3次元き裂に対する全体的Jスカラーの二、三の適用*

久保 司 郎** 大 路 清 嗣**

Some Applications of Global J Scalar to Three-Dimensional Cracks

by

Shiro KUBO and Kiyotsugu OHJI

(Department of Mechanical Engineering, Osaka University, Suita)

In a previous paper J-integrals of a three-dimensional crack embedded in a linear or nonlinear elastic material were discussed. J-integrals of three-dimensional cracks proposed so far were classified into three categories; local J vector, local J scalar and global J vector. A new parameter, global J scalar, was also proposed which was defined by using a kind of crack extension vector. The characteristics and the interrelation of these four J-integrals were discussed. It was shown that the global J scalar plays a very important role in the understanding of J-integral of three-dimensional cracks.

In this paper some applications of the global J scalar were made. The results obtained are as follows:

(1) Rice's J-integral and Knowles-Sternberg's M- and L-integrals were derived from the global J scalar as its special cases. The global J scalar is a generalized form of J-, M- and L-integrals. Some extensions of M- and L-integrals were made by using the global J scalar.

(2) As one of the simplest applications of J-integral of three-dimensional cracks, two expressions of J-integral at the tip of an axi-symmetric crack were obtained by using the local J-vector and the global J-vector. Many expressions, including these two expressions, were also derived using the global J scalar.

(3) An application of the global J scalar to an arbitrary three-dimensional crack was presented. An economical method to determine the distribution of value of J-integral along the crack front was proposed.

(Received Mar. 5, 1981)

キー・ワード：3次元き裂，J積分，全体的Jスカラー，M積分，L積分

1 緒 言

¹⁾ 前報では3次元き裂のJ積分に関する理論的考察を行い、従来提案されているJ積分を局所的Jベクトル、局所的Jスカラーおよび全体的Jベクトルに分類するとともに、新たに全体的Jスカラーを提案した。これら4種類のJ積分の有する性質ならびに相互間の関係が議論され、その結果全体的Jスカラーが3次元き裂のJ積分を理解するうえで有用であることが明らかとなった。

本報では、この全体的Jスカラーの3次元き裂問題に対する適用について考察を加える。まず全体的JスカラーがRiceのJ積分²⁾、Knowles・SternbergのMおよびL積分³⁾を含む一般表示形であり、全体的Jスカラーを用いてMおよびL積分の拡張が可能であることを示す。つぎに3次元き裂として最も簡単な軸対称き

裂をとり上げ、全体的Jスカラーを適用して軸対称き裂の局所のJ値の表示式を求めるとともに、これが局所的Jベクトルあるいは全体的Jベクトルを適用して得られる表示式の、より一般的な表示であることを示す。さらに、一般の3次元き裂に対する全体的Jスカラーの適用とその利点について議論する。

2 各種J積分の定義と性質

本論文で用いる仮定は、前報のそれと同じである。すなわち、(i)ひずみエネルギー密度 W の定義可能な弾性体、(ii)微小変形、(iii)体積力なし、(iv)き裂面上で応力自由、(v)き裂面およびき裂前縁は滑らかであるとする。

¹⁾ 前報で得られた結果は、本報の議論の基礎として不可欠であるので、以下にその必要最小限を記述する。

3次元き裂を有する物体をある平面で切断し、平面とき裂前縁との交点を O とする。切断面内に O 点を囲む任意の領域 A をとる。 x_3 軸が切断面に垂直になるように直角座標系 $x_1x_2x_3$ をとれば、 O 点における局

* 原稿受理 昭和56年3月5日

** 正 会 員 大阪大学工学部 吹田市山田丘

Fig. 1. Integration path and area for local J-integral.

所的Jベクトル J_{local} は次のように書ける。

$$J_{local} = \left[\int_{\Gamma} (W\nu_k - T_j u_{j,k}) d\Gamma - \int_A (\sigma_{3j} u_{j,k})_{,3} dA \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_c} W\nu_k d\Gamma \right] i_k + \int_A \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,3} dA i_3 \quad (1)$$

ここに、 Γ は領域Aの外周となりき裂下面上の一点Pよりき裂面上の一点Qに至る経路、 Γ_c はQOPを結びき裂面に沿う経路、 $d\Gamma$ は Γ および Γ_c の線素である。また、 i_k は x_k 軸方向の単位ベクトル、 ν_k は Γ あるいは Γ_c の外向単位法線ベクトル、 T_j は応力ベクトル、 u_i は変位ベクトル、 σ_{ij} は応力テンソル、 ε_{ij} はひずみテンソルである。コンマのあとの指標 k は x_k に関する偏微分を表し、添字の重複はその添字について1から3まで総和をとることを表しているものとする。直角座標系を用いた場合テンソル成分と物理成分とは一致するが、一般の曲線座標系を用いた場合両者は必ずしも一致しない。そこで両者の別を明らかにするため、本論文では ν_i, σ^{ij} のように数字の添字を有する記号はテンソル成分を表し、 $u_r, \sigma_{r\theta}$ のように他の添字を有する記号は物理成分を表すものとする。

局所的Jスカラー J_{local} は J_{local} の絶対値として与えられると定義する。

全体的Jベクトル J_{global} は、直角座標系に対し、

$$J_{global} = \int_S (W\nu_i - T_j u_{j,i}) i_i dS \quad (2)$$

で与えられる。ここに S はき裂前縁を包み込む物体内の積分面である。曲線座標系 $\theta^1\theta^2\theta^3$ を採用した場合は、

$$J_{global} = \int_S (W\nu_i - T^j u_{j,i}) g^i dS \quad (2')$$

となる。ここに、 g^i は反変基底ベクトル、 $u_{j,i}$ は変位 u_j の共変導関数である。

全体的Jスカラー J_{global} は、直角座標系を用いると、

$$J_{global}(m) = \int_S (W\nu_i - T_j u_{j,i}) m_i dS \\ - \int_V (Wm_{i,j} - \sigma_{jk} u_{j,i} m_{i,k}) dV \quad (3)$$

で表される。ただし、 V は S で囲まれる体積であり、ベクトル $m (=m_i i_i)$ はその導関数がき裂前縁上で特異性を有しない任意のベクトルであるとする。曲線座標系においては、 J_{global} は次のように書ける。

$$J_{global}(m) = \int_S (W\nu_i - T^j u_{j,i}) m^i dS \\ - \int_V (Wm^i_{|k} - \sigma^{jk} u_{j,i} m^i_{|k}) dV \quad (3')$$

き裂前縁上の任意の点Oにおける局所的Jベクトル J_{local} は、O点におけるき裂前縁の接線と垂直な方向を向いている。全体的Jベクトル J_{global} は局所的Jベクトル J_{local} をき裂前縁 f に沿って線積分したものに等しい。すなわち、

$$J_{global} = \int_f J_{local} df \quad (4)$$

また、全体的Jスカラー $J_{global}(m)$ は局所的Jベクトル J_{local} を用いて次式で与えられる。

$$J_{global}(m) = \int_f J_{local} \cdot m df \quad (5)$$

き裂前縁各点でき裂成長ベクトルが m と一致するとき、 $J_{global}(m)$ はき裂成長に伴うポテンシャル・エネルギー解放率を表している。

3 全体的Jスカラー $J_{global}(m)$ とJ, M およびL積分との関係

RiceのJ積分と同じく積分経路独立性を有する積分として、Knowles・Sternbergの提案によるM積分およびL積分がよく知られている。本節では(3)あるいは(3')式で与えられる全体的Jスカラー $J_{global}(m)$ がこれらJ, MおよびL積分のより一般的な表示であることを示すとともに、 $J_{global}(m)$ を用いてMおよびL積分の若干の拡張を行う。

3・1 J積分との関係

まず、直角座標系 $x_1x_2x_3$ を用いた場合について考える。いま、 $a(=a_i i_i)$ を座標に依存しないベクトルとして

$$m_i = a_i \quad (6)$$

とおく。(6)式を(3)式に代入すると、

$$J_{global}(a) = a_i \int_S (W\nu_i - T_j u_{j,i}) dS \quad (7)$$

となる。(2)および(7)式より

$$J_{global}(a) = a \cdot J_{global} \quad (8)$$

が得られる。特に、2次元き裂に対し

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

とおくと、 $J_{global}(a)$ はRiceのJ積分²⁾

$$J = \int_{\Gamma} (W\nu_1 - T_j u_{j,1}) d\Gamma \quad (9)$$

に帰着する。ここに Γ は2次元物体中でき裂前縁を囲む経路、 $d\Gamma$ はその線素である。

3・2 M積分との関係ならびにM積分の拡張

いまベクトル m_i として

$$m_i = x_i \quad (10)$$

を選び(3)式に代入すると,

$$J_{global}(\mathbf{x}) = \int_S (W\nu_i - T_{j,j,i}) x_i dS \\ - \int_V (W\delta_{ii} - \sigma_{j,i} u_{j,i}) dV \quad (11)$$

ここに δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり, 2次元問題に対し $\delta_{ii}=2$, 3次元問題に対し $\delta_{ii}=3$ となる.

いま, ひずみが応力の n 乗に比例する, 非線形弾性体を仮定すると, ひずみエネルギー密度 W は,

$$W = \{n/(n+1)\} \sigma_{j,i} \varepsilon_{j,i} \quad (12)$$

となる. さらに微小ひずみの定義式

$$\varepsilon_{j,i} = (u_{j,i} + u_{i,j})/2$$

および応力テンソルの対称性を用いると W は

$$W = \{n/(n+1)\} \sigma_{j,i} u_{j,i} \quad (13)$$

と書直せる. したがって(11)式の体積積分は, つりあい式 $\sigma_{j,i} = 0$ を用いて

$$- \int_V (W\delta_{ii} - \sigma_{j,i} u_{j,i}) dV \\ = - \int_V \left(\frac{n}{n+1} \delta_{ii} - 1 \right) (\sigma_{j,i} u_{j,i}) dV \quad (14)$$

となる. (14)式を(11)式に代入し, 発散定理を適用すると, $J_{global}(\mathbf{x})$ は面積積分のみで表現できる.

$$J_{global}(\mathbf{x}) = \int_S [(W\nu_i - T_{j,j,i}) x_i \\ - \{\delta_{ii} n/(n+1) - 1\} T_{j,i} u_{j,i}] dS \quad (15)$$

いま, 線形弾性体 ($n=1$) を考える. 2次元き裂問題に対しては(15)式の面積積分を線積分に変換し, $\delta_{ii}=2$ を用いると,

$$J_{global}(\mathbf{x}) = \int_\Gamma (W\nu_i - T_{j,j,i}) x_i d\Gamma \quad (16)$$

となる. また, 3次元き裂問題に対しては, $\delta_{ii}=3$ を(15)式に代入して

$$J_{global}(\mathbf{x}) = \int_S (W\nu_i x_i - T_{j,j,i} x_i - T_i u_i/2) dS \quad (17)$$

が得られる. (16)および(17)式は Knowles・Sternberg の提案によるM積分と一致する. ³⁾したがって, (15)式はM積分の拡張表示式になっていることがわかる.

(15)式は直角座標系を用いた場合のM積分の表示式であるが, 他の座標系を用いた場合に対しても同様にM積分が求められる.

いま円柱座標系 $r\theta z$ を導入すると, (10)式のベクトル $\mathbf{m}$ の成分は,

$$m^1 = r, \quad m^2 = 0, \quad m^3 = z \quad (18)$$

と書ける. したがって

$$m^1|_1 = m^2|_2 = m^3|_3 = 1, \quad \text{他の } m^i|_j = 0$$

一般の曲線座標系では(13)式に対応する式として

$$W = \{n/(n+1)\} \sigma^{j,i} u_{j,i}$$

が成立するので, つりあい式 $\sigma^{j,i}|_i = 0$ を用いると(3)式の体積積分は以下のように面積積分に変換できる.

$$- \int_V (W m^i|_i - \sigma^{j,k} u_{j,i} m^i|_k) dV \\ = - \int_V \left(\frac{3n}{n+1} - 1 \right) (\sigma^{j,k} u_{j,i})|_k dV \\ = - \int_S \frac{2n-1}{n+1} \sigma^{j,k} \nu_k u_{j,i} dS$$

一方, $u_i|_j$ は

$$u_i|_1 = \partial u_i / \partial r, \quad u_i|_2 = \partial u_i / \partial r - u_i / r, \quad u_i|_3 = \partial u_i / \partial r \\ u_i|_2 = \partial u_i / \partial \theta - u_i / r, \quad u_i|_2 = \partial u_i / \partial \theta + r u_i, \\ u_i|_2 = \partial u_i / \partial \theta$$

$$u_i|_3 = \partial u_i / \partial z, \quad u_i|_3 = \partial u_i / \partial z, \quad u_i|_3 = \partial u_i / \partial z$$

と書表せる. また, テンソル成分と物理成分の間には,

$$u_1 = u_r, \quad u_2 = r u_\theta, \quad u_3 = u_z$$

$$T^1 = T_r, \quad T^2 = T_\theta / r, \quad T^3 = T_z$$

$$\nu_1 = \nu_r, \quad \nu_2 = r \nu_\theta, \quad \nu_3 = \nu_z$$

なる関係がある. これらの式を用いて (3)式を変形すると

$$J_{global}(\mathbf{r} + \mathbf{z}) = \int_S [W(\nu_r r + \nu_z z) - r(T_r \partial u_r / \partial r \\ + T_\theta \partial u_\theta / \partial r + T_z \partial u_z / \partial r) - z(T_r \partial u_r / \partial z \\ + T_\theta \partial u_\theta / \partial z + T_z \partial u_z / \partial z) - \{(2n-1)/(n+1)\} (T_r u_r + T_\theta u_\theta + T_z u_z)] dS \quad (19)$$

となる. (19)式はM積分の円柱座標系表示である.

$$\text{球座標系 } r\theta\phi \text{ を導入し, (10)式に対応して } m_i \text{ を} \\ m^1 = r, \quad m^2 = m^3 = 0 \quad (20)$$

とおく. (20)式を(3)式に代入して前と同様のテンソル演算を行うと, M積分の球座標系表示が得られる.

$$J_{global}(\mathbf{r}) = \int_S [W\nu_r r - r(T_r \partial u_r / \partial r + T_\phi \partial u_\phi / \partial r \\ + T_\theta \partial u_\theta / \partial r) - \{(2n-1)/(n+1)\} (T_r u_r + T_\phi u_\phi \\ + T_\theta u_\theta)] dS \quad (21)$$

3・3 L積分との関係

直角座標系 $x_1 x_2 x_3$ を用いる. いまベクトル $\mathbf{m}$ の成分 m_i が次式で与えられる場合を考える.

$$m_i = e_{3ik} x_k \quad (22)$$

ここに e_{jik} は交代テンソルである. 材料の等方性を仮定すると

$$\sigma_{j,k} u_{j,i} = \sigma_{j,i} u_{k,j} \quad (23)$$

であるので, (3)式の体積積分はつりあい式 $\sigma_{j,j} = 0$ と発散定理を用いて

$$- \int_V (W m_{i,i} - \sigma_{j,k} u_{j,i} m_{i,k}) dV \\ = \int_V \sigma_{j,k} u_{j,i} e_{3ik} dV = \int_S \sigma_{j,i} \nu_j u_k e_{3ik} dS \quad (24)$$

と書直せる. したがって(3)式の J_{global} は

$$J_{global}(e_{3ik} x_k i_i) = \int_S e_{3ik} (W\nu_i x_k - T_{j,j,i} x_k + T_i u_k) dS \quad (25)$$

となる。これは Knowles・Sternberg の³⁾L積分である。

直角座標系以外の座標系を用いた場合に対しても同様にしてL積分が求められる。まず円柱座標系 $r\theta z$ を用いた場合について考える。直角座標系の x_3 軸を円柱座標系の z 軸と一致させる。このとき、(2)式の $\mathbf{m}$ を円柱座標系でテンソル表示すると

$$m^1=m^3=0, m^2=-1 \quad (26)$$

となる。(26)式を(3')に代入し材料の等方性を用いて前述と同様の演算をすると

$$J_{global} = \int_S (-W\nu_\theta r + T_r \partial u_r / \partial \theta + T_\theta \partial u_\theta / \partial \theta + T_z \partial u_z / \partial \theta) dS \quad (27)$$

となる。(27)式は円柱座標系を用いた場合のL積分の表示式である。

球座標系 $r\phi\theta$ を用いた場合、(18)式の $\mathbf{m}$ のテンソル成分は、

$$m^1=m^2=0, m^3=-1 \quad (28)$$

となる。(28)式を用いて球座標系におけるL積分の表示式を求めると、次式が得られる。

$$J_{global} = \int_S (-W\nu_\theta r \sin \phi + T_r \partial u_r / \partial \theta + T_\phi \partial u_\phi / \partial \theta + T_\theta \partial u_\theta / \partial \theta) dS \quad (29)$$

4 軸対称き裂問題に対する適用

3次元き裂の最も簡単な例として本節では軸対称き裂問題を取りあげ、局所的Jベクトル $\mathbf{J}_{local}$ 、全体的Jベクトル $\mathbf{J}_{global}$ および全体的Jスカラー J_{global} を用いて局所のJ値の表示式を求め、 J_{global} が全体の理解に有用であることを示す。

4・1 局所的Jベクトル $\mathbf{J}_{local}$ を用いたJの表示式

いま Fig. 2 のように半径 a の軸対称き裂を有する試験片を考える。簡単のため試験片形状、負荷はき裂面に関して対称であるとする。図のように対称軸が z 軸に一致するような円柱座標系 $r\theta z$ を導入する。 $\theta=0$ 面内に、 z 軸に平行に $y(=x_2)$ 軸を、 z 軸に垂直に $x(=x_1)$ 軸をとる。 $t(=x_3)$ 軸は x および y 軸に垂直

Fig. 2. Axi-symmetric crack.

にとる。

前報の結果より明らかなように、き裂前縁と xy 面($\theta=0$ 面)との交点 O における局所的Jベクトル $\mathbf{J}_{local}$ は x 軸方向を向いている。したがって(1)式より

$$\mathbf{J}_{local} = \left[\int_\Gamma (W\nu_1 - T_j u_{j,1}) d\Gamma - \int_A (\sigma_{3j} u_{j,1})_{,3} dA \right] \mathbf{i}_1 \quad (30)$$

となる。 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ および σ_{rz} 以外の応力は0であるので σ_{ij} はこれらを用いて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta \\ \sigma_{22} &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta \\ \sigma_{12} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta, \quad \sigma_{33} = \sigma_z \\ \sigma_{13} &= \sigma_{rz} \cos \theta, \quad \sigma_{23} = \sigma_{rz} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

と書表せる。また変位成分としては u_r および u_z しか存在しないので

$$u_1 = u_r \cos \theta, \quad u_2 = u_r \sin \theta, \quad u_3 = u_z \quad (32)$$

(31)および(32)式と

$$\partial / \partial x_3 = \sin \theta \partial / \partial r + (\cos \theta / r) \partial / \partial \theta$$

を用いて(30)式を変形し $\mathbf{J}_{local}$ の絶対値である局所的Jスカラー J_{local} を求めると次式が得られる。

$$J_{local} = \int_\Gamma (W\nu_r - T_r \partial u_r / \partial r - T_z \partial u_z / \partial r) d\Gamma - \int_A (1/r) (\sigma_r \partial u_r / \partial r - \sigma_\theta u_r / r + \sigma_{rz} \partial u_z / \partial r) dA \quad (33)$$

4・2 全体的Jベクトル $\mathbf{J}_{global}$ を用いたJの表示式

前述のように、軸対称き裂の局所的Jベクトル $\mathbf{J}_{local}$ は半径方向を向いており、その絶対値はき裂前縁各点で同じである。したがって軸対称き裂全体に対し全体的Jベクトル $\mathbf{J}_{global}$ を評価すると、その値は(4)式より恒等的に0となり有用な情報は得られない。そこで、Fig. 3 に示すように $\theta=0$ の平面で軸対称き裂を二つに分けて、その片方に全体的Jベクトル $\mathbf{J}_{global}$ を適用してみる。 $\theta=0$ のときの r 方向、 $\theta=\pi/2$ のときの r 方向、および z 方向をそれぞれ $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ および $\mathbf{i}_3$ とす

Fig. 3. Axi-symmetric crack cut into two halves along a symmetry plane.

る. $\theta=0$ 面内でき裂先端を囲む経路を Γ , Γ を $\theta=0$ から $\theta=\pi$ まで回転して得られる面を S_1 , $\theta=0$ 面内で Γ とき裂面で囲まれる面を S_2 とする. 対称性より J_{global} が $z(g^3)$ 方向の成分を持たないことに注意すると, (2)式より

$$J_{global} = \int_{S_1+2S_2} (W\nu_i - T^j u_{j,i}) g^i dS \quad (34)$$

となる. S_1 は回転面であるので軸対称性を考慮すると, S_1 上で $\nu_2=0$, $T^2=0$, $u_1|_2=u_3|_2=0$ となる. また, S_2 上では $\nu_1=\nu_3=0$ となる. そこで, g^1 が i_1 および i_2 を用いて

$$g^1 = i_1 \cos \theta + i_2 \sin \theta$$

と書表せること, および S_2 上で

$$\nu_2 g^2 = -i_2$$

となることを用いて (34) 式を書直すと

$$J_{global} = 2i_2 \left[\int_{\Gamma} (W\nu_r - T_r \partial u_r / \partial r - T_z \partial u_z / \partial r) r d\Gamma - \int_A (W - \sigma_{\theta} u_r / r) dA \right] \quad (35)$$

一方, 前述のように局所的 J ベクトル J_{local} は r 方向を向いておりその絶対値 J_{local} はき裂前縁に沿って一様であるので

$$J_{local} = J_{local} (i_1 \cos \theta + i_2 \sin \theta) \quad (36)$$

(36) 式を (4) 式に代入すると

$$J_{global} = 2i_2 a J_{local} \quad (37)$$

(35) 式と (37) 式より

$$J_{local} = \int_{\Gamma} (W\nu_r - T_r \partial u_r / \partial r - T_z \partial u_z / \partial r) (r/a) d\Gamma - \int_A (W - \sigma_{\theta} u_r / r) dA/a \quad (38)$$

となる. この表示式は Astiz らの結果を $2\pi a$ で除したものと一致する.

4.3 全体的 J スカラー $J_{global}(m)$ を用いた J の表示式

4.1 項および 4.2 項では局所的 J ベクトル J_{local} および全体的 J ベクトル J_{global} を用いて軸対称き裂の局所の J 値 J_{local} を求めた. その結果全く異なる二つの表示式 (35) および (38) が得られた. このことは一見奇妙にうけとれるが, 本項ではこれらの表示式が, 全体的 J スカラー $J_{global}(m)$ を用いて得られる表示式の特例として統一的に導かれることを示す.

ベクトル m が円柱座標系 $r\theta z$ において r 方向の成分しか有しない場合を考える. すなわち,

$$m^1 = f(r), \quad m^2 = m^3 = 0 \quad (39)$$

このとき 0 でない m^1 の成分は

$$m^1|_1 = df(r)/dr, \quad m^1|_2 = f/r$$

だけである. したがって, 積分面 S として Fig. 2 の Γ を $\theta=0$ から $\theta=2\pi$ まで回転して得られる回転面をとれば, (3) 式を軸対称性を考慮して変形して

$$J_{global}(m) = 2\pi \left[\int_{\Gamma} (W\nu_r - T_r \partial u_r / \partial r - T_z \partial u_z / \partial r) f(r) r d\Gamma - \int_A \{ W(df/dr + f/r) - (\sigma_r \partial u_r / \partial r + \sigma_{rz} \partial u_z / \partial r) df/dr - \sigma_{\theta} u_r / r^2 \} r dA \right] \quad (40)$$

一方, (5) 式と (39) 式より

$$J_{global}(m) = 2\pi a f(a) J_{local} \quad (41)$$

であるので, 局所的 J スカラー J_{local} は

$$J_{local} = \left[\int_{\Gamma} (W\nu_r - T_r \partial u_r / \partial r - T_z \partial u_z / \partial r) f(r) r d\Gamma - \int_A \{ W(df/dr + f/r) - (\sigma_r \partial u_r / \partial r + \sigma_{rz} \partial u_z / \partial r) df/dr - \sigma_{\theta} u_r / r^2 \} r dA \right] / \{ a f(a) \} \quad (42)$$

いま $f(r)$ として $f(r)=1$ を選んで (42) 式に代入して J_{local} を求めると再び (38) 式が得られる. つぎに $f(r)$ として $f(r)=1/r$ を選んで J_{local} を計算すると (35) 式が得られる. したがって (42) 式は, J_{local} の, より一般的な表示である.

ここではベクトル m が r 方向の成分しかもたない場合について考察したが, 他の場合についても同様に議論をすすめることができる. たとえば, ベクトル m を (18) 式のようにおけば, n 乗形非線形弾性体に対し,

$$J_{local} = \int_{\Gamma} \left[W(\nu_r r + \nu_z z) r - r^2 (T_r \partial u_r / \partial r + T_z \partial u_z / \partial r) - r z (T_r \partial u_r / \partial z + T_z \partial u_z / \partial r) - \{ (2n-1)/(n+1) \} r (T_r u_r + T_z u_z) \right] d\Gamma / a^2 \quad (43)$$

以上のようにベクトル m として何を選ぶかに応じて軸対称き裂の J_{local} の式が幾つもあり得られる. どの表示式を用いても結果は相等しいはずであるので, どれを用いるかは計算の便宜による.

5 一般の 3 次元き裂に対する適用

(5) 式からわかるように全体的 J スカラー $J_{global}(m)$ は局所的 J ベクトル J_{local} とベクトル m の内積をき裂前縁に沿って積分したものに等しい. そこで適当に選ばれたいくつかの m に対する $J_{global}(m)$ を計算しその結果を組合わせれば, き裂前縁に沿う局所の J 値の分布を知ることができる.

一例として Fig. 4 のような半径 a の半円表面き裂

Fig. 4. Semi-circular surface crack.

を考える。図のように $\theta=0$ および $z=0$ が対称面となるように円柱座標系 $r\theta z$ をとる。前報の結果より局所的Jベクトル J_{local} は r 方向を向いているので、

$$J_{local} = J_{local} g^1 \quad (44)$$

ここに g^1 は r 方向の反変基底ベクトルである。局所的Jスカラー J_{local} は対称性を用いると次のようにFourier級数に展開できる。

$$J_{local} = b_0/2 + b_1 \cos 2\theta + b_2 \cos 4\theta + \dots + b_k \cos 2k\theta + \dots \quad (45)$$

いま k を 0 または自然数として、ベクトル m を

$$m = \cos 2k\theta g_1 \quad (46)$$

とおく。ここに g_1 は r 方向の共変基底ベクトルである。(44)~(46)式を(5)式に代入すると、

$$J_{global}(m) = \pi a b_k / 2 \quad (47)$$

となる。(46)式のベクトル m を用いたときの $J_{global}(m)$ は、(3)'式に(46)式を代入し、さらにテンソル演算を用いて変形することにより得られる。よって b_k は(47)式を用いて

$$\begin{aligned} b_k = & \frac{2}{\pi a} \int_{S_1} \cos 2k\theta \{ W \nu_r - (T_r \partial u_r / \partial r + T_\theta \partial u_\theta / \partial r \\ & + T_z \partial u_z / \partial r) \} dS - \frac{2}{\pi a} \int_V \left[W \frac{\cos 2k\theta}{r} \right. \\ & + (\sigma_{\theta\theta}/r) \{ \partial u_r / \partial r \sin 2k\theta - (\partial u_r / \partial \theta \\ & - u_\theta) \cos 2k\theta / r \} + (\sigma_{\theta r}/r) \{ \partial u_\theta / \partial r \sin 2k\theta \\ & - (\partial u_\theta / \partial \theta + u_r) \cos 2k\theta / r \} \\ & + (\sigma_{rz}/r) \{ \partial u_z / \partial r \sin 2k\theta \\ & \left. - \partial u_z / \partial \theta \cos 2k\theta / r \} \right] dV \end{aligned} \quad (48)$$

ここに S_1 は Fig. 4 に示すようなドーナツ状の積分面、 V は S_1 , S_2 およびき裂面によって囲まれる体積である。(48)式を $k=0, 1, 2, \dots$ に対し計算すれば、局所的J値 J_{local} の分布を定める定数 $b_0, b_1, b_2, \dots$ が求められる。

つぎに有限要素応力・ひずみ解析結果などを用いて局所的J値 J_{local} ($=|J_{local}|$) を数値的に計算する場合を考え、上記の方法と、(1)式を用いて直接的に J_{local} を求める方法の利点を比較する。まず、(1)式の被積分関数の中には応力およびひずみの x_3 に関する偏微分が含まれており、その値は数値計算上避けがたい応力およびひずみの局所的変動に大きく左右される。しかるに(48)式の被積分関数には座標に関する変位の偏微分は含まれても応力およびひずみの偏微分は含まれていない。したがって、(48)式を用いる上記の方法は応力およびひずみの局所的変動の影響をあまり受けず数値計算に適していると考えられる。つぎに、(1)式を用いる直接的方法によれば、1回のJの計算で、き裂前縁上の1点のJ値が与えられる。これに対し、上記の方法によれば、 $k=0, 1, 2$ というような小さな k に対する b_k 値を求めれば、 J_{local} の分布を与える(45)式の最初の

数項が求められることになる。換言すれば、 J_{local} の大まかな分布がわかることになり、このことは実用的観点から有用である。また、より詳細な J_{local} の分布を知りたい場合は、 k を順次増やして計算を行えばよい。以上のように全体的Jスカラー $J_{global}(m)$ を媒介として局所的J値 J_{local} を求める上記の方法は J_{local} を直接的に求める方法と比較していくつかの利点を有していることがわかる。

(48)式は体積積分を含んでいるが、もし全ての項が面積積分で表示できれば計算が簡略化される。そこでまず、非線形弾性体に対し提案されている(19)式のM積分の応用を考える。(3)節の議論より、この表示式はベクトル m が(18)式で与えられるときの全体的Jスカラー $J_{global}(m)$ であるので、(5)、(18)および(48)式より、

$$J_{global}(m) = \int_f J_{local} r df = \pi a^2 b_0 / 2$$

よって、 S_2 上で応力自由かつ $\nu_r = \nu_z = 0$ 、き裂面上で応力自由、 $\nu_r = 0$ かつ $z=0$ であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} b_0 = & \frac{2}{\pi a} \int_{S_1} \{ W(\nu_r r + \nu_z z) - r(T_r \partial u_r / \partial r + T_\theta \partial u_\theta / \partial r \\ & + T_z \partial u_z / \partial r) - z(T_r \partial u_r / \partial z + T_\theta \partial u_\theta / \partial z \\ & + T_z \partial u_z / \partial z) - \{ (2n-1)/(n+1) \} (T_r u_r + T_\theta u_\theta \\ & + T_z u_z) \} dS \end{aligned} \quad (49)$$

したがって非線形弾性体に対しては、 b_0 は面積積分のみで評価できる。

さらに Fig. 4 のように直角座標系 $x_1 x_2 x_3$ をとり、

$$m_1 = 1, m_2 = 0, m_3 = 0 \quad (50)$$

とすると、(7)式より $J_{global}(m)$ は体積積分を含まない。

$$J_{global}(m) = \int_S (W \nu_1 - T_j u_{j,1}) dS \quad (51)$$

しかるに(44)、(50)および(5)式より、このときの $J_{global}(m)$ は、

$$J_{global}(m) = \int_f J_{local} g^1 \cdot m df = \int_f J_{local} \cos \theta df \quad (52)$$

となる。(49)式と組合せると

$$\begin{aligned} b_0 + \frac{2}{3} b_1 - \frac{2}{3 \cdot 5} b_2 + \frac{2}{5 \cdot 7} b_3 - \frac{2}{7 \cdot 9} b_4 + \dots \\ = \int_{S_1 + 2S_2} (W \nu_1 - T_j u_{j,1}) dS \end{aligned} \quad (53)$$

体積積分を含まない(53)式も b_k の計算の補助として用いることができる。

6 結 言

前報で提案した全体的Jスカラーの応用について議論した。得られた結果は以下のとおりである。

(1) 全体的Jスカラー $J_{global}(m)$ の定義式中にあらわれるベクトル m を適当に選べば、 $J_{global}(m)$ をJ、MあるいはL積分に帰着させることができる。したがって $J_{global}(m)$ はこれらを統一した一般的表示である。 $J_{global}(m)$ を用いてMおよびL積分の若干の拡張がな

された。

(2) 全体的 J スカラー $J_{global}(m)$ を用いて軸対称き裂の局所の J 値の表示式を求めた。得られた結果は、局所的 J ベクトル J_{local} および全体的 J ベクトル J_{global} を用いて得られる表示式をその特殊例として含む、より一般的な表示式である。

(3) 全体的 J スカラー $J_{global}(m)$ を用いて一般の 3 次元き裂に対しき裂前縁に沿った局所の J 値を求める方法を提案し、その利点について議論した。

本研究は文部省科学研究費(昭和54年度奨励研究A)の補助をうけた。全体的 J スカラーと M および L 積分

との関係については、米国ブラウン大学 J. R. Rice 教授より有益な助言をうけた。記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 久保司郎, 大路清嗣, 材料, **30**, 796 (1981).
- 2) Rice, J. R., J. Appl. Mech., **35**, 379 (1968).
- 3) Knowles, J. K., and E. Sternberg, Archive for Rat. Mech. Anal., **44**, 187 (1972).
- 4) Fung, Y. C., (大橋義夫, 村上澄男, 神谷幸生, 共訳), “固体の力学/理論”, p. 116 (1970) 培風館
- 5) Astiz, M. A., M. Ellices, and V. S. Galvez, Proc. ICF4, Waterloo, Canada, **3**, 395 (1975).

書 評

“Surface Effects in Adhesion, Friction, Wear, and Lubrication”

D. H. Buckley (著)

(1981年, Elsevier Scientific Publishing Co. 発刊, 245×165mm, 632ページ, Dfl. 220)

本書は Elsevier 社発刊のトライボロジ(摩擦, 摩耗, 潤滑)シリーズの第5巻目であるが, いままでの4巻がいずれもトライボロジ現象を工学ならびに技術の立場から取扱っているのに対し, 本書では工学のみならず材料科学(または物性工学)の観点からトライボロジ現象の本質を探究しようとしたものである。以下述べる本書の内容からみて, solid surfaces(固体表面構造ないしは固体表面層)に関係ある研究者にとっても好適の参考書である。

書名の意味は, 凝着, 摩擦, 摩耗および潤滑の諸現象に対し固体表面構造, 特に極表面の物性がいかに重大な影響を及ぼすかを言わんとしたものである。その目的達成には, まず固体表面分析機器の駆使が不可欠となるが, 第2章において低速電子線回折(LEED), オージェ電子分光(AES), X線光電子分光(XPS または ESCA), 電界イオン顕微鏡(FIM)法など最近の新しい種々の表面分析法を紹介している。米国航空宇宙局(NASA)・ルイス研究所内の著者の研究室には, これら最近の表面分析機器が数多く設置されトライボロジ現象基礎研究のため使用されているが, それらによって得られた鮮明な写真, 図表が本書の随所に掲載されている。同時に引用文献よりの豊富な写真, 図表も適切に収録されている。

つぎに第3章では, いわゆる完全状態固体表面についての考え方を原子構造, 結晶構造の視点からとりあげるとともに, 現実の固体表面の欠陥ならびに汚染について FIM 写真その他多くのデータにより詳述している。また第4章では, 我々が工業的に潤滑面, すべり面として使用する固体表面を, 前記表面分析機器以外に表面粗さ測定機, 金属顕微鏡, 透過電子顕微鏡(TEM), 走査電子顕微鏡(SEM)などをも用いて解析している。著者が NASA に勤務している関係から, 欠陥のない, かつ原子オーダーで清浄な固体表面を追求することは理解できると同時に, 以下の凝着, 摩擦などの実験に当たっても地上実験室で得られる完全表面の限界に挑戦した経験ならびに苦闘の跡を伺うことができる。現在の進歩した真空技術と次々発表される新しい表面分析機器とを効果的に利用してはじめて可能な先端技術であろう。

(44ページに続く。)