動的エネルギー解放率に関する基礎的考察*

矢 富 盟 祥**

Theoretical Study on Dynamic Energy Release Rate

by

Chikayoshi YATOMI

(Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University, Kyoto)

This paper presents theoretical considerations on the expressions for the dynamic energy release rate in elastic crack propagation.

The validity of the expressions, which have been proposed by Erdogan, by Achenbach and by Freund, is discussed on the basis of the fundamental expression defined by an overall energy rate balance.

The energy release rate is divided into the usual quasi-static energy release rate plus a non-positive dynamic contribution; they are discussed as the strain energy release rate for the former and as the kinetic energy generating rate for the latter. They will be useful as new parameters related to the dynamical behavior of crack propagation.

The mathematical derivations given here are not in detail, but rather the background of the assumptions and physical considerations of the results are emphasized.

(Received Oct. 17, 1981)

キー・ワード：動的エネルギー解放率，ひずみエネルギー解放率，運動エネルギー生成率

1 結 言

Griffith¹⁾に端を発した準静的な場合のエネルギー解放率の概念は Irwin²⁾, Bueckner³⁾等による破壊面上での仕事また Rice⁴⁾による J 積分へと結びつけられ破壊力学における重要な物理量となった。引続き動的問題に対しても破壊面上の仕事率を計算する Erdogan⁵⁾および Achenbach⁶⁾の公式また J 積分を一般化した Atkinson・Eshelby⁷⁾あるいは Freund⁸⁾による公式等が提案された。しかしながら動的問題に対するそれらの公式は、基本的には同じ物理概念に基づきながらも同一の定義式から厳密に導かれたものでなく、その同等性は明らかではなかった。周知のようにき裂伝ばの問題では、動く特異性というやっかいな場の量を扱わなければならない、普通なめらかな場での結果である発散定理、微分あるいは極限操作と積分の交換等が単純には適用できない。実際 Griffith¹⁰⁾の誤りにも見られるようにこの種の操作を不注意に行ったため間違った結果を導いた例は少くない。

そこで本論文は、2) 解放率の基本となる定義、諸公式を議論した後、3) 特異性を扱う際の二、三の重

要な数学的補題を述べ、4) 次いで解放率の諸公式の同等性、誤りを示し、5) 最後に、得られた結果を元なき裂先端からのひずみエネルギー解放率、運動エネルギー生成率に関し考察するものである。なお数学的厳密性を追求した著者等の報告とは立場を変え、そこでは述べなかった仮定の数学的背景および結果の物理的考察に重点を置いている。したがって詳細な証明等は前報告を参照していただきたい。

2 動的エネルギー解放率の諸公式

問題を簡単にするため、2次元線型弾性体内を直線的に速度 $\mathbf{c}$ で伝ばしているき裂を考える。き裂面上では伝ば中表面力 $\mathbf{s}=\mathbf{0}$ であるとする。き裂先端近傍での各点の応力 $\mathbf{S}$ 、変位 $\mathbf{u}$ 、ひずみエネルギー密度 w 、はすべてき裂面および先端を除いてなめらかな関数とする。密度 ρ は一定とする。そのとき、物体力を無視して

$$\text{運動方程式} \quad \text{div} \mathbf{S} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

$$\text{とエネルギー関係式} \quad \dot{w} = \mathbf{S} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}$$

がき裂面および先端を除いた各点で成立するとすれば、領域 $\mathcal{Q}$ がき裂面および先端を内に含まぬ限りエネルギー保存則

* 原稿受理 昭和56年10月17日

** 正 会 員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

Fig. 1. Arbitrary small region surrounding a crack tip.

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} (w+k) da \quad (1)$$

が成立する。ここで $\partial \mathcal{D}$ は $\mathcal{D}$ の境界、 $(\dot{})$ は時間での偏微分を示し、 $k = (\rho/2)\dot{\mathbf{u}}^2$ は単位体積当りの運動エネルギーである。そこでいま、Fig. 1 のようなき裂先端 z_t を内に含む微小領域 $\mathcal{B}$ を考え(1)式の両辺の差

$$\mathcal{E} = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathbf{s} - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} (w+k) da \quad (2)$$

が存在するとき、これを動的エネルギー解放率と定義する。(2)式で定義された $\mathcal{E}$ は、(1)式より、領域 $\mathcal{B}$ が z_t を含む限りその形に依らないことが示せ、その意味でき裂先端固有の量である。現在知られている動的エネルギー解放率の諸公式は、いずれも基本的には(1)および(2)式に基づいて導かれている。その代表的な例として、き裂面を含む平面（以後破壊面と呼ぶ）で物体を二分し、き裂伝ばの問題を半平面上での境界応力が進展する問題としてとらえ、破壊面上でエネルギー保存則(1)を使い、結局上下部分のエネルギー不釣り合量として破壊面上での仕事率のみが残るとし Erdogan⁵⁾ は

$$\mathcal{E}_E = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{Q}_{t_0 t}} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t_0) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{l}(t), t_0) d\mathbf{s}_x \quad (3)$$

を得、一方 Achenbach⁶⁾ は

$$\mathcal{E}_A = - \int_{\mathcal{Q}_t} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{s}_x \quad (4)$$

を得た。（全く同一の議論から、結果の公式は異っていることに注意。）ここで $(d/dt)_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} (d/dt)$ 、 $\mathbf{l}(t) = z_t - z_{t_0}$ 、 $\mathcal{Q}_{t_0 t}$ は時間 t_0 から t の間で新しく生じたき裂面、 $\mathcal{Q}_t$ は z_t を横切る破壊面； $\mathcal{Q}_t$ あるいは $\mathcal{Q}_{t_0 t}$ 上の積分はそれらの両面上で積分することを意味する（き裂面上で $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$ 等は2個関数であることに注意）。(3)式は準静的な場合（かつ線型弾性体）であれば、き裂を閉じる仕事率としての意味があるであろうが、動の場合にも解放率に等しくなるということは自明でない。一方(4)式は動的、非線型にも使えそうな一般的な仕事率としての形を持っている。両者ともき裂先端

近傍の場のうち破壊面上だけの解がわかれば $\mathcal{E}$ が得られるという点で便利な公式である。

一方 Freund⁸⁾ はき裂先端を囲み、ともに動く小さなループを考え、そのループ内を除いた領域にエネルギー保存則(1)を適用し、本質的には Atkinson・Eshelby⁷⁾ により予見されていた

$$\mathcal{E}_F = \lim_{\mathcal{B} \rightarrow z_t} \int_{\partial \mathcal{B}} \{ \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (w+k) \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \} d\mathbf{s} \quad (5)$$

を得た。同じ論文内で彼は(5)式の $\mathcal{E}_F$ は、一般には $\mathcal{B}$ の形によらないことを述べ、き裂先端を囲む長方形領域に(5)式を適用し Achenbach の公式(4)が証明されることとした（この証明は実は誤りであることを後で示す）。次いで Erdogan の公式(3)の証明をも試みているが難解であると途中放棄している。以上からわかるように諸公式(3), (4), (5)は(1)式を用い基本的には(2)式概念に基づきながらも、(2)式より直接、厳密に導かれたものでなく、その推論に数理論の飛躍があり結果としてそれ等の同等性ないし正当性が自明でなくなっている。しかしながら元になる物理概念は同一であること、また解が知られている事例ではすべて同一の値になるということより証明のないまま、現在までそれぞれ動的エネルギー解放率として使用されている。

3 き裂伝ばに伴う場の数学的特性と補題

線型弾性体においてき裂先端の速度 $\mathbf{c}$ が表面波の速度より小さい場合には、き裂先端近傍の場の特性は一般に次のようである（不連続破面がき裂先端に達した瞬間等の場合を除く）。き裂先端 z_t からの位置ベクトル $\mathbf{r}$ の大きさを $r (=|\mathbf{r}|)$ とすると空間、時間的に一様に、 $r \rightarrow 0$ のとき

- 1) 変位 $\mathbf{u} \sim r^{1/2}$
- 2) 応力 $\mathbf{S} \sim \nabla \mathbf{u} \sim r^{-1/2}$
- 3) ひずみエネルギー密度 $w \sim r^{-1}$

のように漸近展開できる。このような時刻 t と位置 $\mathbf{x}$ の関数 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ を $\mathbf{r}$ と t の関数 $\varphi(z_t + \mathbf{r}, t)$ と考え、 φ' を $\mathbf{r}$ を固定して t で偏微分したものとすると

$$\dot{\varphi} = \varphi' - \nabla_c \varphi$$

となる。ここで $\nabla_c \varphi = \nabla \varphi \cdot \mathbf{c}$ は速度 $\mathbf{c}$ 方向の φ の方向微分である。上記 1)~3) の漸近展開が時間に一様であることから φ と φ' （あるいは φ' , φ'' ...等）は同一のオーダーの特異性をもち、 $\dot{\varphi}$ および $\nabla \varphi$ は φ より1位高次のオーダーの特異性をもっていることがわかる。例えばひずみエネルギー密度は、 $w \sim r^{-1}$ であり、 $w' \sim r^{-1}$, $\dot{w}$ および $\nabla w \sim r^{-2}$ である。ここでは2次元領域を考えているので一般に $\varphi(\mathbf{x}, t)$ が2次以上のオーダーの特異性を持てば（例えば $\dot{w} \sim r^{-2}$ ）、その特異点を含む領域で φ は可積分はない（積分の値が有限でないか、値が有限であっても一意に決まらない）。以

下そのような関数を単に“非可積分”という。

スカラー場 φ に対し、

補題 1 $\varphi, \dot{\varphi}$ が可積分ならば

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \varphi da = \int_{\mathcal{B}} \dot{\varphi} da \quad (6)$$

のように微分と積分操作の交換ができる(時間に“一様に可積分”である必要があるが、ここで使用される関数は特異性のオーダーが時間に無関係であり、一般性は満たされているとしても一般性は失わないので以後も“一様”という語は省略する.)。 φ が可積分であっても $\dot{\varphi}$ が非可積分ならば(6)式の右辺は意味がなくなるが

補題 2 $\dot{\varphi}$ がもし可積分な項 Ψ と非可積分な項に分離できて、後者の項がポテンシャル ω を持ち

$$\dot{\varphi} = \Psi + \nabla_c \omega$$

と表せれば

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \varphi da = \int_{\mathcal{B}} \Psi da + \int_{\partial \mathcal{B}} \omega \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} ds \quad (7)$$

となる。

(以上の補題で φ のき裂面上での特異点は必ずしも 1 個である必要はないことに注意.)

つぎに特異性をもつベクトル場 $\mathbf{f}$ に対し

補題 3 $\mathbf{f}$ がき裂面上で 0 で、 $\text{div } \mathbf{f}$ が可積分であり、

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\delta} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

が半径 δ で中心が z_i である円 Ω_δ に対し言えれば、発散定理

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\mathcal{B}} \text{div } \mathbf{f} da \quad (8)$$

が成立する。

4 エネルギー解放率の同等性の証明

補題 2 を使えば(2)式から(5)式を証明するのは容易である。 $\dot{w} + \dot{k}$ は 2 次のオーダーの特異性をもつから非可積分であるが $\dot{w} + \dot{k} = w' + k' - \nabla_c(w + k)$ で $w' + k'$ は可積分であるから(7)式を応用して(2)式は

$$\mathcal{E} = \int_{\partial \mathcal{B}} \{ \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (w + k) \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \} ds - \int_{\mathcal{B}} (w' + k') da.$$

この値は(2)式のすぐ後で述べたように $\mathcal{B}$ が z_i を含む限りその形に依らないこと、 $w' + k'$ は可積分であるから $\mathcal{B}$ の面積が 0 になればその積分値も 0 になることより

$$\mathcal{E} = \lim_{\mathcal{B} \rightarrow z_i} \int_{\partial \mathcal{B}} \{ \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (w + k) \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \} ds (= \mathcal{E}_F)$$

ここで $\mathcal{B} \rightarrow z_i$ は $\mathcal{B}$ が z_i を含んだままその“面積”を 0 にすれば良いのであり Freund が述べているように $\mathcal{B}$ 全体を z_i に (z_i から $\partial \mathcal{B}$ へのすべての距離を 0 に) 縮める必要はない。(5)式の $\mathcal{B}$ として Fig. 2

Fig. 2. Rectangular region surrounding a crack tip.

のような長方形領域をとれば、き裂面に平行な部分 $\mathcal{H}_\delta$ では $\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = 0$ 、垂直な部分上での積分は(5)式の被積分項は連続であるから $\delta \rightarrow 0$ のとき 0 となり結局

$$\mathcal{E} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{H}_\delta} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}} ds_x$$

となる。しかし注意すべきは $\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ が δ に関して一様に可積分でない限り、 Freund が行ったようにこの $\lim$ と積分を交換することは一般には正しくない。(すなわち(4)式は(2)式あるいは(5)式の結果としては得られない。) 実際破壊面上で $\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ は“ほとんどいたるところ 0”なる関数であるから $\lim$ と積分を交換すると普通の積分論の意味では $\mathcal{E} \equiv 0$ となってしまう。 Freund は(4)式を両側ラプラス変換を用いて評価もしているが、一般にはその評価方法も正しい $\mathcal{E}$ を与えない。¹¹⁾ (両側ラプラス変換を使った結果は、文献 12)で使用されている Fisher の公式を与える。)

なお(5)式は補題 3 を使い

$$\mathcal{E} = \lim_{\delta \rightarrow z_i} \int_{\partial \mathcal{B}} \left\{ \left(w + \frac{\rho}{2} |\nabla_c \mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{c} - S^T \nabla_c \mathbf{u} \right\} \cdot \mathbf{n} ds$$

と変形できる。ここで S^T は $\mathbf{S}$ の転置である。

つぎに(3)式の証明をする。以後関数 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ を単に φ_t と記す。 $\mathcal{E}$ の定義式(2)より

$$\mathcal{E}(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{t_0}^t \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{s}_\lambda \cdot \dot{\mathbf{u}}_\lambda ds d\lambda - \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} (w_t + k_t) da$$

ここで右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{t_0}^t \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{s}_t \cdot \dot{\mathbf{u}}_\lambda ds d\lambda \\ & + \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{t_0}^t \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbf{s}_\lambda - \mathbf{s}_t) \cdot \dot{\mathbf{u}}_\lambda ds d\lambda \end{aligned}$$

と分解でき、この 2 項目は 0 であることが容易にわかるから

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{t_0}^t \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{s}_t \cdot (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t_0}) ds$$

となる。ここで補題 3 の発散定理を使えば、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t_0) &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \{ \rho \ddot{\mathbf{u}}_t \cdot (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t_0}) \\ & + \mathbf{S}_t \cdot (\nabla \mathbf{u}_t - \nabla \mathbf{u}_{t_0}) \} da \end{aligned}$$

のように面積分の形に変形できる。($\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}} \sim r^{-1}$ であるから(2)式のままでは発散定理は使えなかったことに注意。) 結局 $\mathcal{E}$ は、

$$\mathcal{K}(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \int_{t_0}^{t_0^+} \rho (\ddot{\mathbf{u}}_t - \ddot{\mathbf{u}}_\lambda) \cdot \dot{\mathbf{u}}_\lambda d\lambda da$$

$$\mathcal{U}(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \int_{t_0}^t (\mathbf{S}_t - \mathbf{S}_\lambda) \cdot \nabla \mathbf{u}_\lambda d\lambda da$$

とおけば

$$\mathcal{E}(t_0) = \mathcal{U}(t_0) + \mathcal{K}(t_0)$$

となる. この $\mathcal{K}$, $\mathcal{U}$ はそれぞれ

$$\mathcal{K}(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_t - \ddot{\mathbf{u}}_{t_0}) \cdot (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t_0}) da$$

$$+ \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^t (\ddot{\mathbf{u}}_t + \ddot{\mathbf{u}}_{t_0} - 2\ddot{\mathbf{u}}_\lambda) \cdot \dot{\mathbf{u}}_\lambda d\lambda da \quad (9)$$

$$\mathcal{U}(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\mathbf{S}_t - \mathbf{S}_{t_0}) \cdot (\nabla \mathbf{u}_t - \nabla \mathbf{u}_{t_0}) da$$

$$+ \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (\mathbf{S}_t + \mathbf{S}_{t_0}^* - 2\mathbf{S}_\lambda) \cdot \nabla \mathbf{u}_\lambda d\lambda da \quad (10)$$

と分けることができ, 線型弾性体であれば(10)式の右辺第2項は0であるから, もし(9)式の右辺第2項も0であれば, 補題3を使って

$$\mathcal{E}(t_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\partial \mathcal{B} + \partial_{t_0}} (\mathbf{s}_t - \mathbf{s}_{t_0}) \cdot (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t_0}) ds$$

ここで $\partial \mathcal{B}$ 上の積分は $(d/dt)_{t_0}$ の作用で0となるのである

$$\mathcal{E}(t_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\partial_{t_0}} (\mathbf{s}_t - \mathbf{s}_{t_0}) \cdot (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t_0}) ds_x$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\partial_{t_0}} \mathbf{s}_{t_0} \cdot \mathbf{u}_t ds_x \quad (3)$$

となり Bueckner が準静的な場合で示した公式が得られる. これと Erdogan の公式(3)が等しいことを証明するのは容易であり, 結局(9)式の右辺第2項が0になることを示せば良い. ここで形式的に $(d/dt)_{t_0}$ と $\mathcal{B}$ 上の積分を交換すれば一見0となることが示せるが, 同じ操作で(9), (10)式の右辺すべて0となってしまう. (9), (10)式の $\mathcal{B}$ に対する被積分項は t で微分するとそれぞれ非可積分となっているので微積分の交換は許されないのである. 以後証明が煩雑になるのをさけるため速度 $\mathbf{c}$ は一定であるとする. (任意速度に対しては文献10)を参照.) (9)式の右辺第2項の被積分項を

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int_{t_0}^t (\ddot{\mathbf{u}}_t + \ddot{\mathbf{u}}_{t_0} - 2\ddot{\mathbf{u}}_\lambda) \cdot \dot{\mathbf{u}}_\lambda d\lambda$$

とおけば

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \varphi(\mathbf{x}, t) da = 0$$

を示せばよい.

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' - \nabla_c \mathbf{u}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'' - 2\nabla_c \mathbf{u}' + \nabla_c^2 \mathbf{u}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}''' - 3\nabla_c \mathbf{u}'' + 3\nabla_c^2 \mathbf{u}' - \nabla_c^3 \mathbf{u}$$

を使うと

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \Psi(\mathbf{x}, t) + \{ -\nabla_c^3 \mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t_0})$$

$$+ (\nabla_c^2 \mathbf{u}_t - \nabla_c^2 \mathbf{u}_{t_0}) \cdot \nabla_c \mathbf{u} \}$$

のように分解できる. ここで $\Psi(\mathbf{x}, t)$ は全体として可積分であり $\Psi(\mathbf{x}, t_0) = 0$ である. 右辺第2項は $(\nabla_c^3 \mathbf{u} \sim r^{-5/2})$ 等に注意すると全体とし非可積分であるが, ポテンシャル

$$\omega(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t_0}) \cdot \nabla_c^2 \mathbf{u}_t$$

$$+ \nabla_c \mathbf{u}_t \cdot (\nabla_c \mathbf{u}_t - \nabla_c \mathbf{u}_{t_0})$$

を持ち $\omega(\mathbf{x}, t_0) = 0$ である. 結局

$$\dot{\varphi} = \Psi + \nabla_c \omega$$

と表せるから補題2の7式を使い

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \varphi(\mathbf{x}, t) da = \int_{\mathcal{B}} \Psi(\mathbf{x}, t_0) da$$

$$+ \int_{\partial \mathcal{B}} \omega(\mathbf{x}, t_0) \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

となり証明終わり.

5 ひずみエネルギー解放率と運動エネルギー生成率

き裂面の数学的モデルには本論文のように幅のない(2次元問題では)直線ないし曲線を用いるのが普通であるが, 今 Fig. 3 のようになめらかな先端部 $\partial \Omega$ が $\mathbf{c}$ 方向に幅を有限に保ちつつ進展している切欠モデルを考える. ($\partial \Omega$ 上のすべての点で $\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ とする.) その場合(2)式と同様な定義より

Fig. 3. Extending notch.

$$\mathcal{E} = \int_{\partial \Omega} (\omega + k) \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} ds$$

となる. したがって切欠きの場合, 質量欠損を伴い, その部分のひずみエネルギーのみならず運動エネルギーも物質外部へ解放されるときをえざるを得ない. 一方き裂モデルでは, 物質全体の領域は不変であり, 質量欠損は考えられない. はたしてひずみエネルギー, 運動エネルギー解放に関してはこの場合どうであろうか? 前節で

$$\mathcal{U}(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\mathbf{S}_t - \mathbf{S}_{t_0}) \cdot (\nabla \mathbf{u}_t - \nabla \mathbf{u}_{t_0}) da$$

$$\mathcal{K}(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_t - \ddot{\mathbf{u}}_{t_0}) \cdot (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t_0}) da$$

を得たが, その形から判断して $\mathcal{U}$ はひずみエネルギー, $\mathcal{K}$ は運動エネルギーに関連した解放率を示している. 更に弾性定数が正定値であれば $\mathcal{U} \geq 0$ であり, 前節後半と同様な方法で, 任意速度 $\mathbf{c}$ に対し

$$\mathcal{K}(t_0) = - \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho}{2} |\nabla_c(\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t_0})|^2 da \leq 0$$

が示せるので, $\mathcal{U}$ は(き裂先端から物質外部への)ひずみエネルギー解放率, $\mathcal{K}$ は(き裂先端から物質内部への)運動エネルギー生成率なる量であろう. すなわ

ちき裂モデルでは、運動エネルギーは物質外へ解放されず、むしろ、き裂先端で生成され（物質内へ伝ばしている）と考えるべきである。更に重要なことは、 $\mathcal{B}$ がき裂先端を含まなければ、 U , K それぞれ 0 であるから、ひずみエネルギー解放率 U , 運動エネルギー生成率 K は、 $\mathcal{B}$ の形に依らない、き裂先端固有の量である。すなわち、これらは物体全体のひずみエネルギー、運動エネルギーの変化率とは異り、き裂先端へ到達した情報のみ察知する量であり、き裂伝ばを支配する新しいパラメータとなると期待される。

（昭和56年10月2日 第1回破壊力学シンポジウムにて講演）

参 考 文 献

- 1) Griffith, A. A., Philosophical Trans. Royal Soc., London, **A221**, 163 (1921).
- 2) Irwin, G. R., J. Appl. Mech., **24**, 361 (1957).
- 3) Bueckner, H. F., Trans. of the ASME, **80**, 1225 (1958).
- 4) Rice, J. R., J. Appl. Mech., **35**, 379 (1968).
- 5) Erdogan, F., "Fracture 2", Chap. 5 (edited by H. Liebowitz) (1968) Academic Press
- 6) Achenbach, J. D., 例えば "Mechanics Today I", 1 (edi. by S. Nemat-Nasser) (1972) Pergamon Press
- 7) Atkinson, C., and J. D. Eshelby, Int. J. Fracture, **4**, 3 (1968).
- 8) Freund, L. B., J. Elasticity, **2**, 341 (1972).
- 9) Yatomi, C., Int. J. Fracture, **16**, R 239 (1980).
- 10) Gurtin, M. E., and C. Yatomi, Arch. Rational Mech. Anal., **74**, 231 (1980).
- 11) Yatomi, C., Int. J. Fracture, in press.
- 12) 坂田 勝, 青木 繁, 岸本喜久雄, 機械の研究, **33**, 15 (1981).

書 評

“Cavities and Cracks in Creep and Fatigue”

J. Gittus (編)

(1981年, Applied Science Publishers Ltd. 発刊, 155×230mm, 295ページ, ￡28.00)

本書は英国 UKAEA の原子力開発研究所研究部長 Gittus 博士が編者となり、この分野の著名な研究者10名が各専門について執筆した最新の知見を集成したものである。編者も述べているように、近年材料の破壊予知は構造力学や材料科学において解かれるべき重要な問題となっているが、本書の題名である“クリープや疲労における空洞およびき裂”の生成・成長過程は、この問題の研究に恰好の題材を提供していると言える。

本書は8章からなっており各章の内容・執筆者を簡単に示すと以下のとおりである。第1章ではクリープ空洞の生成・成長の理論的取扱い、特に空洞成長を起しうる七つの機構を示しており (W. Beere), 第2章では1章で示した空洞成長機構と試験条件との関係について図示している (W. Beere). 第3章では粒界空洞の構造を幾何的モデルと対応させて示しており (M. O. Tucker), 第4章ではノッチを入れた板の局所的な温度・サイクル依存クリープが実験結果をもとにして示されている (A. D. Freed と B. I. Sandor). 第5章以降はそれぞれ、高温でのクリープと疲労におけるき裂成長 (K. Sadananda と P. Shahinian), 多結晶金属の疲労破壊に対するマイクロメカニクス的アプローチ (J. W. Provan), き裂先端での応力解析とそこでのマイクロボイドの拡散成長 (D. S. Wilkinson と V. Vitek), また最後の第8章では高温疲労時の粒界移動、粒界すべり、ボイド形成など (K. U. Snowden) について手際よく述べられている。内容的には近年この分野においてなされた仕事のレビュー的な色彩が強くなり高いレベルの問題にまで言及している反面、ページ数の制限などのためにこの分野の基礎的知識は特別の説明なしに用いられている。ただし、他の分野の研究者にも理解できるように各章には多くの参考文献があげられており、これらの文献を読むことにより、これからこの分野について学ぼうとする研究者・学生にも理解できるように配慮されている。近年、エネルギーの効率的利用などの観点から材料が極端な条件のもとで使用される場合が多くなってきている。本書の内容はこのような条件下での材料の破壊に対しても大きな示唆を与えるものであり、材料の破壊に関心をもたれる研究者が本書から多くの新しい考え方をくみ取られることを期待する。

(京都大学工学部 成田舒孝)