寿命分布と強度分布の両方を考慮した $S-N$ 線図の統計解析*

新井 淳一** 岩城 秀夫** 井野 幸雄**

Statistical Method to Evaluate the Scattering Fatigue Data Considering Both of Life and Strength Distributions

by

Jun-ichi ARAI, Hideo IWAKI and Yukio INO

(Research Institute of Nippon Kaiji Kyokai, Mitaka)

In this paper, a statistical method to evaluate the fatigue data has been proposed by considering a two dimensional distribution on the life-strength plane ($S-N$ plane). This evaluation method is based on the assumption that the data of $S-N$ curve can be treated as the members of the set, which has a two dimensional normal distribution around the peak point in the coordinates of life and strength axis, and the variance of this two dimensional normal distribution can be given from the life and strength distributions of the original $S-N$ data. A contour line of this two dimensional distribution is of elliptical shape, and represents the probability range.

Furthermore, the contour line having the same probability of $S-N$ curve can be obtained from the envelope curve of the contour lines having the same probability of subgroups which have also the two dimensional normal distribution. The region enclosed with this curve expresses the probability of fracture occurrence. The fatigue limit is defined as the tangent line of this contour line, which is paralld to the life axis.

As an example, the $S-N$ data obtained by Nishijima *et al.* were analyzed. It was confirmed that the contour lines of the same probability obtained by the above mentioned method were in good agreement to that of the sample $S-N$ data. (Received Apr. 7, 1980)

キー・ワード: $S-N$ 線図, 寿命分布, 強度分布, 2次元正規分布, 同一確率線図

1 緒 言

材料の疲労強度の信頼性評価方法としては寿命分布および強度分布による方法がある。このうち前者は時間強度が問題にされる構造物等の設計には有用であるが、疲労限のある材料の場合にこの付近での分布の取扱いに問題がある。すなわち未破断データの取扱いが難しい。

すなわち、長寿命を要求される機械部品の設計に当って、疲労限の信頼限界の推定には寿命分布のみを考えたのでは下限界を与える応力の分布が確定できない。

一方後者の強度分布による方法は各繰返し数における疲労強度の下限界を与えるという意味で使いやすく、時間強度から疲労限まで同時に扱えるという点で有用である。しかし長寿命側の破断しない範囲でも50%の破壊確率を中心とする強度分布が存在すると考える点に問題が残る。

例えば、最近西島らによって発表されたデータ¹⁾によ

れば、ある材料では 10^6 付近で疲労限と思われる現象を生じた後に、 10^7 付近で再び破壊するという現象もある。このようなデータは 10^6 と 10^7 の間では試験片が破断する確率がほぼ0であることを表しており、 10^6 付近で破壊する場合と 10^7 付近で破壊する場合とは関与する要因が異なっていると考えられる。

すなわち、このように異なる要因による破壊現象を同一の母集団として考えることには無理があると考えられる。

そこで著者らはこの現象を二つの母集団から形成されたと考えて扱い、すなわち $S-N$ 線図上にプロットされた実験点を寿命および強度を座標とする2次元統計量として扱う解析法を提案した。

2 2次元正規分布の考え方

$S-N$ 線図上にプロットされているデータの信頼限界を求めるには、詳しい点で各種の方法が考案されており、 $S-N$ 曲線を表す関数形を仮定し、例えば最小自乗法で定数を決定する方法で破壊確率50%の $S-N$ 曲線を定め、これからの分散を統計的に処理して信頼

* 原稿受理 昭和55年4月7日

** 正会員 日本海事協会技術研究所 三鷹市新川

限界を求める方法がとられる。このようなデータの取扱いは時間寿命を検討する場合、アルミニウム合金のように疲労限のない形の $S-N$ データを処理する場合には問題はないが、鉄鋼の $S-N$ データを処理する場合に疲労限の扱いに困難を生じ、このためまた各種の試みがなされている。

これに対し本報において提案する方法は寿命および強度分布の両方から、2次元正規分布群を推定し、これらの包絡線の形で信頼限界を求めたものである。ある $S-N$ 領域のデータを S および N に関して任意の小区間に分割し、その区間内のデータは、寿命に関しては一次元中心分布を、強度に関しては一次元中心分布の累積を示しているものと考え、個々別区間のデータとの相関は、平均値の座標を移動させることにより強制的に与え、各区間内の S , N のデータは計算の便宜上、個々独立として扱うことにする。

したがって全体の $S-N$ データの二次元確率分布は、上記各区間ごとに得られた二次元確率分布群の包絡線により近似されるものとする。

また上述したように、ある領域において破壊が出現する確率を扱う関係上寿命分布を検討するうえで破断した試験片の母集団とある高繰返し数で破断しなかった試験片の母集団は異なるものとして扱った。

3 2次元正規分布の解析方法

前項において大略の説明を行ったが、次に実際の解析手順を Fig. 1 に示す順序で説明する。

Fig. 1. Analytical flow chart of two dimensional normal distribution.

寿命分布は対数正規分布であるとし（以下寿命分布の N の値は対数をとった値である）、順序統計の方法 $P = (i - 0.5)/n$, ここで P は確率, i は順位, n はデータ数, により平均値 μ_N , 標準偏差 σ_N を求めた。

一方強度分布は正規分布であるとして、寿命分布の平均値 μ_N の点で重みつきプロビット法を用いて求め、得られた平均値を μ_S , 標準偏差を σ_S とした。

こうして得た中心座標, 中心分布 (μ_N, σ_N) , (μ_S, σ_S) から二次元分布を推定する。このためには周辺分

Fig. 2. Illustration of two dimensional distribution model.

布の推定が必要である。Fig. 2 はこの中心分布と周辺分布との関係を示したものである。任意の N_i における寿命分布の周辺分布 $f'(N_i)$ は $N = N_i$ 上の強度分布の積分値であるから、強度分布が任意の N_i に対して常に中心分布と相似形の正規分布であると仮定すると、 $N = \mu_N$ における強度分布の積分値 A_{Smax} と寿命分布の最大値 $f(N)_{max}$ および $N = N_i$ での寿命分布 $f(N_i)$ によって次式のように表すことができる。

$$f'(N_i) = C_N \left\{ \frac{f(N_i)}{f(N)_{max}} \right\} \times A_{Smax} \quad (\text{ただし } C_N \text{ は定数})$$

ここで $A_{Smax} = 1$ とおけば

$$\begin{aligned} f'(N_i) &= C_N \left\{ \frac{f(N_i)}{f(N)_{max}} \right\} \\ &= C_N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-\frac{(N_i - \mu_N)^2}{2\sigma_N^2}} \right\} \\ &= C_N \cdot e^{-\frac{(N_i - \mu_N)^2}{2\sigma_N^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

となる。したがって寿命分布の周辺分布 $f'(N)$ の標準偏差を $\sigma_{N'}$ (平均値は μ_N に等しい) として(1)式を正規分布の式の形に書き換えると次式になる。

$$\begin{aligned} f'(N) &= C_N \sqrt{2\pi}\sigma_{N'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{N'}} e^{-\frac{(N - \mu_N)^2}{2\sigma_{N'}^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{N'}} e^{-\frac{(N - \mu_N)^2}{2\sigma_{N'}^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

同様に強度分布の周辺分布を求めると、

$$\begin{aligned} f'(S) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{S'}} e^{-\frac{(S - \mu_S)^2}{2\sigma_{S'}^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

このように周辺分布の標準偏差が(2), (3)式で表される2次元正規分布の密度関数は次式で表される。

$$\begin{aligned} f(S, N) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}\sigma_S'\sigma_N'} \\ &\exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}\left\{\frac{(S - \mu_S)^2}{\sigma_S'^2}\right.\right. \end{aligned}$$

$$-2\rho\left\{\frac{(S-\mu_S)(N-\mu_N)}{\sigma_S'\sigma_N'}+\frac{(N-\mu_N)^2}{\sigma_N'^2}\right\}\Bigg\}$$

ここで計算の便宜上分割した小区間内では、 S 、 N は独立として扱い、 $\rho=0$ を用いると、以下のように二次元正規分布関数を求めることができる。

まず密度関数は

$$f(S \cdot N) = \frac{1}{2\pi\sigma_S'\sigma_N'} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(S-\mu_S)^2}{\sigma_S'^2} + \frac{(N-\mu_N)^2}{\sigma_N'^2}\right]\right\} \quad (4)$$

となる。

つぎに

$$\begin{cases} S-\mu_S=r \cos \theta \\ N-\mu_N=\frac{\sigma_N'}{\sigma_S'} r \sin \theta=K r \sin \theta, \quad \frac{\sigma_N'}{\sigma_S'}=K \text{ とおき} \end{cases} \quad (5)$$

(4)式を座標変換すると

$$\begin{aligned} f(S \cdot N) &= \frac{1}{2\pi\sigma_S'\sigma_N'} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2\cos^2\theta}{\sigma_S'^2} + \frac{K^2r^2\sin^2\theta}{\sigma_N'^2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_S'\sigma_N'} e^{-(r^2/2\sigma_S'^2)} \end{aligned}$$

したがって2次元正規分布関数 $F(r \cdot \theta)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} F(r \cdot \theta) &= \int_0^{2\pi} \int_0^r f(r \cdot \theta) |J| dr \cdot d\theta \\ &= 2\pi \int_0^r \frac{Kr}{2\pi\sigma_S'\sigma_N'} e^{-(r^2/2\sigma_S'^2)} \cdot dr \\ &= 1 - e^{-(r^2/2\sigma_S'^2)} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{ただし, } |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial r} & \frac{\partial N}{\partial r} \\ \frac{\partial S}{\partial \theta} & \frac{\partial N}{\partial \theta} \end{vmatrix} = Kr$$

で表され任意の確率を与える(6)式から求めた r を(5)式に代入するとだ円が得られ、このだ円で囲まれる範囲が2次元正規分布の確率範囲を表す。

4 解析結果

解析には西島らのデータを用いた。このデータは試験材がS45C、600℃焼もどし材 ($\sigma_s=68 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_B=82.7 \text{ kg/mm}^2$, 伸び=25.5%, 絞り=63.1%) であり、直径8mmの平滑試験片を大気中で回転曲げ疲労試験して得たデータである。

つぎに Fig. 3 のデータから各応力レベルについて順序統計によって寿命分布のP-S-N線図を求めたものが Fig. 4 である。

なお前述したように疲労限付近の 10^7 を越えても破壊しないデータについては別の

母集団と考えて解析対象から除き、これまでに破壊したデータについて解析した。また応力 41, 42kg/mm² のそれぞれ一点ずつのデータは統計値として扱えないので解析の対象にはできない。図中 45~50 kg/mm² 付近では比較的ばらつきが小さいが、高応力側と疲労限付近でバラツキが大きく、このように寿命分布では疲労限付近でP-S-N線図が途切れてしまうことに問題がある。

Fig. 5 は Fig. 3 のデータを重みつきプロビット法⁹⁾を用いて整理した強度分布のP-S-N線図であり、繰返し数の対数値で0.1きざみごとに計算した結果である。図から明らかなように、Fig. 4 の場合と異り、疲労限付近の確率分布が定義できることがわかる。また図中に Fig. 4 で示される寿命分布の50%ラインを同時に示してあるが、応力約 44 kg/mm² 以上の範囲では両者はほぼ一致しているが、しかしこれ以下の範囲では寿命分布と強度分布の50%ラインは別々の線上を

Fig. 3. S-N data²⁾ used for statistical analysis.

Fig. 4. P-S-N curve of life distribution obtained by using order statistic.

Fig. 5. P - S - N curve of strength distribution obtained by using weighted Probit analysis method.

Fig. 6. Subgroups of two dimensional normal distribution obtained by considering both of life and strength distribution.

Fig. 7. Contour lines of same probability given as the envelope curve of the contour line of the same probability of subgroups which have two dimensional normal distribution.

たどる。

つぎに Fig. 4, 5 で求めた寿命分布と強度分布を中心分布とする2次元正規分布群を Fig. 6 に示す。図中各応力レベルごとに描かれただ円はこのだ円の中に、それぞれ50%, 80%, 98%の確率でデータが含まれることを示している。また当然のことながら、だ円の大小および形状は中心分布である寿命分布と強度分布のそれぞれの標準偏差で決まる。

つぎに Fig. 6 で得られた2次元正規分布群の同一確率のだ円群の包絡線を描いて求めた等高線が Fig. 7 で示される同一確率線図である。もし Fig. 6 で示されるような2次元正規分布群が無限に得られるならば、Fig. 7 の線図は曲線となるが、ここでは有限個のために折線で示した。図中応力 43 kg/mm² 上に中心を有するだ円は疲労限付近の確率分布を表すものであるから下側の半だ円はそのまま描いてある。

またこの線図は図中にプロットした実験データとも良く対応している。

5 考 察

回転曲げデータのうち疲労限をもつ S - N 線図のデータを統計処理して、Fig. 6, 7 に得られた2次元正規分布群および同一確率線図は従来の P - S - N 線図とは多少性格が異なる。すなわちこれまでの P - S - N 線図は破壊確率曲線を描いたものであり、時間強度で処理する寿命分布では疲労限付近の分布形を確定できないために疲労限を決定できない弱点がある。

例えば、Fig. 4 で示されるように、応力 43 kg/mm² で寿命分布が途切れるが、突然分布が途だえるはずはなく、実際に応力 43 kg/mm² 以下にデータがある以上確率分布が推定できるはずであるが、データが少く統計値として扱えないので、寿命分布が推定できないために P - S - N 曲線が途切れたようになったものである。

一方重みつきプロビット法を使用した強度分布では疲労限付近および長寿命領域のデータをも整理でき、また疲労限も定義できる。しかしながら、一度疲労限らしいものが現れて試験片が破壊しなくなり、長寿命側で再び破壊が生じるような場合に中間の破壊の生じない領域の P - S - N 曲線を最初の疲労限らしい領域で求めた曲線の延長

として評価する点に問題が残る。

以上述べたように寿命分布と強度分布のそれぞれに弱点がある。そこで著者らはこれらの弱点を解決する考え方として、上述のS-N線図で示されるデータの母集団は寿命分布と強度分布の両方から推定される2次元正規分布の集合として考える方法を提案した。

このような考え方に基づく解析手順に従って得られた同一確率線図, Fig. 7 から次のことがわかる。

疲労限は応力 43 kg/mm^2 のレベルで求めた円と時間軸に平行な直線との接線で表される。

また従来のP-S-N線図は試験片の累積破壊確率を表すが、ここで求めた同一確率線図はこの線図内で試験片に破壊が生じる累積確率を表すもので、累積破壊出現確率というべきものであり、この線図から離れるに従って、破壊出現確率が小さくなることを表している。

更に、例えばアルミニウム合金のように疲労限のないもの、あるいは一度疲労限らしいものが出現した後に、再び破壊が生じる場合のS-N線図もこの方法で整理できるはずである。

6 結 論

著者らの提案した方法で疲労限を有するS-N線図のデータを解析した結果をまとめてみると次のようになる。

(1) S-Nデータを2次元正規分布群と考えて処理し、これらの包絡線として同一確率線図を得た。

(2) 疲労限より充分高い、いわゆるS-N線図で表現できる領域では従来の寿命分布あるいは強度分布から求めたP-S-N線図とよく合う。したがってS-Nデータが寿命および強度分布の中心分布から推定した2次元正規分布の集合であるという仮定は妥当である

と考えてよからう。

(3) 疲労限付近の領域での2次元正規分布の形状が確定できた。

この解析方法によれば、疲労限が現れた後に、更に多くの繰返し後に再び破壊が生ずるデータも処理できる。

終りに、本論文を作成するに当って回覧曲げのデータを使用させていただいた金属材料研究所の西島氏ら、ならびにデータ解析に協力していただいた当研究所材料研究室の皆様へ感謝致します。

(昭和53年11月8日 第12回疲労シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) Nishijima, S., C. Masuda, T. Abe, E. Takeuchi, A. Komatsu, A. Ishii, T. Matsuyama, Y. Tanaka, and S. Otsubo, Trans. Nat. Res. Inst. Metals, **19**, 327 (1977).
- 2) Nishijima, S., C. Masuda, T. Abe, Y. Ohta, E. Takeuchi, A. Komatsu, A. Ishii, T. Matsuyama, and H. Sumiyoshi, Trans. Nat. Res. Inst. Metals, **19**, 119 (1977).
- 3) 西島 敏, 増田千利, 材料, **22**, 1097 (1973).
- 4) 西島 敏, 材料, **23**, 9 (1974).
- 5) 藤井 進, 中川隆夫, 橋本和彦, 河村英敏, 日本機械学会論文集, **45**, 1115 (1979).
- 6) 田中道七, 酒井達雄, 材料, **28**, 304 (1979).
- 7) 下河利行, 浜口泰正, 航技研報告, TR-581 (1979).
- 8) 下河利行, 航技研報告, TR-464 (1976).
- 9) Pearson, E. S., and H. O. Hartley, "Biometrika Tables for Statistician", **1**, 4 (1970) Cambridge Univ. Press