Fig. 2. Experimental set-up.

Fig. 3. Main part of apparatus for bending test under hydrostatic pressure and block diagram.

取り付け具⑥の間には鋼球③が装入され、2個の荷重ピン⑦が試験片⑧に均等に加わるようにしてある。試験片のひずみは、矩形はりの引張側表面の軸方向にはった箔ゲージをアクティブゲージとし、高圧容器外の同形状、同材質の試験片に同様にはりつけたものをダミーゲージとしたホイートストーンブリッジから検出される出力より測定される。また曲げ荷重は薄肉円筒（ロードセル②）の軸方向および軸対称にはった2枚の箔ゲージをアクティブゲージとし、高圧容器外の同材質の同じ曲率をもった円筒にも同様にはりつけたものをダミーゲージとしたホイートストーンブリッジから検出される出力によって読みとられる。さらに圧力は測圧円筒の表面にひずみゲージをはった圧力計によって読みとられる。ロードセル、試験片、圧力計のそれぞれから取り出されたゲージからの出力はひずみ測定器を通して電磁オシログラフで自記される。

3 実験結果

実験で得られた曲げモーメント M_b より $\sigma_a = M_b / Z_b$ (Z_b : はりの断面係数) として矩形はりの下表面(引張側)に生ずる軸方向応力 σ_a を求め、軸方向ひずみ ϵ_a との関係を各静水圧下で代表的なものを取り出して示したのが Fig. 4 である。なお σ_a , ϵ_a は静水圧 p が加わった状態を基準にしての値である。実験

Fig. 4. Examples of axial stress-strain curves under hydrostatic pressure.

で得られた静水圧の範囲では圧力を増加しても全く塑性変形を起すことなくぜい性的に破壊しており、破壊時における σ_a は $p \div 10 \text{ kg/mm}^2$ まで単調に増加した後、それ以上の圧力ではほぼ一定にとどまっている。Fig. 5 は大気圧下と 2000 気圧下で破壊した破面の破壊開始部付近を走査電子顕微鏡で観察したものであるが、いずれも全体的にみてほぼ限界破壊であるとみなすことができ、静水圧による破壊のモードの違いはみとめられなかった。

静水圧下での均一曲げによって矩形はりの下表面に $\sigma_a - p$, $-p$, $-p$ の三軸応力が発生するが、破壊時における最大引張応力 $(\sigma_a - p)$ の静水圧応力 $\sigma_m (= \sigma_a / 3 - p)$ による影響を示したのが Fig. 6 である。大気

Fig. 5. Fractograph of fracture surface in the neighborhood of the origin of fracture.

Fig. 6. Effect of hydrostatic stress on maximum tensile stress at fracture of ceramics.

圧下の実験で得られた $\sigma_m \div 11 \text{ kg/mm}^2$ から $\sigma_m \div 4.5 \text{ kg/mm}^2$ までは破壊時における $\sigma_a - p$ がほぼ一定であるが、それより圧縮側になるとしだいに減少している。

さらに以上のような破壊時におけるはりの下表面に生ずる応力状態を主応力空間内で表したのが Fig. 7 である。 J_2 は偏差応力の第2不変量であり、 $\sqrt{2J_2}$ は静水圧応力軸からの距離を表し、また $\sqrt{3}\sigma_m$ は π 平面からのへだたりを表す。破壊が開始するはりの引張側表面における応力状態はロードの変数 μ で表すならば $\mu = 1$ となるが、図中には最大引張応力説、最大せん断

Fig. 7. Fracture stresses plotted in principal-stress space.

応力説および八面体せん断応力説の各破壊条件に関する曲面を $\mu = 1$ の応力状態を表す面で切断した面も示してある。実験点は大気圧下の実験で得られた $\sqrt{3}\sigma_m \div 19 \text{ kg/mm}^2$ から $\sqrt{3}\sigma_m \div 8 \text{ kg/mm}^2$ まではほぼ最大引張応力説にしたがい $\sqrt{2J_2}$ が単調に増加するが、それ以上の圧縮側になるにつれて $\sqrt{2J_2}$ の増加の割合はしだいに減少し、 $\sqrt{3}\sigma_m$ 軸に平行になる。

以上の実験結果より、セラミックスの三軸応力下での破壊においては、材料を巨視的に連続体とみなして破壊時の応力から直接得られる最大引張応力、最大せん断応力、八面体せん断応力のいずれによっても、それを破壊の限界値とすることはできない。したがって次に材料内部に存在すると思われる微小な欠陥に着目しながら破壊条件を調べていく。

4 考 察

まず粉体を焼結させて成形したアルミナにおいては Fig. 5 でも明かなように内部にかなりの気孔が残っている。またアルミナの実験強度が理論強度よりはるかに小さいこと、その引張強さが圧縮強度の $1/10 \sim 1/5$ であることより材料内部および表面には小さなクラックが存在することが考えられる。そこで材料に次のような二種類の欠陥による破壊モデルを想定し、破壊条件を求める。

(1) 多数の気孔を含むアルミナを単一の球状空孔をもつ無限弾性体とみなし、その空孔表面に生ずる引張応力のうち最大引張応力が材料固有のある値に達したときに、材料全体の破壊が起る。

(2) 内部および表面に多数の小さなクラックを含むアルミナを、任意の方向に向いて存在する単一の円板状クラックを含む無限弾性体の集合と考え、ある一つのクラック先端よりき裂の伝ばが開始するときを材料全体の破壊とする。

なおモデル(2)において表面クラックの場合は、半無限板の直線縁に半円形のクラックが入っているものを考えねばならない。クラックが Fig. 8 の A のように表面に垂直に入っている場合の開口形モードに対する応力拡大係数 K_I は求められているが、三軸応力のもと

Fig. 8. Schematic diagram of cracks in the neighborhood of lower surface of bar.

では、B, C, D, E のようにあらゆる方向を向いたクラックについて吟味しなければならない。しかしながら表面より任意の角度で入った半円形表面クラックの開口形モード、面内、面外せん断変形モードに対する応力拡大係数 K_I , K_{II} , K_{III} を求めたものはまだみあたらず、それらを解析的に求めるのは非常に複雑で困難であると思われる。したがって表面から垂直に入っている場合の半円形表面クラックの K_I の無限体中の円板状クラックの K_I に対する表面の影響が比較的小さいことから判断して、表面クラックを近似的に無限体中における円板状クラックとしてとり扱った。

4・1 モデル(1)による破壊条件の導出

いま Fig. 9 に示すような無限遠方より三軸応力 T_x , T_y , T_z が加わった場合の無限弾性体中に存在する単一の球状空孔を考え、 r , θ , φ を球状空孔の中心を極とする球座標とするならば、空孔周辺の基地組織のある点 Q に生ずる応力は、Goodier による単軸応力の場合の弾性解をそれぞれ代数的に重ね合わせることに

$$\sigma_{ij} = T_x U_{ij} \quad (i, j = r, \theta, \varphi) \quad (1)$$

ここで U_{ij} は T_x , T_y , T_z の間の応力比と位置 (r , θ , φ) の関数である。

また球状空孔表面 ($r=R$) の任意の点における主応力は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2}(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + \sigma_{\theta\varphi}^2} \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{2}(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + \sigma_{\theta\varphi}^2} \\ \sigma_{33} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Fig. 9. Spherical cavity subjected to triaxial stress at infinity and co-ordinate system.

(1)式を(2)式に代入すると次式のように表される。

$$\sigma_{kk} = T_x M \quad (k=1, 2, 3) \quad (3)$$

ここで k については総和をとらない。

M は無限遠方での応力比が与えられれば、空孔表面での位置 (θ , φ) の関数になる。それで空孔表面上でのあらゆる M の値の中で最大値を $M_{\max}$ とすれば、

$$T_x M_{\max} = \sigma_0 \quad (4)$$

を満足するとき材料全体の破壊が生ずる。ここで σ_0 は破壊の限界値であり材料定数である。したがって球状空孔の表面を細かく分割して $M_{\max}$ を求めるならば(4)式より T_x が定まり、さらに T_y , T_z も決定される。

4・2 モデル(2)による破壊条件の導出

いま Fig. 10 のように無限遠方での主応力 T_x , T_y , T_z の方向に x , y , z 軸をとるならば、 x , y 軸を含み z 軸に垂直な円板状クラック面 A は z 軸を中心に

Fig. 10. Direction of penny-shaped crack subjected to triaxial stresses at infinity.

して角 φ だけ回転し、そこから y 軸を中心にして角 θ 回転することによって任意の方向を向いた円板状クラック面 B に完全に重なる。移された座標軸を X , Y , Z とすると、任意の方向に向いた円板状クラック面に生ずる垂直応力 σ_{ZZ} , およびせん断応力 σ_{ZX} , σ_{ZY} は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ZZ} &= l_3^2 T_x + m_3^2 T_y + n_3^2 T_z \\ \sigma_{ZX} &= l_3 l_1 T_x + m_3 m_1 T_y + n_3 n_1 T_z \\ \sigma_{ZY} &= l_3 l_2 T_x + m_3 m_2 T_y + n_3 n_2 T_z \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$l_1, l_2, \dots, n_3$ は Table I に示すような X , Y , Z 軸の x , y , z 軸に対する方向余弦であり、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos \varphi \cos \theta \\ l_2 &= -\sin \varphi \\ l_3 &= \cos \varphi \sin \theta \\ m_1 &= \sin \varphi \cos \theta \\ m_2 &= \cos \varphi \\ m_3 &= \sin \varphi \sin \theta \\ n_1 &= -\sin \theta \\ n_2 &= 0 \\ n_3 &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Table I. Direction-cosines.

	x	y	z
X	l_1	m_1	n_1
Y	l_2	m_2	n_2
Z	l_3	m_3	n_3

さて多軸応力下におけるクラック先端からの破壊に関する研究としては, Erdogan, Sih⁵⁾ が平板内に作ったクラックの無限遠方に二軸応力を加えて行ったものがある. 彼らはクラック先端からの破壊開始の条件として次式を提案しており実験的にも確めている.

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1 \quad (7)$$

K_I , K_{II} は開口形モード, 面内せん断変形モードに関する応力拡大係数であり, K_{Ic} , K_{IIc} はそれぞれに対する破壊じん性値である.

ここでは三次元的なクラックを考えているので面外せん断変形モードに関する応力拡大係数 K_{III} を考慮しなければならない. そこで(7)式を拡張することにより, 次式のようなクラック先端からの破壊開始の条件を仮定する.

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIc}}\right)^2 = 1 \quad (8)$$

K_{IIIc} は面外せん断変形モードに関する破壊じん性値である. また円板状クラック前縁上の任意の点⁶⁾における応力拡大係数は次式のように表される.

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{2}{\pi} \sigma_{zz} \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= \frac{4}{\pi(2-\nu)} \sqrt{\pi a} (\sigma_{zx} \cos \zeta + \sigma_{zy} \sin \zeta) \\ K_{III} &= \frac{4(1-\nu)}{\pi(2-\nu)} \sqrt{\pi a} (\sigma_{zx} \sin \zeta - \sigma_{zy} \cos \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで a は円板の半径, ζ は σ_{zx} の方向からの角度, ν はポアソン比である.

なお, (8)式において, Erdogan, Sih⁵⁾ による二次元的なクラックの場合の実験結果より $K_{Ic} > K_{IIc}$ とし, また面内および面外せん断変形のそれぞれの場合に関してせん断応力の破壊に対する限界値がどちらも等しいと仮定することによって K_{IIc} と K_{IIIc} の間に次式の関係をおく.

$$K_{IIIc} = (1-\nu) K_{IIc} \quad (10)$$

(9)式を(8)式に代入し, (10)式を考慮することによって次式を得る.

$$\sigma_{zz}^2 + \left(\frac{K_{Ic}}{K_{IIc}}\right)^2 \left(\frac{2}{2-\nu}\right)^2 (\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2) = \frac{\pi}{4a} K_{Ic}^2 \quad (11)$$

さらに(11)式に(5)式を代入し, $T_y/T_x = k_1$, $T_z/T_x = k_2$ とおくと次式が得られる.

$$T_x^2 N = -\frac{\pi}{4a} K_{Ic}^2 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} N &= (l_3^2 + m_3^2 k_1 + n_3^2 k_2)^2 \\ &+ \left(\frac{K_{Ic}}{K_{IIc}}\right)^2 \left(\frac{2}{2-\nu}\right)^2 \{(l_3 l_1 + m_3 m_1 k_1 + n_3 n_1 k_2)^2 \\ &+ (l_3 l_2 + m_3 m_2 k_1 + n_3 n_2 k_2)^2\} \end{aligned} \quad (13)$$

N は無限遠方での応力比と円板状クラックの向き (θ , φ) の関数であり, (12)式を最初に満足するクラックより破壊が開始する. したがって応力比が規定されると N の最大値 $N_{\max}$ をさがすことによって $T_x = (\pi K_{Ic}^2 / 4a N_{\max})^{1/2}$ として T_x が求まり, さらに T_y , T_z も決定する.

4・3 理論値と実験値との比較

材料の基地組織が多結晶アルミナ (Al_2O_3) であることよりポアソン比 $\nu = 0.23$ を使用し, モデル(1)における材料定数 σ_0 は大気圧下での実験値より, モデル(2)における材料定数 $\pi K_{Ic}^2 / 4a$ および K_{Ic} / K_{IIc} は大気圧下での実験によって得られる σ_m の値および $\sigma_m = 0$ 付近の $\sqrt{2J_2}$ の実験値を満足するように決定し, モデル(1), モデル(2)に関する理論値を Fig. 6, 7 上での実験値と比較して表したのが Fig. 11, 12 である. まず Fig. 11 において, モデル(1)による理論値は大気圧下での実験で得られた σ_m の値 11 kg/mm^2 付近から圧縮側の σ_m になるにつれて最大引張応力が単調に減少

Fig. 11. Comparison of the experimental results with the theoretical results.

Fig. 12. Comparison of the experimental results with the theoretical results.

している。一方モデル(2)による理論値では、 σ_m が大気圧下での実験で得られた値から圧縮側に増加するにつれて、ある値までは最大引張応力がほぼ一定であるが、それより圧縮側の σ_m になるとしだいに減少している。つぎに Fig. 12 においては、モデル(1)、モデル(2)のいずれによる理論値も最大引張応力説と最大せん断応力説および八面体せん断応力説の間に位置しているが、モデル(1)では大気圧下での実験で得られた $\sqrt{3}\sigma_m$ の値 19 kg/mm^2 付近から圧縮側の $\sqrt{3}\sigma_m$ になるにつれて $\sqrt{2J_2}$ が単調に増加するのに対して、モデル(2)では $\sqrt{3}\sigma_m$ が大気圧下での実験で得られた値からある値までは最大引張応力説にほぼ一致して $\sqrt{2J_2}$ が増加し、それより圧縮側の $\sqrt{3}\sigma_m$ になるにつれて $\sqrt{2J_2}$ の増加する割合は減少し、しだいに $\sqrt{3}\sigma_m$ 軸に平行になっている。以上よりモデル(2)による理論値は、前章で述べた実験結果の傾向を最もよく説明しているといえる。したがってセラミックスの破壊においては、内部および表面に存在する微小なクラックの影響が支配的であり、それをモデル化することによって求めた理論値を材料の破壊条件とすることができると考えられる。

なおモデル(2)の理論値を求める際に用いた $K_{Ic}/K_{IIc} = 1.25$ は、モード I とモード II の組合せ負荷の場合にき裂先端近傍の円周応力の最大値がある値に達したときにき裂が伝ばすると考える最大応力説から導かれる値 1.15 とそれほど異なるものではなかった。

また矩形はりの中央に表面より深さ 0.5 mm の薄いスリットを設けた試験片に 4 点曲げを加えて破断させることによって測定した K_{Ic} の値は $11.2 \text{ kg/mm}^{3/2}$ であった。そこでこの値を(2)式に代入してクラック長さ a を求めたところ $93 \mu\text{m}$ となり、Fig. 5 から観察される粒径 $5 \sim 10 \mu\text{m}$ の 9 ～ 19 倍であることがわかった。

5 結 言

多結晶アルミナから成るセラミックスに静水圧下で均一曲げ負荷を加えることによってはりの下表面（引張側）に三軸応力状態を生じさせ、そこでの破壊挙動を調べたところ次の結果が得られた。

(1) 実験で得られた静水圧の範囲 ($0 \sim 2.8 \text{ kg/mm}^2$) では圧力を増加しても全く塑性変形を起すことなくぜ

い性的に破壊した。

(2) 破壊が開始した破面は静水圧によってほとんど変化はみられず、いずれも全体的にみてほぼ粒界破壊の様相を示していた。

(3) 破壊が開始するはりの表面に生じた三主応力のうち最大引張応力を取り出し静水圧応力による影響を調べたところ、大気圧下での実験で得られた静水圧応力 $\sigma_m \doteq 11 \text{ kg/mm}^2$ から $\sigma_m \doteq 4.5 \text{ kg/mm}^2$ までは最大引張応力がほぼ一定であるが、それより σ_m が圧縮側になるにつれてしだいに減少した。

(4) 破壊が開始するはりの表面に生ずる応力状態を主応力空間内に表したところ、材料を巨視的に連続体とみなして破壊時の応力から直接得られる最大引張応力、最大せん断応力、八面体せん断応力のいずれによっても、それを破壊の限界値とすることはできないことがわかった。

(5) そこで材料内部および表面に多数存在すると考えられる微小なクラックあるいは気孔に着目し、それらによる二種類のモデルを想定して材料の破壊条件を調べたところ、破壊において支配的に影響する欠陥が微小なクラックであるとして求めた破壊条件は実験結果の傾向と比較的によく一致した。

なお数値計算は大阪府立大学計算センター TOSBA C 5600 により行われた。

参 考 文 献

- 1) Tappin, G., R. W. Davidge, and J. R. McLaren, Fracture Mechanics, 3, 435 (1978).
- 2) 荒井康夫, “セラミックスの材料化学”, p. 178 (1977) 大日本図書
- 3) 荒井康夫, “セラミックスの材料化学”, p. 175 (1977) 大日本図書
- 4) Goodier, J. N., Trans. ASME, 55, No. 7, 39 (1933).
- 5) Erdogan, F., and G. C. Sih, Trans. ASME, Ser. D, 85, 519 (1963).
- 6) 岡村弘之, “線型破壊力学入門”, p. 220 (1976) 培風館
- 7) 功刀雅長, “無機材料科学”, p. 251 (1972) 誠文堂新光社